

图

论

【美】J. V. A 著



清华大学出版社

图

论

[美] W. Mayeda 著

葛 真 钟宁晖
邓祖善 杜世培 译

贵州人民出版社

内 容 简 介

本书是一本全面系统地阐述线图理论及其应用的重要著作。作者前田渡 (W. Mayeda) 教授长期从事图论研究和教学, 本书即为作者近三十年来的研究成果总结。

全书分为两部分: 前一部分对线图的基本理论 (如路径、割集、平面图的理论、网络及流图理论等) 作了完整严谨的叙述; 后一部分对图论在电网络、开关网络、传输网络及系统故障诊断等方面的应用, 作了较详细的介绍。

本书可供大专院校电气、电子工程、计算机科学、自动控制和应用数学等专业高年级学生及研究生作参考教材, 也可供需要了解图论基本知识的科技工作者参考。

GRAPH THEORY

Wataru Mayeda

John Wiley & Sons, Inc., 1972

图 论

[美] W. Mayeda 著
葛 真 钟宁晖 译
邓祖善 杜世培

贵州人民出版社出版

(贵阳市延安中路5号)

贵州新华印刷厂印刷 贵州省新华书店发行

850×1168毫米 32开本 20.625印张 445千字

印数1—2,900

1985年3月第1版 1985年3月第1次印刷

书号: 13115·55 定价: (平装)4.00 元
(精装)5.00 元

译者的话

前田渡 (W. Mayeda) 教授所著的《图论》一书，是图论理论及应用上比较重要的著作之一。本书是作者多年从事图论研究和教学的结晶。

本书在理论与应用上的阐述均比较严密，逻辑思维清楚，对于比较重要的定理与引理均举例说明，并把理论与应用有机地结合起来，加以融会贯通，从而自成体系，别具一格。在叙述上由简到繁，循序渐进，讲究教学法。书中例题丰富，适宜自学。稍嫌不足的是，由于该书完成较早，对图论新近的应用，特别是对图论的计算机算法介绍不够，不过，只要读者参阅有关的文献，这是不难弥补的。

前田渡教授对本书的翻译工作极为支持，通过伍明友同志给我们寄来了他亲自修改的原书的勘误，以供更正；美国圣他卡勒拉大学电机及计算机科学系主任陈树柏教授热情地为本书的中文版写序，使本书增添了光彩；中国科技大学研究生院的左埏先生及他在美国攻读博士学位的研究生伍明友、高晓春同志给了我们大力的支持和鼓励；贵州工学院的吴宏国、张方南、张民逸等同志对本书的翻译也作了不少工作；在此一并表示敬意与感谢。

本书的翻译是在葛真同志主持下进行的。钟宁晖同志负责全书的初译及第一章至第六章的复译；引论、第七章至第九章和第十四章的复译由邓祖善同志负责；杜世培同志负责第十章至第十三章的复译；最后由葛真同志对全书进行审校及文字润饰工作。

由于时间紧迫，虽然我们尽了努力，译文中的错误仍然难免，希望读者批评指正。

1983年10月

序

图论应用的开始，可追源至1736年，即欧拉(L.Euler)解答那著名的“哥尼斯堡七桥难题”的时候。所谓图论的研究，是指对由“点”和“线”构成的各种图，研究其中点和线的关系和特性的一种科学。图论在物理科学上的应用，可溯自1847年，当克希霍夫(G.R.Kirchhoff)研究电网络时，由他创立那两个举世知名的网络定律时开始。但是“图论”(Theory of Graphs)这个名词却是在1936年由D.König首先启用。D.König可以说是以系统性的科学方法研究图论的第一人。

在1930至1936年间，C.Kuratowski,R.M.Foster和H.Whitney在图论研究及发展的过程中，作出了不少重要的贡献。但图论在电网络分析及综合上获得重要的应用，则始于1960年，由伊利诺大学的学者M.B.Reed,M.E.Van Valkenburg, S. Seshu, W.H.Kim及本书作者前田渡(W.Mayeda)教授大力推动所致。

前田渡教授在近二三十年间担任了一个“网络图论”理论及应用研究开垦者的重要角色，在该科学理论的成长上作了不少有意义的贡献。此外，他还在实际电机工程应用上发表了若干重要的文章，其中最具代表性的如有源电路的“双图法”(Two-graph approach)，开关网络的拓扑分析及综合，以及图论在电子计算机科学上的应用等。在这些领域中他均作出了有意义的贡献。

本书介绍了前田渡教授近三十余年来在图论研究方面的成果，在1972年由美国著名的John Wiley & Sons出版社出版。当我于1960年在伊利诺大学攻读电机工程学博士学位时，在图论应用的研究上，有机会研读本书一部分初稿，受益良多。

我在1980年接受了中国科学院的邀请，在北京中国科技大学

研究生院第一次讲授“网络图论及其应用”的专题讲座。承当时听讲的几位热心同仁鼎力协助，在1982年把我在这次讲座中用的英文资料，编撰成《网络图论》一书，由科学出版社出版。该书对前田渡教授在网络图论研究上的辉煌成果，作了颇为详细的介绍。

在此电子计算机科学神速发展，图论在科学应用上日益广泛和进步之时，欣闻贵州工学院葛真教授及钟宁晖、邓祖善、杜世培诸同仁把前田渡教授的《图论》原著翻译成中文出版，可谓适逢其时了。本书对国内在图论理论及应用上之研究，必将有一定的贡献。近日承前田渡教授来信之托，谨将上述数言为序，并谨代表前田渡教授向主持该翻译工作之葛真教授及在他领导下工作的全体同仁深致谢忱，更预祝一切工作顺利，及此译本问世后获丰硕的成果！

陈树柏谨识

一九八三年夏于美国加利福尼亚州圣他卡勒拉大学

原 序

近年来，许多已发表的科技论文常在标题中使用一些与线图理论有关的字眼，如“拓扑”、“图论”、“割集”、“树”等等。这不是偶然的。线图理论本身作为数学理论目前正处于发展过程之中，它不断应用于各个从表面看来互不相关的领域中，例如，工程系统科学，人类关系与社会学，商业经营与科学管理，政治学，化学，心理学等。

本书的意图是，不仅要提供使线图理论学起来极有兴趣的入门内容，而且还将引导读者能深入钻研他自己探索的问题，不论这种问题是涉及线图理论本身，还是它的多种多样应用中的一项。

在一本书里，不可能对线图理论的所有应用都进行讨论，而我们着重研究的是在电网络理论、开关理论、通讯网和交通网理论、系统诊断等方面的应用。

我很乐于感谢N. 沃克斯博士对本书提出的许多非常宝贵的建议，感谢他阅读了手稿的定稿并改正了其中的错误。我还感谢M. E. 冯·瓦尔肯伯格博士和伊利诺大学协调科学实验室系统组的过去与现在的全部成员，感谢他们对完成本书所作的直接的与间接的支持。

前田渡(Wataru Mayeda)

于伊利诺州奥巴拉

1971年10月

目 录

引论	(1)
第一章 无向线图	(5)
1-1 引言	(5)
1-2 路径和回路	(10)
1-3 欧拉图	(18)
1-4 M图	(26)
1-5 不可分图	(33)
1-6 路径的集体	(39)
1-7 τ 图	(49)
习题	(60)
第二章 关联集和割集	(63)
2-1 关联集	(63)
2-2 割集	(65)
2-3 割集的环和	(73)
2-4 线性无关割集	(85)
习题	(90)
第三章 线图的矩阵表示和树	(92)
3-1 关联矩阵	(92)
3-2 树	(100)

3-3	回路矩阵	(105)
3-4	割集矩阵	(118)
3-5	割集矩阵的可实现性 (I)	(126)
3-6	从割集矩阵到关联矩阵的变换	(150)
习题		(154)
第四章	平面图	(156)
4-1	2-同构图	(156)
4-2	平面图	(164)
4-3	对偶性	(173)
4-4	割集矩阵的可实现性 (II)	(191)
习题		(206)
第五章	特殊割集和伪割	(208)
5-1	分离两个确定顶点的割集	(208)
5-2	伪割	(218)
5-3	阿贝尔群	(230)
习题		(233)
第六章	有向线图	(235)
6-1	有向线图的关联矩阵和回路矩阵	(235)
6-2	初等树变换	(248)
6-3	回路矩阵的非零大子式的值	(252)
6-4	割集矩阵	(257)
6-5	基本割集矩阵的可实现性	(264)
6-6	有向子图	(268)
习题		(277)

第七章 无源网络的拓扑分析	(279)
7-1 克希霍夫定律	(279)
7-2 网孔变换	(281)
7-3 节点变换	(285)
7-4 导纳矩阵的行列式	(288)
7-5 开路网络函数	(301)
7-6 短路网络函数的拓扑公式	(314)
习题	(322)
第八章 有源网络的拓扑公式, 单向网络及等效变换	(324)
8-1 电流图和电压图	(324)
8-2 符号置换	(334)
8-3 主树	(337)
8-4 开路策动点函数	(345)
8-5 开路转移函数	(350)
8-6 短路网络函数	(353)
8-7 单向网络	(356)
8-8 电网络的等效变换	(365)
习题	(375)
第九章 树的生成	(380)
9-1 生成树的必要性	(380)
9-2 用初等树变换来生成树	(382)
9-3 完全树的生成	(393)
习题	(405)
第十章 流图和信号流图	(409)

10-1	流图	(409)
10-2	信号流图	(415)
10-3	信号流图的等效变换	(426)
习题	(438)
第十一章	开关理论	(441)
11-1	连接矩阵	(441)
11-2	开关网络的分析	(448)
11-3	完全确定开关函数的综合	(451)
11-4	以SC网络综合不全定开关函数	(459)
11-5	多触点开关网络	(462)
习题	(466)
第十二章	传输网理论——边权例	(469)
12-1	无向边权 (EWC) 网中的单流	(469)
12-2	无向 EWC 网的端限容量矩阵	(480)
12-3	端限容量之间的关系	(492)
12-4	割集的 W 类	(496)
12-5	有向 EWC 网	(501)
12-6	损耗 EWC 网	(521)
12-7	EWC 网的流可靠度	(528)
习题	(546)
第十三章	传输网理论——点权例	(553)
13-1	无向情况下的端限容量	(553)
13-2	无向 VWC 网的端限容量矩阵	(564)
13-3	有向 VWC 网	(571)
13-4	点割和点半割的生成	(575)

习题	(585)
第十四章 系统诊断	(588)
14-1 分辨率	(588)
14-2 测试点	(592)
14-3 测试门	(614)
习题	(625)
主要参考文献	(628)
英中名词索引	(633)
符号索引	(644)

引 论

有不少物理系统其性能不仅与元件的特性有关，而且也与元件的相互位置有关。电网络就是一个明显的例子。如果我们把一个电阻器换成一个电容器，一般来讲某些特性（比如说网络的输入阻抗）就会发生变化，这表明这个系统的性质与元件特性密切相关。另一方面，如果我们改变一个电阻器的位置，输入阻抗也会变化，这说明系统的拓扑结构影响着系统的性质。仅由同一种类型的元件组成的系统，其系统特性仅仅取决于本身的拓扑结构，单触点开关电路就是这种系统的例子。在非物理系统中，也能见到类似的情况，比如在管理系统之中就是如此。因此，要显示一个系统，使其拓扑结构能够清晰可见是非常重要的。

表示一个系统的一种简单方法，是画一个由称之为“顶点”的点和连结这些顶点的称之为“边”的线段组成的图，在这个图中，这些顶点和边代表元件和这些元件的联接方式，这样的图就是线图。一个线图根据我们研究的物理系统的类型常常也称为网络、网、图、电路、图解、结构等等。

我们通常用线图来表示一个系统的数学模型或抽象模型，而不指出其物理结构。在这样的情况下，线图指的是流图、信号流图、框图、状态图、简化图、社会图及组织图等。

在线图理论中，已知最早的论文是欧拉 (Euler) 在1736年发表的，他给出了哥尼斯堡 (Königsberg) 七桥问题的解答，提出了线图的概念。在1847年，克希霍夫 (Kirchhoff) 利用线图理论分析电网络，得到了今天称为策动点阻抗和转移导纳的拓扑公式，

这或许是在工程技术问题中应用线图理论的第一篇论文吧。然而，并不是克希霍夫的论文而是麦比乌斯 (Möbius) 关于四色问题的猜想 (大约在1840年)，吸引了许多学者献身于线图理论的研究。

四色问题是要证明或者否定，对于任意一个平面地图，如果两个相邻的国家用不同的颜色，只要四种颜色就足够了。在平面地图的每一个国家中间设置一个顶点，当且仅当两个国家相邻时用一条边把这两个顶点连起来，这样做的结果就得到了平面图。换言之，对于一个给定的平面地图，必定有一个平面线图与其对应，在地图上的一个国家对应于线图的一个顶点，两个国家的界线对应于代表两国的两个顶点之间的一条边。现在，我们可以把四色问题重新陈述如下：证明或者否定对任意一个平面图的顶点染色，相邻的两个顶点用不同的颜色，只需四种颜色就足够了。

如果你想动手证明四色问题，你立即会碰上区别平面图与非平面图的困难。你要研究平面图的性质，尽管关于平面图的基本性质已由库拉托斯基 (Kuratowski) 和惠特尼 (Whitney) 发现，然而四色问题至今还未解决^{*}，仍在吸引许多学者为探讨更多更深的线图理论而努力。当然，也有不少的性质因为其特殊的应用而被发现。

本书的第一部分为初学者提供线图的性质，然而，这并不意味着我们仅仅研究线图的基本与简单的性质。事实上，本书包括如下最高深的材料：

1. 适合于生成所有可能的路径的路径集 $\{P_{ij}\}$ 的特性，以及路径集之中的性质。

2. 怎样生成割集，特别是怎样生成把给定的两个顶点分离的所有割集，这些割集在通讯网和运输系统中是非常重要的。

^{*} 四色问题已在1976年由美国的K. Appel, W. Hakan, J. Koch运用电子计算机工作了1200小时，成功地作出了证明。——译注

3. 证明包括托特 (Tutte) 条件在内的割集矩阵的可实现条件。

4. 对于非平面图的库拉托斯基条件的一个证明及对于平面图的惠特尼条件 (对偶性) 的证明。

5. 伪割的引入。当一个线图是平面时, 一个伪割就变成路径的对偶。

6. 在有向线图中, 判定有向图存在的一个算法。

7. 生成所有树的两种类型的发展。

当我们讨论线图应用时, 我们时常用到带权线图, 即边或者顶点具有称之为权这个量的线图。例如, 我们能够把一个无源线性双向集中参数的电网络表示成为一个线图。这个线图的每条边具有三个权, 即电压、电流及二者的比例系数, 这将在第七章讨论。为了研究通讯网或运输系统的最大流问题, 对应的线图中通常每条边仅需要一个权表示该边能处理的最大运输能力 (见第十二章)。我们还能看到一个适当的带权线图能够表示其他系统, 诸如开关电路, 逻辑电路, 航空运输网及计算机系统。

在许多情况下, 一个带权线图只是用来表示一个系统。然而在本书中, 我们将研究怎样利用带权线图进行系统分析, 特别是一种称为拓扑分析法的方法。有两类互相区别的拓扑法, 一个是利用称为拓扑公式的法则直接从带权线图研究所述系统的特性。而另一种方法是连续运用等效变换法把一个系统的带权线图简化为一条带权边, 这条边的权就表示了系统的特性。拓扑公式法的例子包括: (1) 根据一个给定的线性集中参数的电网络所对应的带权线图, 找出所有具有某些特性的子图, 从而得到电网络的函数 (见第七, 第八章); (2) 在通讯网与运输系统中, 由定出所谓最小割的位置而得到最大流 (见第十二章); (3) 在一个开关电路中, 由找出指定端点之间所有可能的路径而获得开关函数 (见第十一章)。等效变换的例子是: (1) 利用节点消去

法获得简化了的信号流图（见第十章）；（2）一个线性电网络的等效变换（见第八章）。

第一类拓扑分析清楚地显示出一个系统的特性与边（或部件）的位置之间的关系。在某些情况下，这种关系足以设计或改善一个满足给定功能的系统，这称为系统的拓扑综合。开关函数和通讯网的综合就是一个良好的例证。在第十四章给出的系统的故障诊断再次表明线图理论的确是应用于系统理论领域中的一个基本工具。

第一章 无向线图

1-1 引言

在这一章里，我们要讨论无向线图的路径和回路的一些性质。路径和回路是线图中相当重要的子图。例如，我们以后将会看到，路径确定开关网络的特性，而回路则与电网络理论中的克希霍夫电压定律有关。

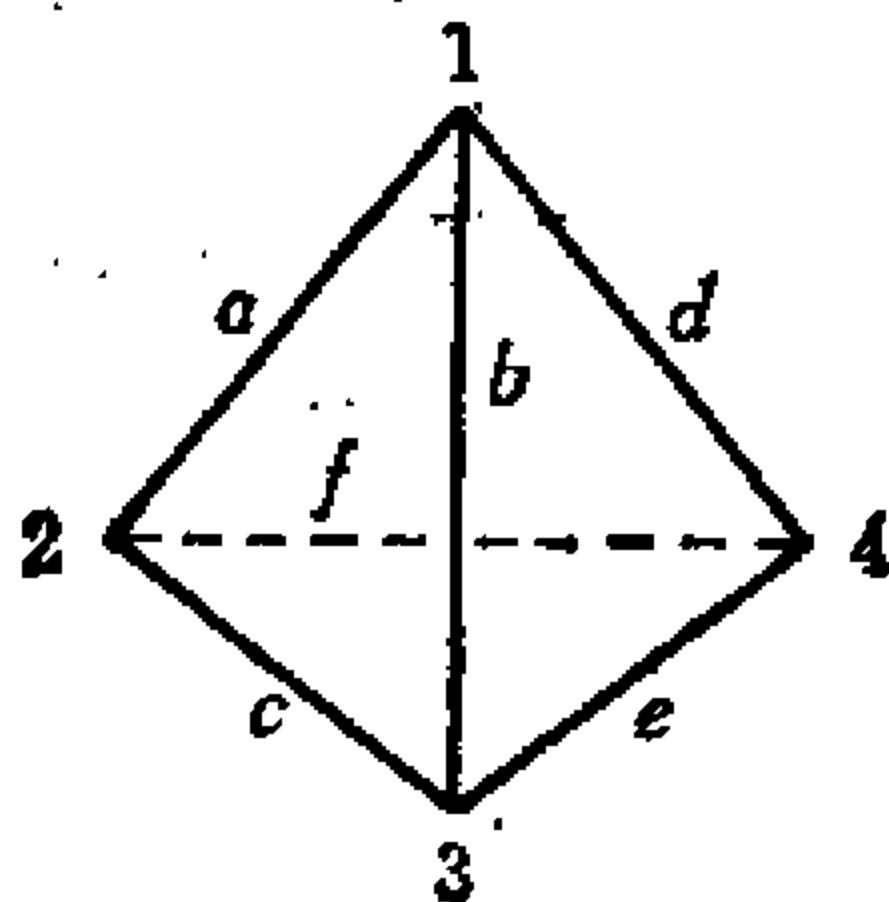


图1-1-1 一个四面体

为了定义线图，考虑图1-1-1所示我们熟悉的四面体，可能更容易些。在这个四面体中，有四个顶点1，2，3，4和六条边 a, b, c, d, e, f 。每一条边位于两个顶点之间：边 a 在顶点1，2之间，边 b 在顶点1，3之间，边 c 在顶点2，3之间等等。

在组合拓扑学中，顶点集合和边集合的集体*称为一维（线性）单纯复形，在图论中则称之为线图。不过，顶点和边的定义要比在多面体中广泛些。

* 集体(collection)与集合(set)的概念稍有不同。在本书中，集体是指以集合为元素的集合，但有时二者也可混用。——译注

为了从几何上推广顶点和边的概念，我们考虑一个 n 维欧几里德空间。首先，一个顶点是空间中的一个点。对于给定的顶点集合 Ω ，一条边 e 是位于 Ω 中两个顶点 v 和 v' 之间，而不经 过 Ω 中其它顶点的一条曲线。顶点 v 和 v' 称为边 e 的端点。当 v 和 v' 相同时，边 e 称为“自环”，如图1-1-2(a)所示。如果我们给曲线规定一个方向，如图1-1-2(b)所示，则由此曲线表示的边称为有向边。否则称为无向边。

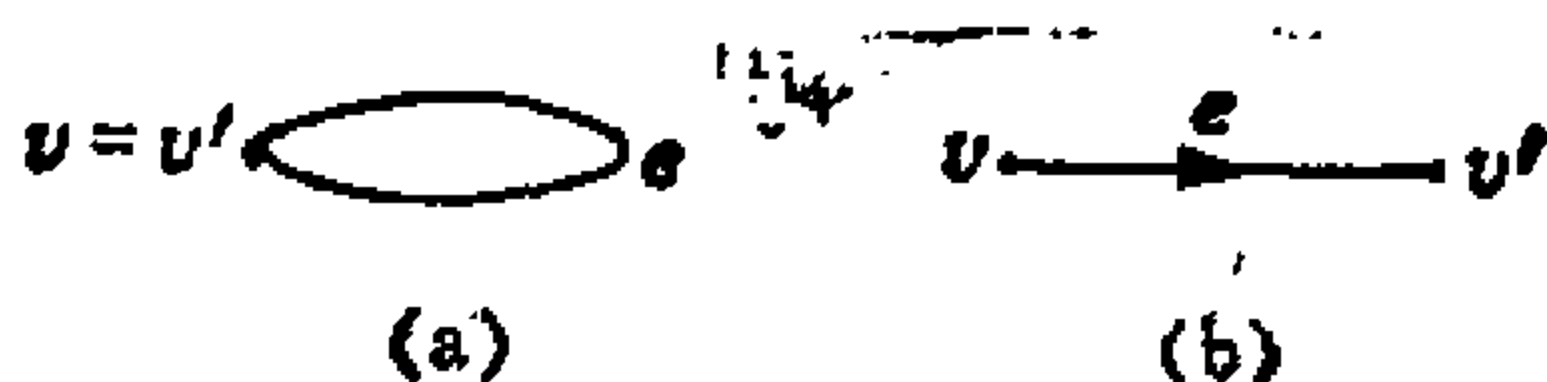


图1-1-2 边

(a) 自环; (b) 有向边

现在，我们可以用前面的几何概念来导出边、顶点和线图的抽象定义。我们用一个集合来代替（空间中的）那些被选作顶点的点，以集合中的元素作为给定的顶点。从几何意义来说，一条边是两个顶点之间的一条曲线。由于在这条曲线上没有其它顶点，我们可以把一条边看成与一对顶点相对应。另一方面，也允许几条边有相同的端点。因此，顶点、边和线图的定义可以抽象成下面的形式。

定义1-1-1 设 \mathcal{E} 和 Ω 是两个集合。若任一 $e \in \mathcal{E}^*$ 恰好对应着一对 (v, v') ，其中 $v, v' \in \Omega$ ，则 \mathcal{E} 中每一个元素是一条边， Ω 中每一个元素是一个顶点，而 $\mathcal{E} \cup \Omega^{**}$ 是一个线图。

有了这个定义，端点、有向边和无向边都可以抽象定义如下。

定义1-1-2 设 e 是与一对顶点 (v, v') 对应的一条边，则称

* 符号 e 意思是“属于...”或“在...中”， $e \in \mathcal{E}$ 表示 e 在 \mathcal{E} 中。

** $\mathcal{E} \cup \Omega$ 表示属于 \mathcal{E} 或 Ω ，或二者共有的所有元素的集合。

两个顶点 v 和 v' 为边 e 的端点。若顶点对 (v, v') 是有序的,则说 e 是有向的,或称 e 为有向边。否则,就说 e 是无向的,或称 e 为无向边。

进一步,我们定义有向和无向(线)图如下。

定义1-1-3 若一个线图的所有边都是有向的,则说此线图是有向的,或称之为有向(线)图。若一个线图的所有边都是无向的,则说此线图是无向的,或称之为无向(线)图。

例1-1-1 我们用符号 $\alpha \rightarrow \beta$ 来表示 α 与 β 对应。考虑两个集合 $\mathcal{E} = (a, b, c, d, e, f, g)$ 和 $\Omega = (1, 2, 3, 4, 5)$,其中

$$a \rightarrow (1, 2)$$

$$b \rightarrow (1, 3)$$

$$c \rightarrow (2, 3)$$

$$d \rightarrow (1, 4)$$

$$e \rightarrow (1, 4)$$

$$f \rightarrow (4, 2)$$

$$g \rightarrow (2, 4)$$

由于 \mathcal{E} 中的每一个元素恰好对应 Ω 中一对顶点,故据定义1-1-1, a, b, c, d, e, f, g 是边, $1, 2, 3, 4, 5$ 是顶点,而 $\mathcal{E} \cup \Omega$ 是一个线图。顶点1和2是边 a 的端点,顶点1和3是边 b 的端点,如此类推(定义1-1-2)。

代替上例中采用的符号 $\alpha \rightarrow \beta$,我们用一个图形来表示边和对应的顶点对。为此,我们作如下约定。

1. 一个顶点用一个小圆圈表示。当顶点的名称需要标明时,将它写在圆圈旁边或圆圈中,如图1-1-3(a)和(b)所示。

2. 当一条边是无向时,用两个顶点间的一条线表示,这两个顶点就是这条边的端点。如有必要,边的名称可写在线旁。例如,无向边 $e \rightarrow (v, v')$ 由图1-1-3(c)所示的一条线表示。

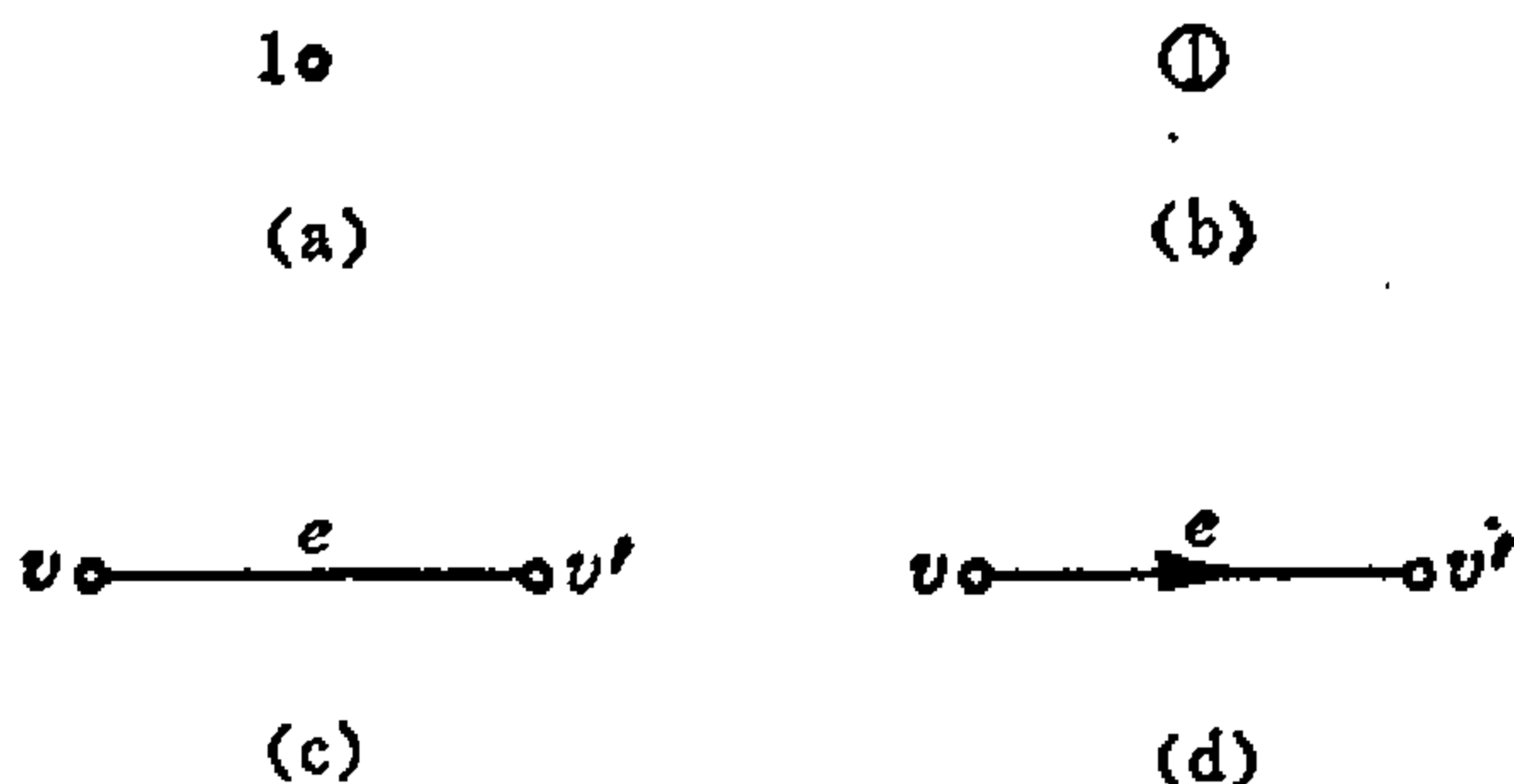


图1-1-3 顶点和边的表示

(a) 顶点 1 的表示, (b) 顶点 1 的表示;
(c) 无向边 $e(v, v')$, (d) 有向边 $e(v, v')$

3. 当一条边是有向时, 用一条带有箭头的线来表示, 箭头指向边的方向. 例如, 有向边 $e \rightarrow (v, v')$ 如图1-1-3(d)所示.

这里指出, 当 $e \rightarrow (v, v')$, 而 v 和 v' 相同时, 边 e 是一个自环, 表示边 e 的线是一个始于顶点 v (即代表顶点 v 的小圆圈) 也终于同一顶点的环.

因为我们只需要知道每一条边对应哪一对顶点, 所以, 代表一条边的线是什么形状是无关紧要的. 例如, 图1-1-3(c)和图1-1-4(a), (b)表示的是同一条边.

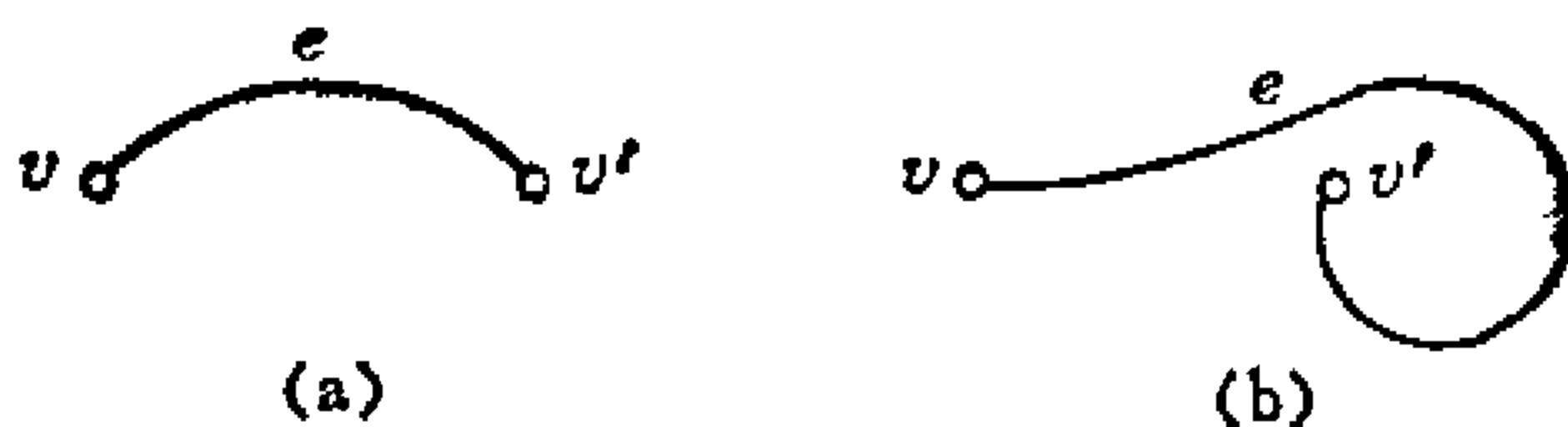


图1-1-4 边 $e(v, v')$ 的表示

在一个图形中, 不用小圆圈表示的那些边的交叉点, 也是无关紧要的. 例如, 在图1-1-5(a)中, 虽然边 a, b 互相交叉, 但此图形仅表示无向边 a 对应于顶点对 $(1, 4)$, 无向边 b 对应于顶

点对 $(2, 3)$ 。注意图1-1-5(a)和(b)之间的区别。

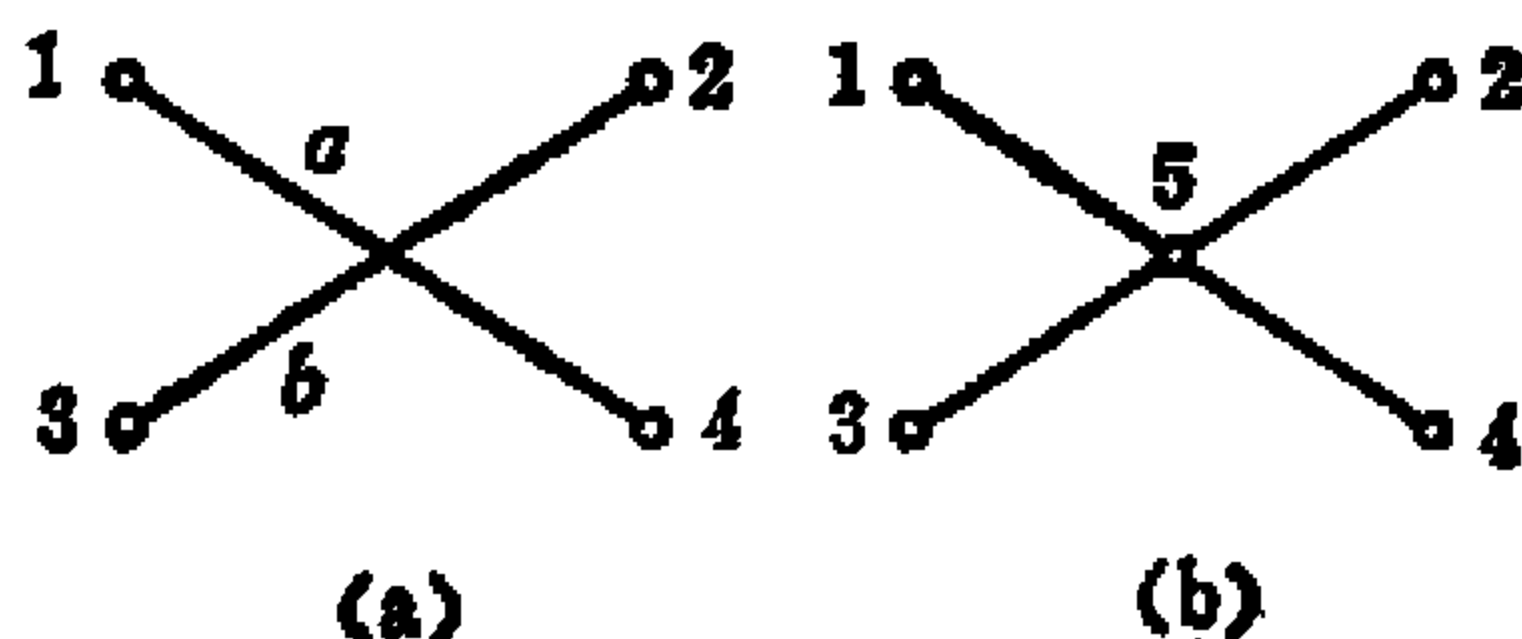


图1-1-5 边的交叉
(a)边 a 和边 b , (b)四条边

有了这些约定，我们就可以用图形来表示一个线图。例如，例1-1-1的线图 $\mathcal{G} \cup \Omega$ ，其中 $\mathcal{G} = (a, b, c, d, e, f, g)$ ， $\Omega = (1, 2, 3, 4, 5)$ ，把每一对顶点看作一个无序点对，即可由图1-1-6表示出来。注意，此例中顶点5不在任何一个点对里，所以没有线与顶点5连接。

由于图形给出了一个线图清晰而简单的表示，在本书中，我们就用这样的图形来表示给定的线图。

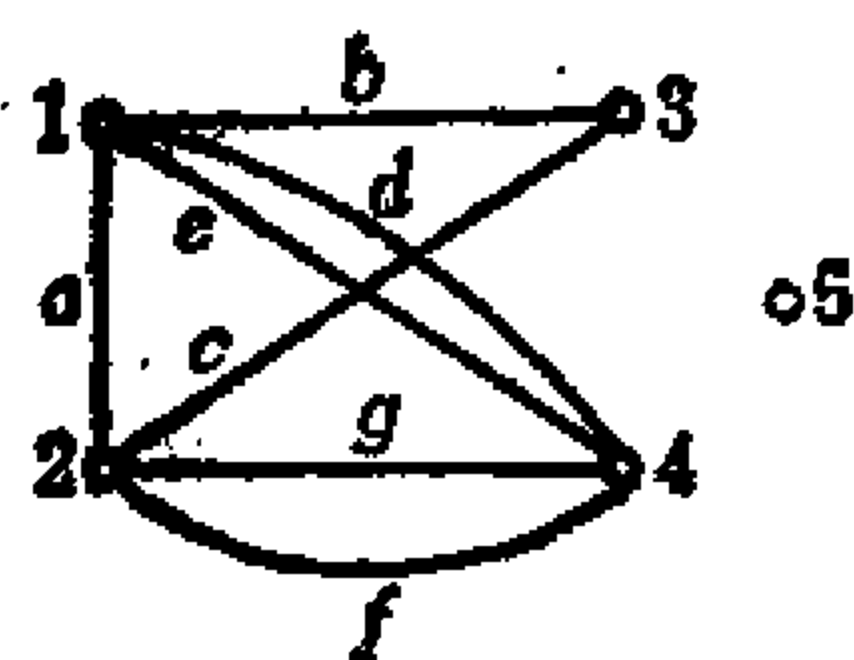


图1-1-6 无向图

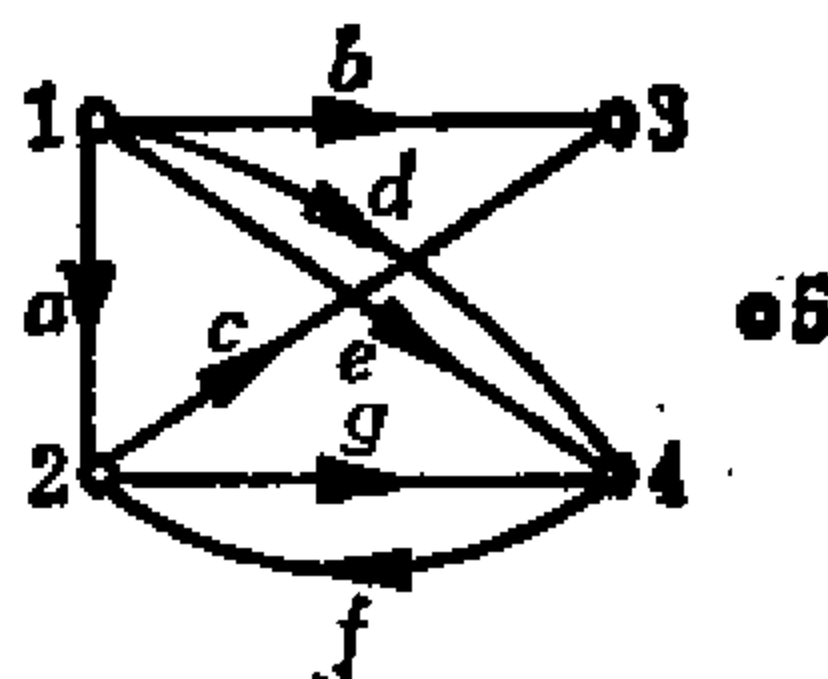


图1-1-7 有向图

由定义1-1-2和1-1-3可以看出，图1-1-6中的线图是无向的，而图1-1-7中的线图是有向的。应当注意的是，当例1-1-1中所有的顶点对都是有序点对时，便得到图1-1-7中的线图。

在本书的前面几章里，我们只讨论无向线图。换句话说，在以下几章中，所谓线图指的就是无向线图。

1-2 路径和回路

如果一个顶点是一条边的两个端点之一，则称这条边与这个顶点关联（或连接）。例如，在图 1-2-1 所示的线图中，边 a ， b ， c 与顶点 A 关联（或连接），边 a ， d ， e ， f 与顶点 B 关联。

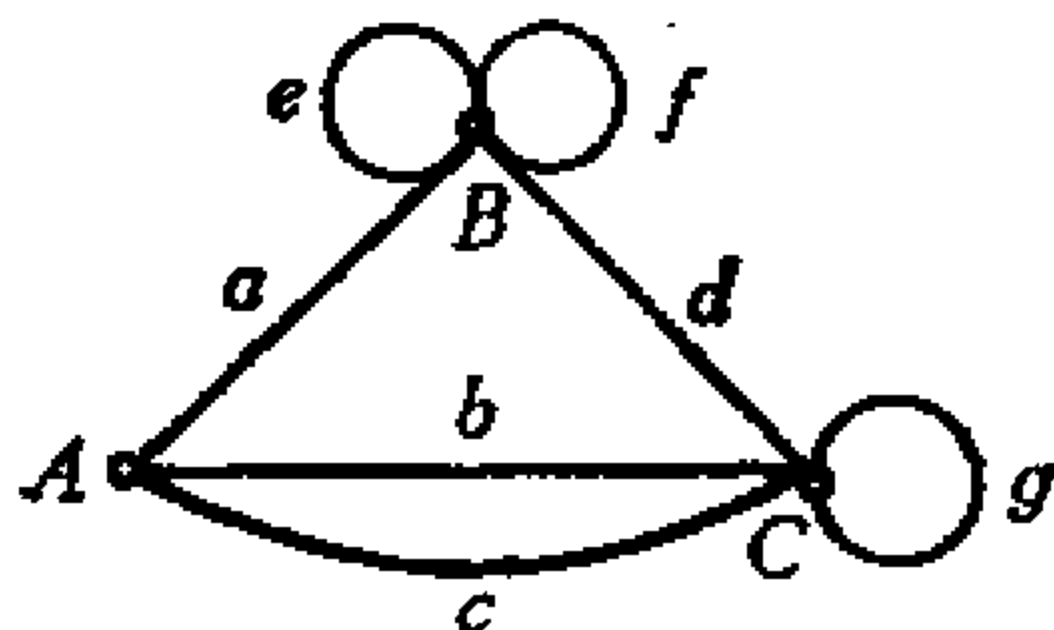


图1-2-1 一个带有自环的线图

为了表示象路径、回路和欧拉图这样一些线图的特征，与每一个顶点相关联的边的数目是非常重要的。因此，我们定义顶点的度如下。

定义1-2-1 一个顶点 v 的度记作 $d(v)$ ，定义为

$$d(v) = 2n_i + n_e \quad (1-2-1)$$

其中 n_i 是与顶点 v 关联的自环数， n_e 是除自环外与顶点 v 关联的边数。

例如，在图1-2-1所示的线图中，顶点 A 的度 $d(A) = 3$ ，因为对顶点 A 来说， $n_i = 0$ ， $n_e = 3$ 。顶点 B 的度 $d(B) = 2 \times 2 + 2 = 6$ ，这里 $n_i = 2$ ， $n_e = 2$ 。顶点 C 的度 $d(C) = 5$ 。

假定边 e 连接顶点 p 和 q （即边 e 的两个端点是 p 和 q ），则当 $p \neq q$ 时，对 $d(p)$ 和 $d(q)$ 来说，边 e 都只计算一次。而当 $p = q$ 时，边 e （在这里是自环）对 $d(p)$ 就要计算两次。这对线图上的每一条边都适用。因此，一个线图中所有顶点的度的总和等于边数的两倍，即

$$\sum_{v \in G} d(v) = 2n_e \quad (1-2-2)$$

其中 $\sum_{v \in G}$ 表示对线图 G 的所有顶点求和， n_e 是 G 中边的数目。例

如，在图1-2-2中， $d(A) = 3$ ， $d(B) = 2$ ， $d(C) = 3$ ， $d(D) = 2$ ， $d(E) = 4$ ，于是 $\sum_{i \in G} d(i) = 14$ 。在这个线图中边数为7。

把图1-2-2中的线图看作一幅地图，其中顶点代表城市，边代表公路。我们可以看出，从一个城市到另一个城市有好几条路可走。假定我们打算从A城到D城去旅行。如果我们把从A城到D城旅行所经过的道路按次序排

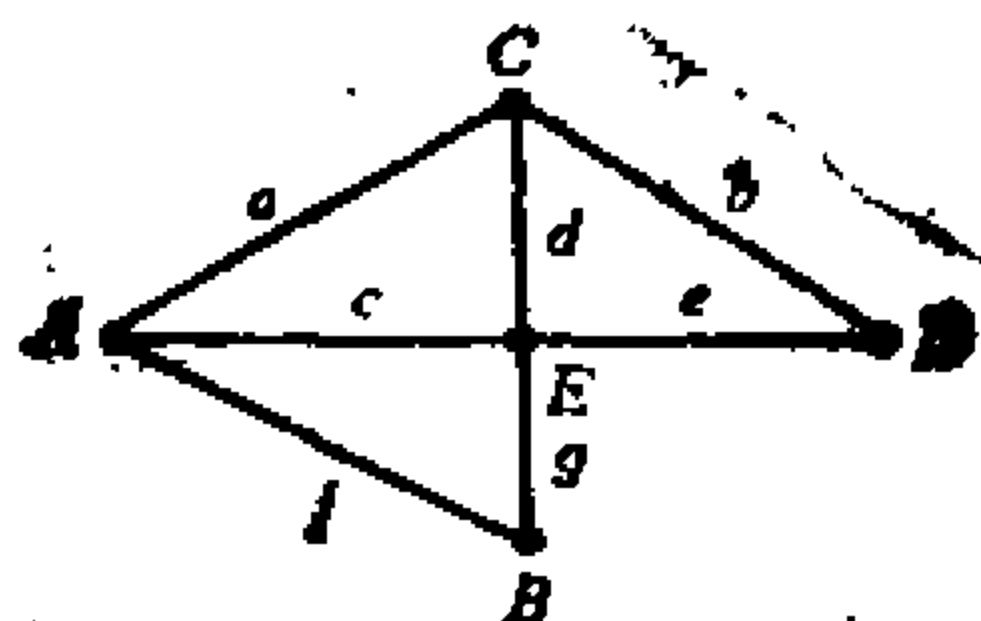


图1-2-2 一个线图

出来，就得到一个边的序列，它表明了从A到D的一条特定路线。与出发点对应的顶点称为始点，与目的地对应的顶点称为终点。例如，在图1-2-2所示的线图中，以A为始点，D为终点的一些边序列是(c, e)，(a, d, c, f, g, e)以及(c, d, b)。必须注意，在所讨论的序列中，每一条边都有一个顶点和前一条边是公有的，而另一个顶点和后一条边公有。例如，在序列(c, d, b)中，边d的顶点E是前一条边c的一个端点，而边d的另一顶点C是后一条边b的一个端点。若在这样的序列中，每一条边只出现一次，则称此序列为边列。

定义1-2-2 具有下列性质的边的序列称为边列：

1. 除了序列的第一条边和最后一条边外，序列中任一条边e都有一个端点是前一条边的端点，另一个端点是后一条边的端点。
2. 第一条边的一个端点是始点，另一个端点是后一条边的端点。
3. 最后一条边的一个端点是前一条边的端点，另一个端点是终点。
4. 每一条边恰好出现一次。

定义1-2-3 如果一个边列的始点和终点不同，则称此边列为开边列。否则称之为闭边列。

例如，在图1-2-2中， $(c d b e g)$ 是一个开边列，其始点和终点分别为 A 和 B 。序列 $(a d e b d g)$ 不是一个边列，因为边 d 出现了两次。 $(a d c)$ 是一个闭边列。注意，序列 $(c f g d b e)$ 是一个闭边列，而 $(a c d b e d)$ 不是闭边列。

定义1-2-4 由一个边列的所有边组成的线图称为与此边列对应的线图。

例如，与边列 $(a d g f c e)$ 对应的线图如图 1-2-3 所示。

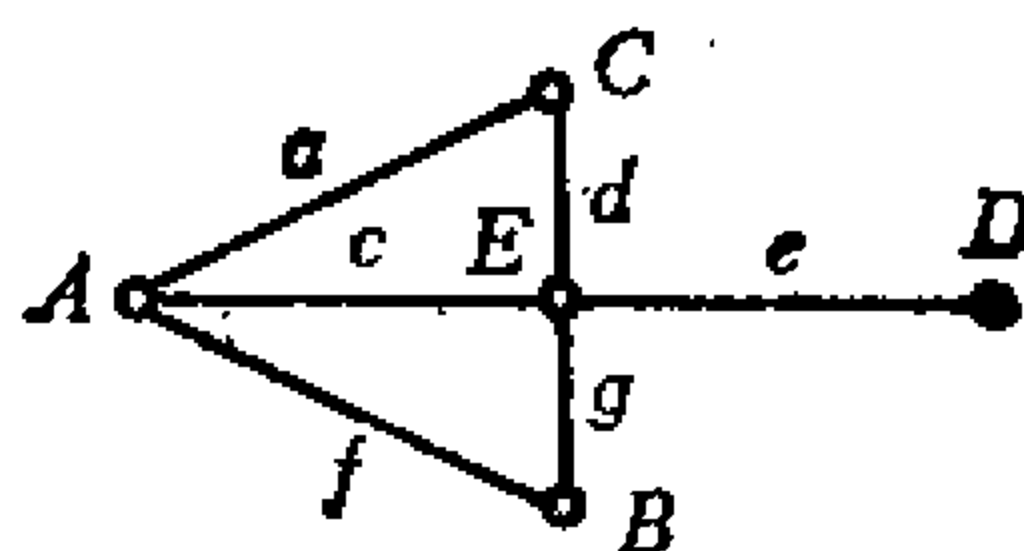


图1-2-3 与 $(a d g f c e)$ 对应的线图

定义1-2-5 边列中一个顶点的度，指的是在与此边列对应的线图中该顶点的度。

例如，在边列 $(a d g f c e)$ 中，顶点 C 的度是 2，顶点 E 的度是 4。

如果一个开边列具有这样的性质：除了始点和终点外，每一个顶点的度均为 2，而始点和终点的度为 1，则称此边列中所有边的集合为始点和终点间的一条路径。

定义1-2-6 顶点 p 和 q 之间的一条路径，是一个满足以下条件的开边列中所有边的集合：（1）其始点和终点分别为 p 和 q ；（2）除 p 和 q 外，每一个顶点的度为 2，而 p 和 q 的度为 1。

例如，在图1-2-2中，边列 $(a d e)$ 的所有边的集合是顶点 A 和 D 之间的一条路径，而边列 $(a d g f c e)$ 中所有边的集合

不是一条路径。

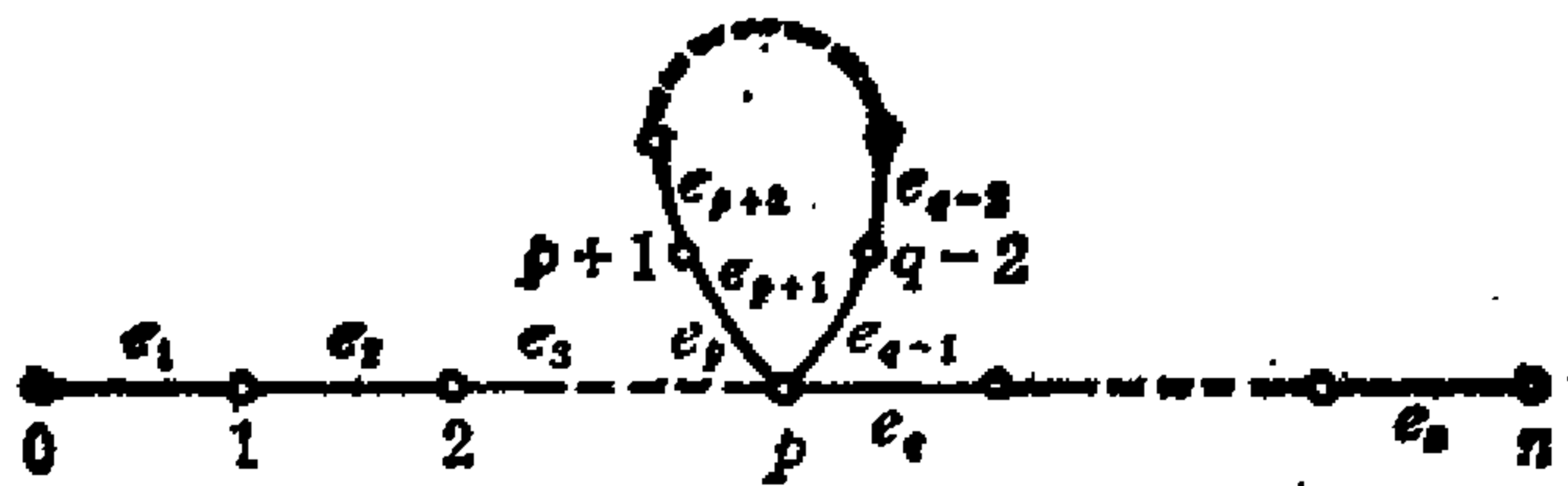


图1-2-4 与边列 $(e_1e_2\cdots e_n)$ 对应的线图

设一个边列为 $(e_1e_2\cdots e_n)$ ，如图1-2-4所示。假定这个边列中所有边的集合不是介于顶点0和 n 之间的一条路径，则由路径的定义可知，必至少有一个顶点的度大于2。设顶点 p 是一个度大于2的顶点。假定这个边列中以 p 为端点的第一条边是 e_p ，而以 p 为端点的最后一条边是 e_q ，如图1-2-4所示，则可看出，序列 $(e_1e_2\cdots e_pe_q\cdots e_n)$ 是一个边列。在此边列中，顶点 p 的度是2。为了方便，如果边列 T 的每一条边都在边列 U 中，并且 T 和 U 是不同的，则称边列 T 是边列 U 的真子边列。用这样的术语来说， $(e_1e_2\cdots e_pe_qe_{q+1}\cdots e_n)$ 就是 $(e_1e_2\cdots e_n)$ 的真子边列。并且，为得到这个子边列而删去的那些边，形成了一个闭边列 $(e_{p+1}e_{p+2}\cdots e_{q-2}e_{q-1})$ 。因此，一个不构成路径的开边列可以分解为两部分，一部分是一个闭边列；另一部分是一个开边列，它与原来的开边列具有相同的起点和终点，并且原边列的每一条边都必然在且只能在这两个新边列之一中。

如果边列 $(e_1e_2\cdots e_pe_q\cdots e_n)$ 中还有度超过2的顶点，我们可以采用同样的方法，得到一个真子列，使该顶点在此真子列中的度减少到2。如此类推，最后我们可以得到一个开边列，其始点和终点与原边列相同，而这一边列中所有边的集合是一条路径。这样，就得到定理1-2-1。

定理1-2-1 设一个开边列的始点为 p ，终点为 q 。如果这

个开边列中所有边的集合不是顶点 p 和 q 之间的一条路径，则可将此边列分解为一个开边列和一些闭边列，使得：（1）原来边列的每一条边恰在这些边列之一中；（2）所得开边列中所有边的集合是顶点 p 和 q 之间的一条路径。

例如，在图 1-2-2 中，开边列 $(a\ d\ g\ f\ c\ e)$ 可以分解为一个开边列 $(a\ d\ e)$ 和一个闭边列 $(g\ f\ c)$ 。注意，开边列 $(a\ d\ e)$ 中所有边的集合是 A 和 D 之间的一条路径。

定义1-2-7 如果线图 G' 仅由属于线图 G 的边和顶点组成，则称 G' 是 G 的子图。如果子图 G' 与 G 不相同，则称 G' 是 G 的真子图。

例如，我们看图 1-2-2 中的线图 G 和图 1-2-5 (a)，(b) 中的线图 G' ， G'' 。线图 G' 是 G 的真子图，但 G'' 不是 G 的子图，因为 G'' 的边 h 不在 G 中。

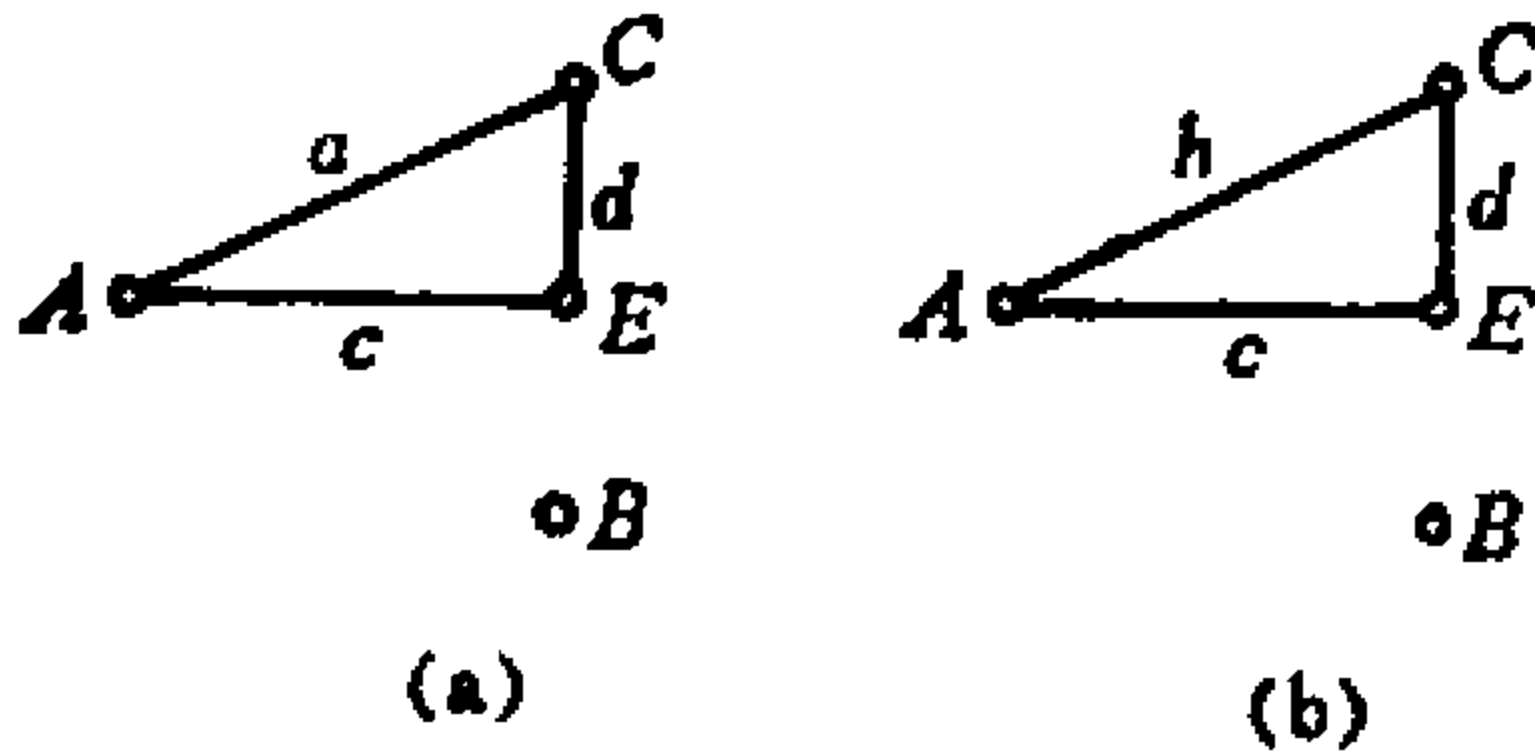


图1-2-5

(a) 线图 G' ， (b) 线图 G''

定义1-2-8 度为零的顶点称为孤立点。

在许多场合，把边的一个集合看作一个线图是方便的。相反，也有这样的情况，把一个线图当作一个边的集合，更方便些。因此，我们有如下定义。

定义1-2-9 由一个边集合的所有边，以及作为这些边的端点的所有顶点构成的线图，叫做与这个边集合对应的线图。一个线图的所有边的集合，叫做与这个线图对应的边集合。

当我们把一个边集合当作线图来对待时，也就是在考虑与这个边集合对应的线图。例如，根据定义，路径是边的一个集合。但是，我们常常把一条路径看作一个线图。相反，当我们把一个线图当作一个边集合时，也就是在考虑与这个线图对应的边集合。要注意的是，如果一个线图包含孤立点，与这个线图对应的边集合不能表明孤立点的存在。因此，通常只把那些不包含孤立点的图当作边集合对待。例如，若把图 1-2-2 中的线图看作边集合 (a, b, c, d, e, f, g) ，就不能提供关于这个线图顶点的任何信息。

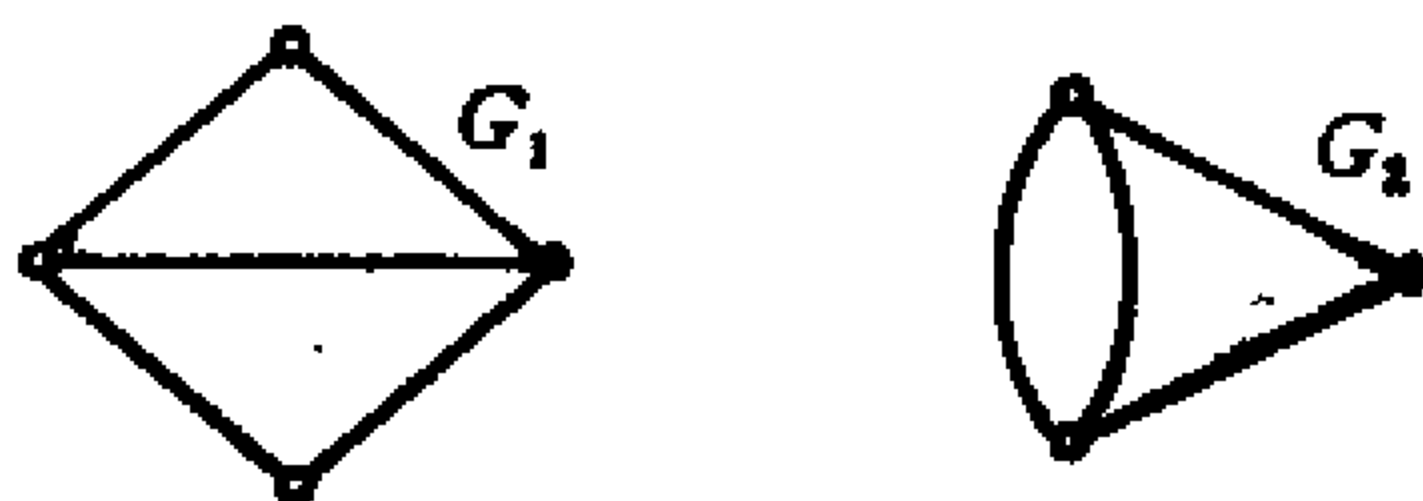


图1-2-6 包含两个子图 G_1 和 G_2 的线图

图1-2-6所示的线图由两个子图 G_1 和 G_2 组成。我们注意到，在 G_1 的一个顶点和 G_2 的一个顶点之间，没有连接的边。因此， G_1 的一个顶点和 G_2 的一个顶点之间没有路径。这样的线图叫做分离线图。

定义1-2-10 如果一个线图中存在两个顶点，在它们之间没有路径，则说此线图是分离的，或称为分离图。如果一个线图不是分离的，则说它是连通的，或称为连通线图。

图 1-2-2 中的线图是连通的，因为其中任何两个顶点之间都有路径。有一种特殊的连通子图称为回路，是一种重要的子图。我们将在后面研究回路的性质。不过，现在给出回路的定义比较方便。

定义1-2-11 如果一个连通线图中每一个顶点的度都是 2，则称此线图为回路。

从这个定义可以看出，如果一个闭边列中每一个顶点的度都

是 2，那么这个闭边列的所有边的集合是一个回路。例如，在图 1-2-2 中，闭边列 $(a\ c\ d)$ 中所有边的集合是一个回路，而闭边列 $(f\ g\ e\ b\ d\ c)$ 中所有边的集合不是回路（这里把回路看作边的集合，见定义 1-2-9）。设 T 是一个闭边列， T 中所有边的集合不是一个回路。用前面分解开边列所用的方法，容易证明， T 可以分解为若干闭边列 T_1, T_2, \dots ，使得：（1） T 中每一条边正好在 T_1, T_2, \dots 之一中；（2）在 T_1, T_2, \dots 中，每一个闭边列的所有边的集合是一个回路。下面，我们来定义回路的无重边并。

定义 1-2-12 在一个回路的集体中，如果任何两个回路都没有公共边，则称此集体为回路的无重边并（集）（*edge disjoint union of circuits*）。

现在我们可以说，一个闭边列中所有边的集合，或者是一个回路，或者是一个回路的无重边并。例如，在图 1-2-2 中，边列 $(f\ g\ e\ b\ d\ c)$ 中所有边的集合不是一个回路，而是回路 $(f\ g\ c)$ 和 $(b\ d\ e)$ 的无重边并。可能有这样的边集合，它分解成回路的方法不是唯一的。但是，如果至少有一种方法，可以把这个集合分解成若干回路，其中任何两个都没有公共边，则此边集合就是回路的无重边并。例如，图 1-2-7 中边集合 (a, b, c, d) 是回路的无重边并，而图 1-2-8 中边集合 (a, b, c, d, e) 不是回路的无重边并。

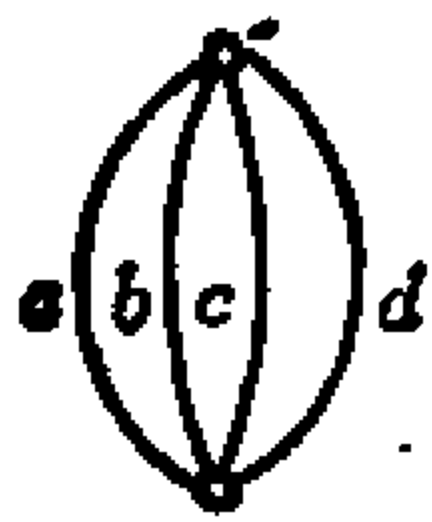


图 1-2-7 回路的无重边并

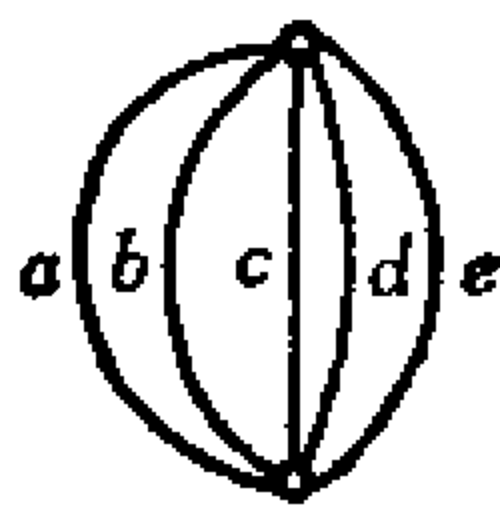


图 1-2-8 线图

设 G_1 和 G_2 是一个线图的两个子图，并设它们没有孤立点。把 G_1 和 G_2 都看成集合，我们就可以采用运算，比如 \cup （并）， \cap

(交), \oplus (环和), $-$ (减) 等。也就是:

$G_1 \cup G_2$: G_1 或 G_2 中所有的边组成的线图。

$G_1 \cap G_2$: 既在 G_1 中又在 G_2 中的边 (通常叫做 G_1 和 G_2 的公共边) 的全体组成的线图。

$G_1 - G_2$: 从 G_1 中删去那些也属于 G_2 的边得到的子图。

$G_1 \oplus G_2 = (G_1 \cup G_2) - (G_1 \cap G_2) = (G_1 - G_2) \cup (G_2 - G_1)$
(1-2-3)

其中“ \approx ”表示恒等。

例1-2-1 在图1-2-9中, 两个线图 G_1 和 G_2 如 (1) 所示;

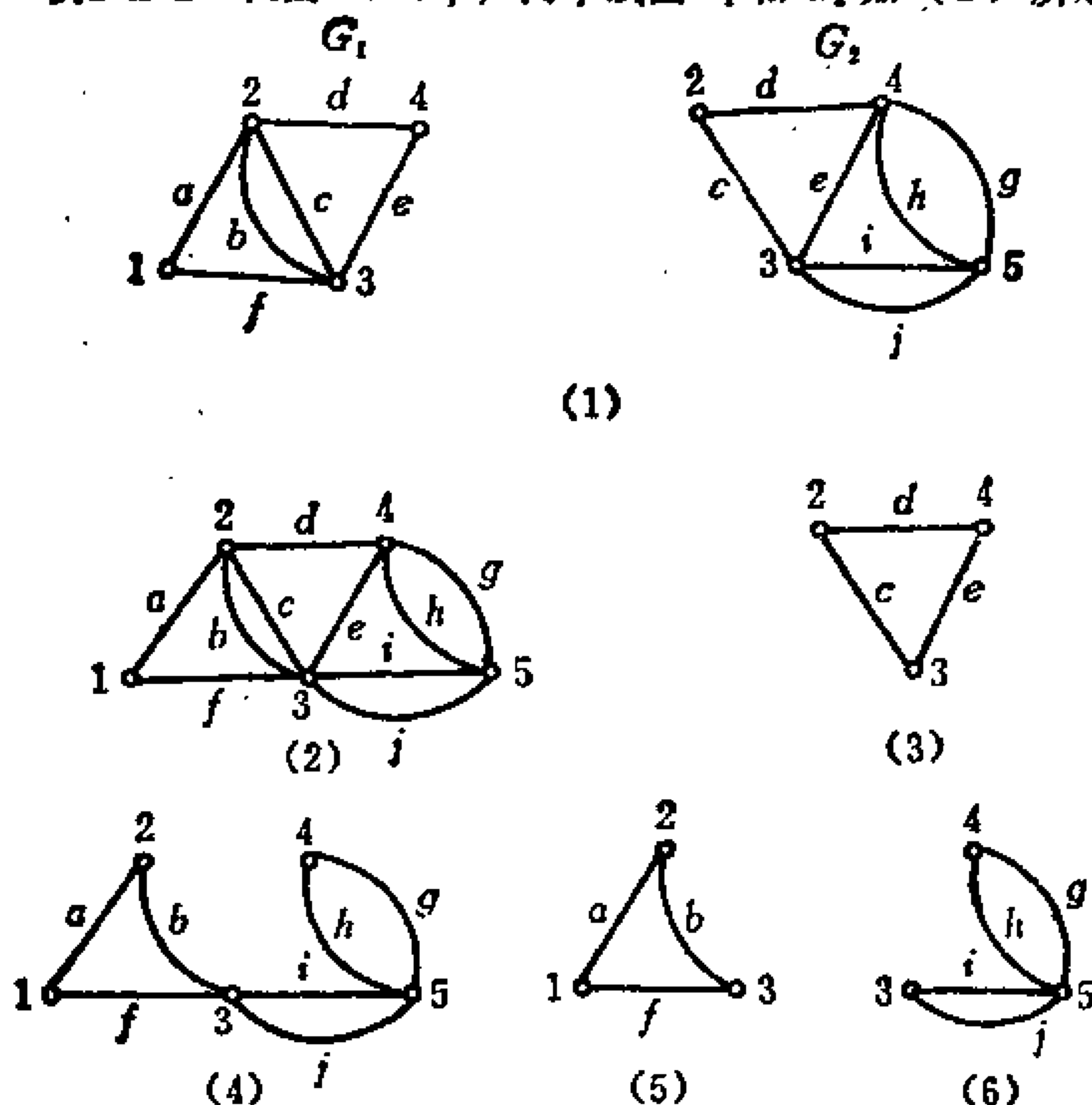


图1-2-9 线图和运算

(1) G_1 和 G_2 , (2) $G_1 \cup G_2$, (3) $G_1 \cap G_2$,
(4) $G_1 \oplus G_2$, (5) $G_1 - G_2$, (6) $G_2 - G_1$

G_1 和 G_2 的并用 $G_1 \cup G_2$ 表示, 如(2)所示, 这里要注意, 我们是把集合 $G_1 \cup G_2$ 看作一个线图, 以便用图形将它表示出来; G_1 和 G_2 的交记作 $G_1 \cap G_2$, 如(3)所示; G_1 和 G_2 的环和记作 $G_1 \oplus G_2$, 如(4)所示; 从 G_1 中减去 G_2 , 记作 $G_1 - G_2$, 如(5)所示; 而 $G_2 - G_1$ 如(6)所示.

1-3 欧拉图

假定在一个线图 G 中, 每一条边代表一条公路. 如果有这样一个闭边列, 它包含了 G 中每一条边, 那么这个闭边列就表示一条连续的路线, 它正好经过每条公路一次, 最后回到出发点. 哪一种线图中才有这样的闭边列呢?

在上一节里, 我们已经发现, 一个闭边列或者是一个回路, 或者是回路的无重边并. 因此, 如果一个连通线图是一个回路, 或者是回路的无重边并, 就有一个包含此线图所有边的闭边列. 那么, 怎样才能检验一个连通线图是不是回路或回路的无重边并呢? 例如, 图1-3-1中的线图是一个回路或回路的无重边并吗? 当然, 要回答这个问题, 一种方法是通过实际试验, 在所给线图中找出一个包含其所有边的闭边列. 这里, 我们要研究另一种方法, 它只需要检查顶点的度, 就可以回答上面的问题. 为此, 我们定义欧拉图如下.

定义1-3-1 如果一个线图的每一个顶点的度都是偶数, 则称此线图为欧拉图.

因为回路是由度为2的顶点构成的, 所以回路是欧拉图. 我们来考虑回路的无重边并. 假定顶点 v 至少位于这些回路之一

中, 由于每一条边只能在一个回路中, 故顶点 v 的度等于包含 v

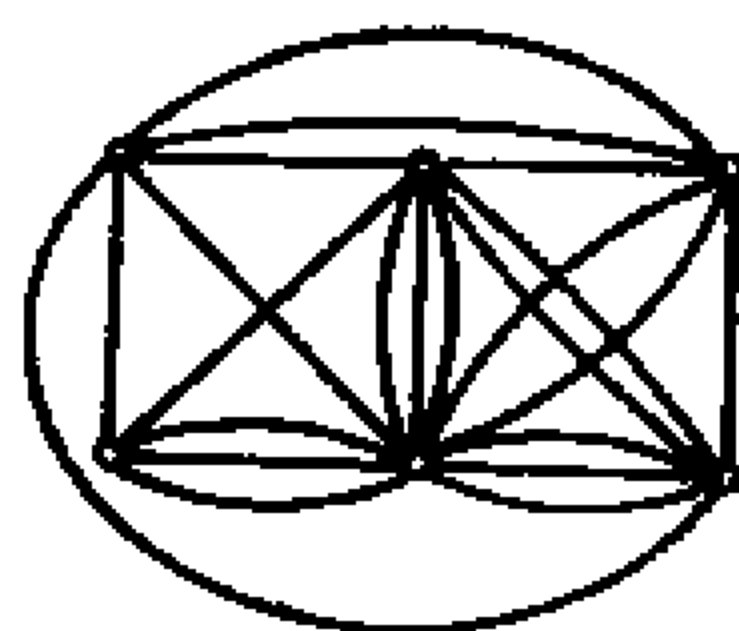


图1-3-1 一个线图

的回路数的两倍。因此顶点 v 的度是偶数。这个结论适用于回路的无重边并中任何一个顶点。所以回路的无重边并是一个欧拉图。

定理1-3-1 一个闭边列中所有边的集合是一个欧拉图。

我们来说明这个定理的逆命题。也就是说，我们希望了解，是否存在由欧拉图的所有边组成的一个闭边列。显然，如果一个欧拉图是分离的，就不存在这样的闭边列。因此，我们假设所给的欧拉图 E 是连通的。由于欧拉图 E 的每一个顶点的度都是偶数，故与任一顶点连接的边至少有两条。因此，从任一顶点出发，都可以找到一个闭边列。设这个闭边列中所有边的集合是 E_1 。注意， E_1 是一个欧拉图。显然 $E - E_1$ 也是一个欧拉图。于是，只要 $E - E_1$ 不是空集，我们就可以在 $E - E_1$ 中找出另一个闭边列。设这个闭边列中所有边的集合是 E_2 ，则 $E - E_1 - E_2$ 仍然是一个欧拉图。如此类推，可以得到欧拉图 E_1, E_2, \dots, E_n 的一个集合，使得 E 的每一条边正好在 E_1, E_2, \dots, E_n 之一中（见例1-3-1）。

现在，我们把这些闭边列 E_1, E_2, \dots, E_n 按如下方法结合在一起：从 E_1, E_2, \dots, E_n 中任取一个，比如说 E_1 。由于 E 是连通的，在 E_2, E_3, \dots, E_n 中至少存在一个 E_p ，使得 $E_1 \cup E_p$ 是连通的。这就是说，至少存在一个顶点，它既在 E_1 中，又在 E_p 中。设 v 是既在 E_1 中，又在 E_p 中的一个顶点。我们注意到，如果 $T = (e_1 e_2 \cdots e_p \cdots e_r)$ 是一个闭边列，那么对任一条边 e_p 来说， $(e_p e_{p+1} \cdots e_r e_1 e_2 \cdots e_{p-1})$ 也是一个闭边列。因此， T 中任一顶点都可以作为这个闭边列的始点。由于假设 v 既在 E_1 中，又在 E_p 中，我们可以把 v 作为闭边列 E_1 和 E_p 的公共始点。设闭边列 E_1 和 E_p 分别为 $(e_1 e_2 \cdots e_m)$ 和 $(f_1 f_2 \cdots f_n)$ ，它们都以 v 为始点，则 $(e_1 e_2 \cdots e_m f_1 f_2 \cdots f_n)$ 是一个由 $E_1 \cup E_p$ 的所有边组成的闭边列。此外，在 $E_2, E_3, \dots, E_{p-1}, E_{p+1}, \dots, E_n$ 中，必至少存在一个欧拉图 E_q ，使得 $E_1 \cup E_p \cup E_q$ 是连通的。如此类推，最后可以得到一个由所给欧拉图 E 的所有边组成的闭边列。这样就证明了，对于一个连通

的欧拉图来说，存在一个包含该欧拉图的所有边的闭边列。

定理1-3-2 一个线图是连通的欧拉图，当且仅当存在一个由该线图的所有边组成的闭边列。

例1-3-1 设图1-3-2(a)是一个给定的欧拉图 E 。假定我们从顶点1出发，得到一个闭边列 $(a b g e)$ ，则 $E - E_1$ 如图1-3-2(b)所示，其中 $E_1 = (a, b, g, e)$ 。假定我们从 $E - E_1$ 中，

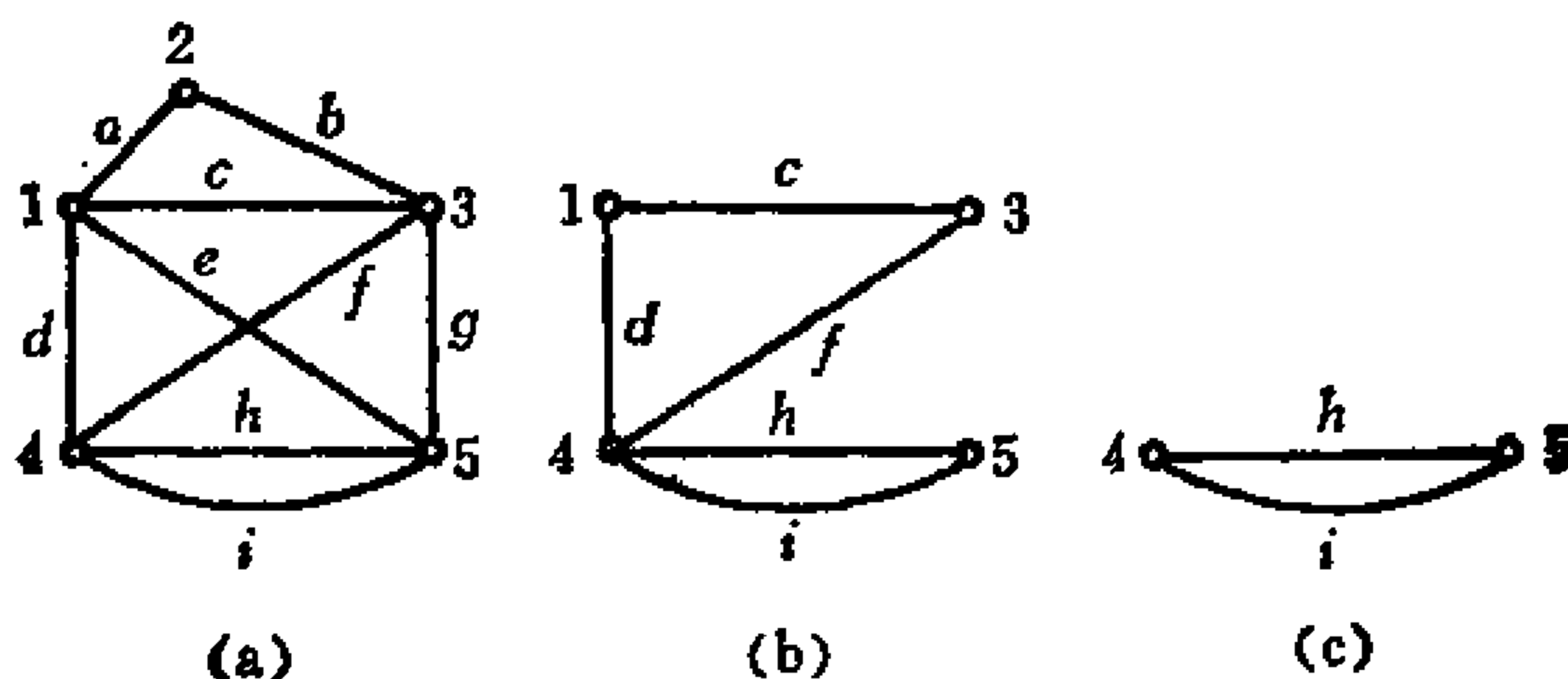


图1-3-2 欧拉图 E 及子图

(a) 欧拉图 E , (b) $E - E_1$, (c) $E - E_1 - E_2$

又组成一个闭边列 $(c d f)$ ，则 $E - E_1 - E_2$ 就如图1-3-2(c)所示，其中 $E_2 = (c, d, f)$ 。最后一个闭边列是 $(h i)$ 。现在来找出我们所要求的，由 E 中所有边构成的闭边列。 $E_1 \cup E_2$ 是连通的，因此至少有一个顶点既在 E_1 中，又在 E_2 中。我们取这样一个顶点3。然后，可以将闭边列 E_1 转动成 $(g e a b)$ ，使顶点3变成它的始点。注意， $(c d f)$ 的始点也是顶点3。于是我们可以把它们结合成 $(g e a b c d f)$ ，从而得到一个由 $E_1 \cup E_2$ 中所有边组成的闭边列。类似地，取顶点5作为 $E_1 \cup E_2$ 和 $E_3 = (h i)$ 的公共顶点，将 $(g e a b c d f)$ 转成 $(e a b c d f g)$ ，使这个闭边列的始点变成顶点5，即可把 $(e a b c d f g)$ 与 $(h i)$ 结合成 $(h i e a b c d f g)$ ，这就是所求的闭边列。

通常,一个线图可以以若干个欧拉图为其子图.例如,图1-3-2所示线图的子图,不仅有 $E_1 = (a, b, e, g)$, $E_2 = (c, d, f)$, $E_3 = (h, i)$, 还有另外几个欧拉图,如 $E_4 = (a, b, c)$, $E_5 = (c, e, g, h, i)$, $E_6 = (c, e, g)$, 也是它的子图.欧拉图有一个重要的性质, 既它们构成一个阿贝尔群.因此,一个线图中所有的欧拉图,可以由几个称为生成元的欧拉图的组合算出.为了说明这一点,我们来考查两个欧拉图的环和.

设欧拉图 E_1 和 E_2 是同一线图的两个子图.考虑线图 $E_1 \oplus E_2$, 其中 $E_1 \neq E_2$. 为了确定 $E_1 \oplus E_2$ 中每一个顶点的度, 我们设 $e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1r}$ 是 E_1 中与顶点 p 关联的边, 又设 $e_{21}, e_{22}, \dots, e_{2s}$ 是 E_2 中与顶点 p 关联的边. 不失一般性, 设 $e_{11} = e_{21}, e_{12} = e_{22}, \dots, e_{1t} = e_{2t}$, 而 $e_{1t+1}, e_{1t+2}, \dots, e_{1r}$ 和 $e_{2t+1}, e_{2t+2}, \dots, e_{2s}$ 都不相同. 因此, 在 $E_1 \oplus E_2$ 中, 只有边 $e_{1t+1}, e_{1t+2}, \dots, e_{1r}, e_{2t+1}, e_{2t+2}, \dots, e_{2s}$ 与顶点 p 关联. 这样, 在 $E_1 \oplus E_2$ 中, 顶点 p 的度是 $r + s - 2t$. 因为 E_1 和 E_2 是欧拉图, 故 r 和 s 是偶数, 所以 $r + s - 2t$ 是偶数. 对于 $E_1 \oplus E_2$ 中每一个顶点的度, 这个结论都成立, 因此 $E_1 \oplus E_2$ 是一个欧拉图. 例如, 图1-2-9(1)中的 G_1 和 G_2 是欧拉图, 图1-2-9(4)中的 $G_1 \oplus G_2$ 也是一个欧拉图.

我们把空集 (记作 ϕ) 定义为一个欧拉图. 这样, 要使 $E_1 \oplus E_2$ 是欧拉图, 就不必再规定 $E_1 \neq E_2$ 了. 注意, 空集是一个不含边的线图. 因此, 我们得到定理1-3-3.

定理1-3-3 设 E_1 和 E_2 是一个线图的两个欧拉图, 则 $E_1 \oplus E_2$ 是一个欧拉图.

把这个定理推广, 就得到定理1-3-4.

定理1-3-4 设 $E_p (p = 1, 2, \dots, n)$ 是一个线图中的 n 个欧拉图, 则 $E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$ 是一个欧拉图.

为了方便, 我们定义符号 $\{E\}$ 如下.

定义1-3-2 符号 $\{E\}$ 表示一个线图的子图中所有欧拉图的

集体。

由定理1-3-3和1-3-4可以看出，集体 $\{E\}$ 满足以下条件：

1. 若 E_i 和 E_j 在 $\{E\}$ 中，则 $E_i \oplus E_j = E_j \oplus E_i$ 在 $\{E\}$ 中。

2. 存在 $E_0 (= \phi)$ ，使得对于 $\{E\}$ 中任何 E_i ，都有

$$E_0 \oplus E_i = E_i$$

3. 对 $\{E\}$ 中任一 E_i ，

$$E_i \oplus E_i = E_0$$

4. 对 $\{E\}$ 中任何 E_i ， E_j 和 E_k ，

$$E_i \oplus (E_j \oplus E_k) = (E_i \oplus E_j) \oplus E_k$$

这样，就导出了定理1-3-5。

定理1-3-5 一个线图上的集体 $\{E\}$ ，在环和运算下是一个阿贝尔群。

这个定理表明，在 $\{E\}$ 中存在若干生成元， $\{E\}$ 中所有的欧拉图都可以由这些生成元的环和得到。

例1-3-2 考虑图1-3-3所示的线图。由 E_1 ， E_2 和 E_3 所组成的生成元集合如图1-3-4所示。

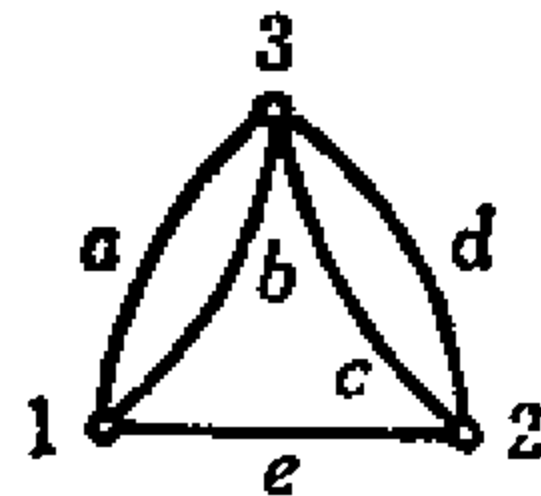


图1-3-3 一个线图

由这个生成元集合，可以得到其余所有的非空欧拉图：

$$E_1 \oplus E_2 = E_7$$

$$E_1 \oplus E_3 = E_4$$

$$E_2 \oplus E_3 = E_6$$

$$E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 = E_5$$

关于 $\{E\}$ 的性质，以及如何得到 $\{E\}$ 中生成元的集合，将在

以后研究。这里只需注意一点，就是存在一种生成线图中所有欧拉图的简单算法。

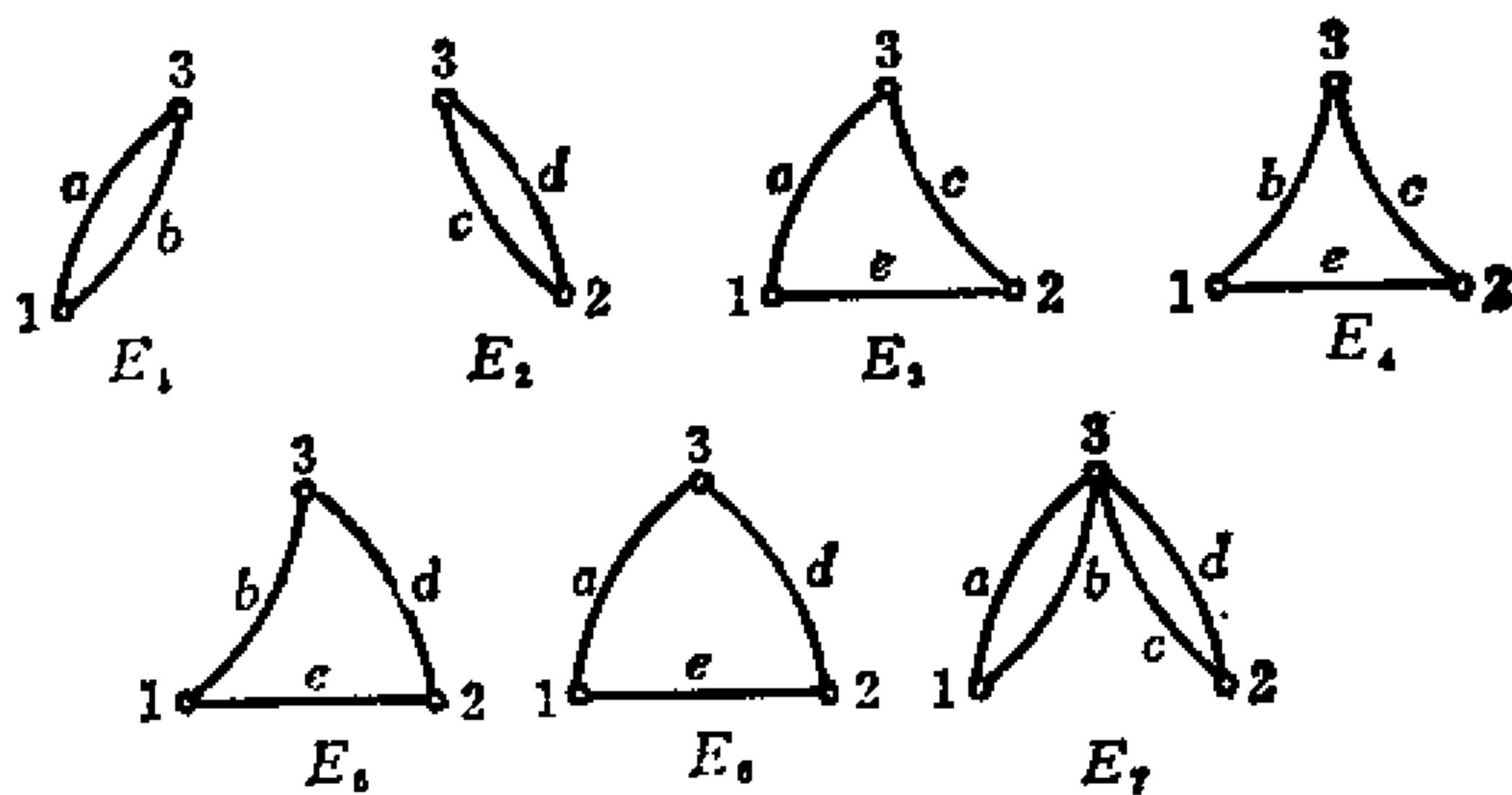


图1-3-4 图1-3-3中线图的 $\{E\}$

为了讨论分离的欧拉图，我们定义“最大连通子图”如下。

定义1-3-3 设 g_1, g_2, \dots, g_ρ 是线图 G 的 ρ 个连通子图（根据定义，一个孤立点也是一个连通子图），且 G 的每条边和每个顶点恰好含于这些子图之一中，则连通子图 g_1, g_2, \dots, g_ρ 的集合就是 G 的最大连通子图集合 (set of maximal connected sub-graphs). 称数 ρ 为线图 G 的最大连通子图数。

应该注意的是，对于任何两个不同的最大连通子图 g_i 和 g_j 来说， $g_i \cup g_j$ 是分离的。例如，在图1-3-5(a)所示的线图中，有五个最大连通子图，如图1-3-5(b)所示，因此 $\rho = 5$ 。不难看出，如果一个线图 G 是连通的，就只有一个最大连通子图。因此可以说，一个线图是连通的，当且仅当 $\rho = 1$ 。

我们已经知道，一个闭边列中所有边的集合是一个回路或回路的无重边并。并且，我们还知道，对于任何一个连通的欧拉图，都存在一个包含其所有边的闭边列。此外，欧拉图的每一个最大连通子图显然仍是一个欧拉图。

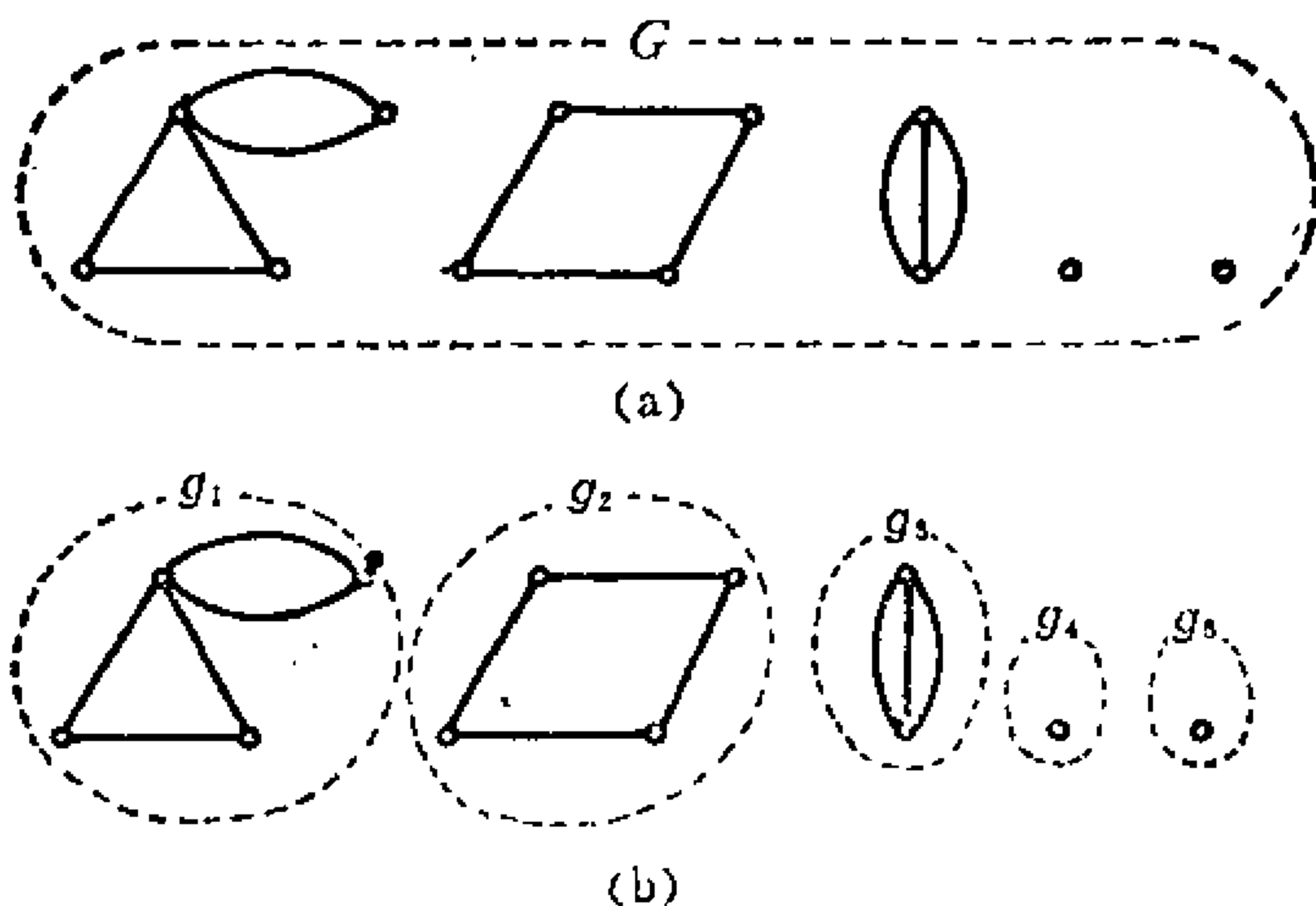


图1-3-5 最大连通子图
(a) 线图 G ; (b) G 的最大连通子图

定理1-3-6 任一欧拉图或者是一个回路，或者是回路的无重边并，而集体 $\{E\}$ 是一个线图中所有的回路，回路的无重边并以及空集的集体。

下面，我们来考查一对顶点之间的路径的某些性质。前面说过，在一条路径中，除始点和终点外，每一个顶点的度都是 2，而始点和终点的度是 1。下面的定理给出了路径的一个重要性质。

定理1-3-7 若 P_1 和 P_2 是同一对顶点之间的两条路径，则 $P_1 \oplus P_2$ 是一个欧拉图。

证明： 设 P_1 和 P_2 是线图 G 中顶点 i 和 j 之间的两条路径。我们在线图 G 中，加进一条以顶点 i 和 j 为端点的边 γ ，构成一个新的线图 G' 。注意， P_1 和 P_2 也是 G' 中的路径。现在来考虑 $P_1 \cup (\gamma)$ 和 $P_2 \cup (\gamma)$ 。 $P_1 \cup (\gamma)$ 是 P_1 中所有的边和边 γ 的集合，

$P_2 \cup (y)$ 是 P_2 中所有的边和边 y 的集合, 显然它们都是欧拉图。
 由定理1-3-3知, 这两个集合的环和

$$[P_1 \cup (y)] \oplus [P_2 \cup (y)] = P_1 \oplus P_2 \tag{1-3-1}$$

是一个欧拉图。因为 $P_1 \oplus P_2$ 的所有边都在 G 中, 所以 $P_1 \oplus P_2$ 是 G 中的一个欧拉图。
 (证毕)

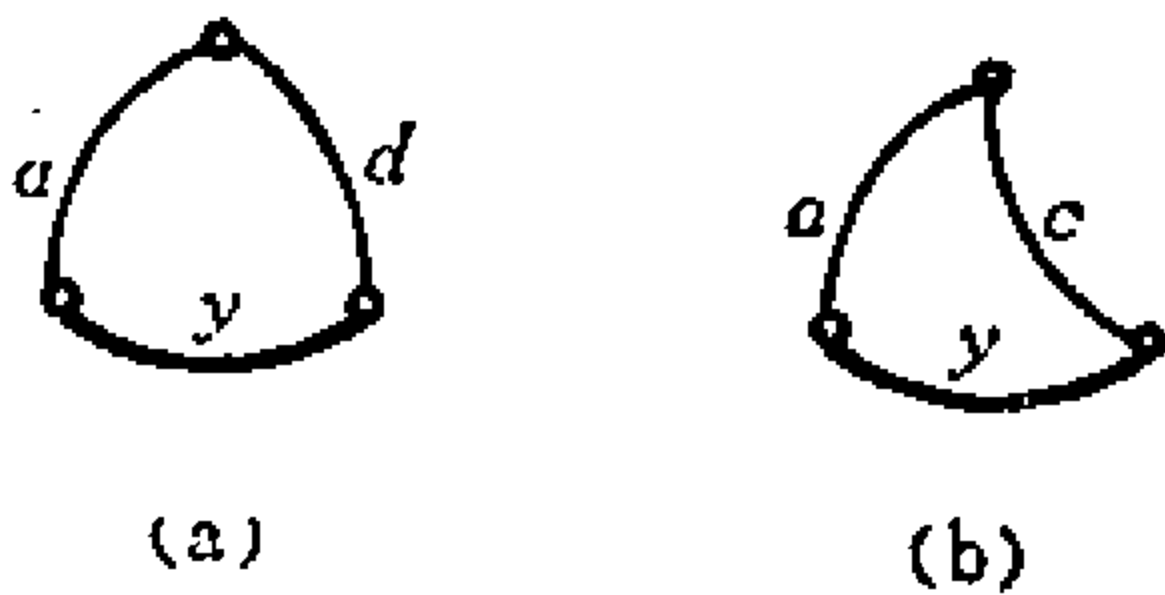


图1-3-6 线图
 (a) $P_1 \cup (y)$, (b) $P_2 \cup (y)$

例如, 在图 1-3-3 所示的线图 G 中, 设 $P_1 = (a, d)$, $P_2 = (a, c)$, 则 $P_1 \cup (y)$ 和 $P_2 \cup (y)$ 如图1-3-6(a)和(b)所示。我们注意到, 它们都是欧拉图, 边 y 不在 G 中, 而 $P_1 \oplus P_2 = (c, d)$ 是 G 中的欧拉图。

把上面这个定理推广, 就得到定理1-3-8。

定理1-3-8 若 $P_r (r = 1, 2, \dots, 2k)$ 是同一对顶点间的 $2k$ 条路径, 则 $P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_{2k}$ 是一个欧拉图。

证明: 我们有

$$\begin{aligned} &P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_{2k} \\ &= (P_1 \oplus P_2) \oplus (P_3 \oplus P_4) \oplus \dots \oplus (P_{2k-1} \oplus P_{2k}) \end{aligned}$$

由定理1-3-7知, $P_{i-1} \oplus P_i$ 是一个欧拉图, 又据定理 1-3-3, 若干个欧拉图的环和是一个欧拉图, 因此等式右边是一个欧拉图。
 (证毕)

例1-3-3 在图1-3-3所示的线图中, 顶点 1 和 2 之间所有可

能的路径如图1-3-7所示。我们得到

$$P_1 \oplus P_2 = E_6$$

$$P_2 \oplus P_3 = E_7$$

$$P_3 \oplus P_4 = E_1$$

$$P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \oplus P_4 = E_5$$

其中 E_6, E_7, E_1, E_5 如图1-3-4所示。但 $P_1 \oplus P_2 \oplus P_3$ 与所给的线图相同，它不是一个欧拉图。

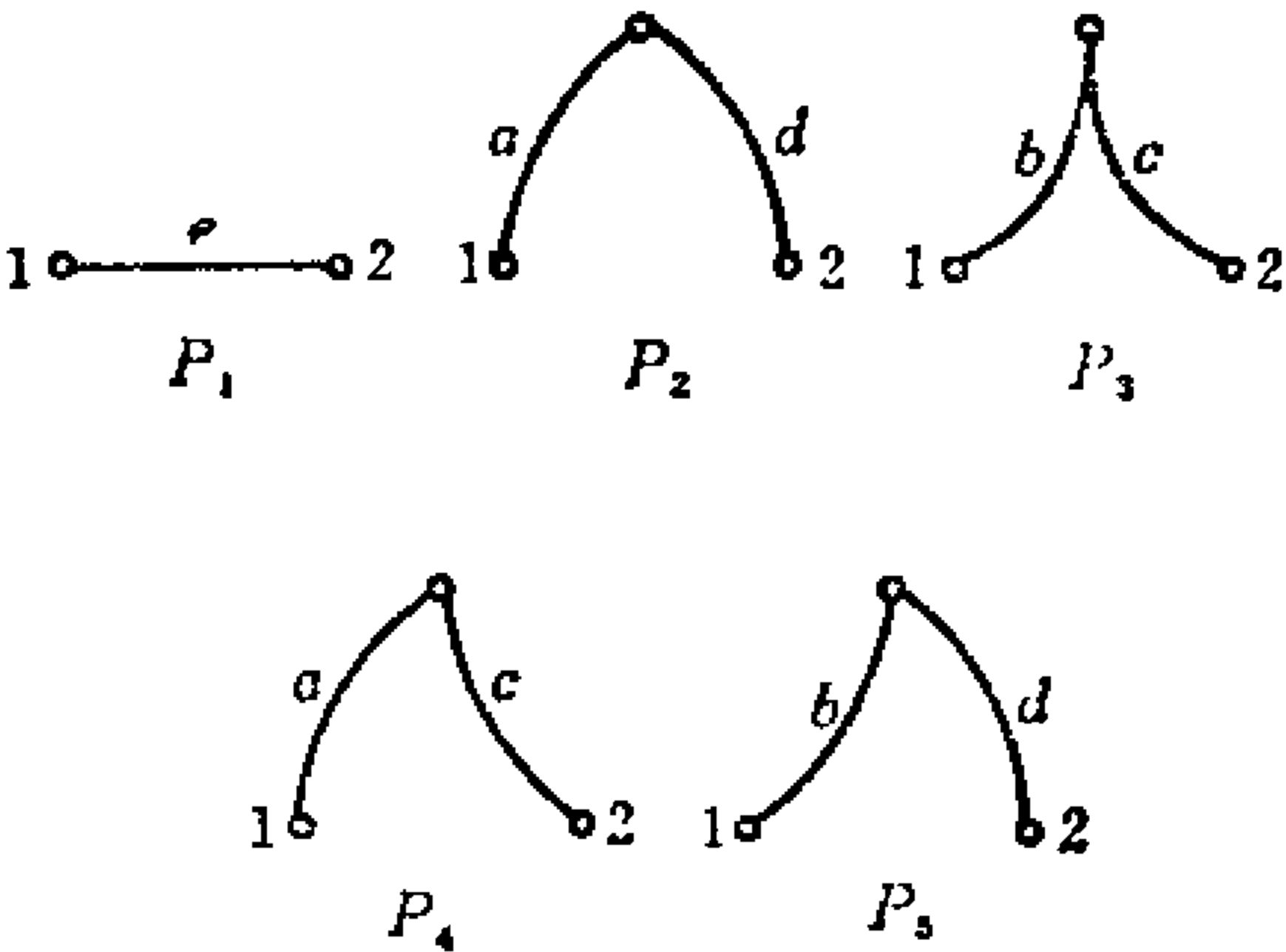


图1-3-7 顶点1和2之间的路径

1-4 M 图

我们已经知道，在两个指定顶点间的两条路径的环和是一个欧拉图。但是，一条路径和一个欧拉图的环和不一定是一条路径。因此，在环和运算下，所有的欧拉图以及两个指定顶点之间的所有路径组成的集体不一定构成一个群。这就说明，要得到两个指定顶点之间的所有路径，比上节所说的生成 $\{E\}$ 中所有的欧

拉图要困难得多。这里，我们引进 M 图，以使所有的欧拉图与两指定顶点间的 M 图的集体在环和运算下构成一个阿贝尔群。此外，我们还将看到，两指定顶点间所有路径的集体，包含在同一对顶点间所有 M 图的集体之中。

设 M ， P 和 E 都是一个线图 G 的子图，其中 P 是顶点 i 和 j 之间的一条路径， E 是一个欧拉图，而 M 等于 $P \oplus E$ 。现在我们来证明，在 M 中除顶点 i 和 j 外，每一个顶点的度都是偶数。而顶点 i 和 j 的度是奇数。

在所给的线图 G 中，加上一条以 i 和 j 为端点的边 γ ，设所得的新线图是 G' 。由于 γ 是新加进的边， G 中的欧拉图 E 不包含 γ ，所以边 γ 是在 $[P \cup (\gamma)] \oplus E$ 之中。容易看出， $P \cup (\gamma)$ 是 G' 中的一个欧拉图。据定理1-3-3， $[P \cup (\gamma)] \oplus E$ 是一个欧拉图。因此， $[P \cup (\gamma)] \oplus E$ 中每一个顶点的度都是偶数。从 $[P \cup (\gamma)] \oplus E$ 中删去 γ ，就得到 $P \oplus E = M$ 。由于 γ 的删除，使得顶点 i 和 j 的度 $d(i)$ 和 $d(j)$ 各减少了1，而不影响其余顶点的度。因此，我们可以断定， M 中除了两个顶点外，其余顶点的度都是偶数。我们称这样的线图为 M 图。

定义1-4-1 如果一个线图恰有两个顶点的度为奇数，则称此线图为 M 图。这两个度为奇数的顶点称为 M 图的端点。

设 i 和 j 是一个 M 图中两个度为奇数的顶点。在此 M 图中，加进一条以 i 和 j 为端点的新边。于是每一个顶点的度都变成了偶数，从而得到一个欧拉图。因此，一个 M 图可以看作是从一个欧拉图中删去一条边得到的。 M 图的性质之一如下。

定理1-4-1 存在包含一个连通 M 图的所有边的开边列。

证明： 设 M 是一个连通的 M 图， i 和 j 是它的两个端点。设 γ 是一条以 i 和 j 为端点而不在 M 中的边，则 $M \cup (\gamma)$ 是一个连通欧拉图。由于在一个连通欧拉图中，存在一个由它的所有边组成的闭边列，设在 $M \cup (\gamma)$ 中， $(e_1 e_2 \cdots e_n)$ 就是这样一个闭边

列, 则 y 在此边列里. 不失一般性, 设 y 在边列中位于 e_p 和 e_{p+1} 之间, 即设此边列为 $(e_1 e_2 \cdots e_p y e_{p+1} \cdots e_n)$. 转动此边列, 使 y 变成它的第一条边, 即成为 $(y e_{p+1} \cdots e_n e_1 e_2 \cdots e_p)$. 然后删去 y , 所得的序列 $(e_{p+1} \cdots e_n e_1 e_2 \cdots e_p)$ 就是一个包含 M 中所有边的开边列. (证毕)

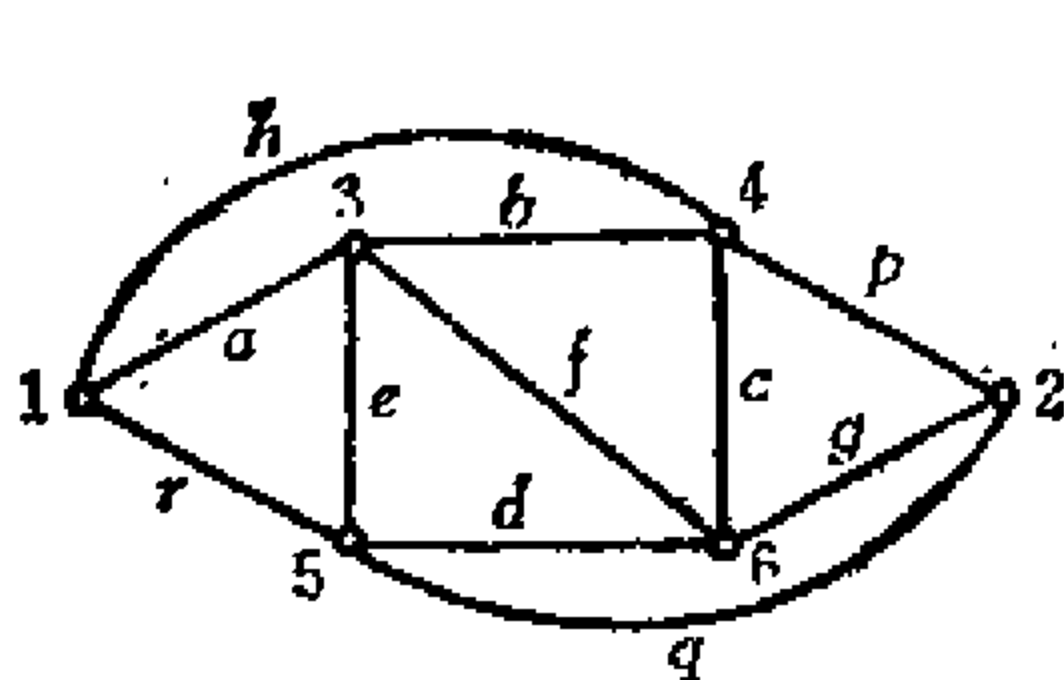


图1-4-1 M 图 M

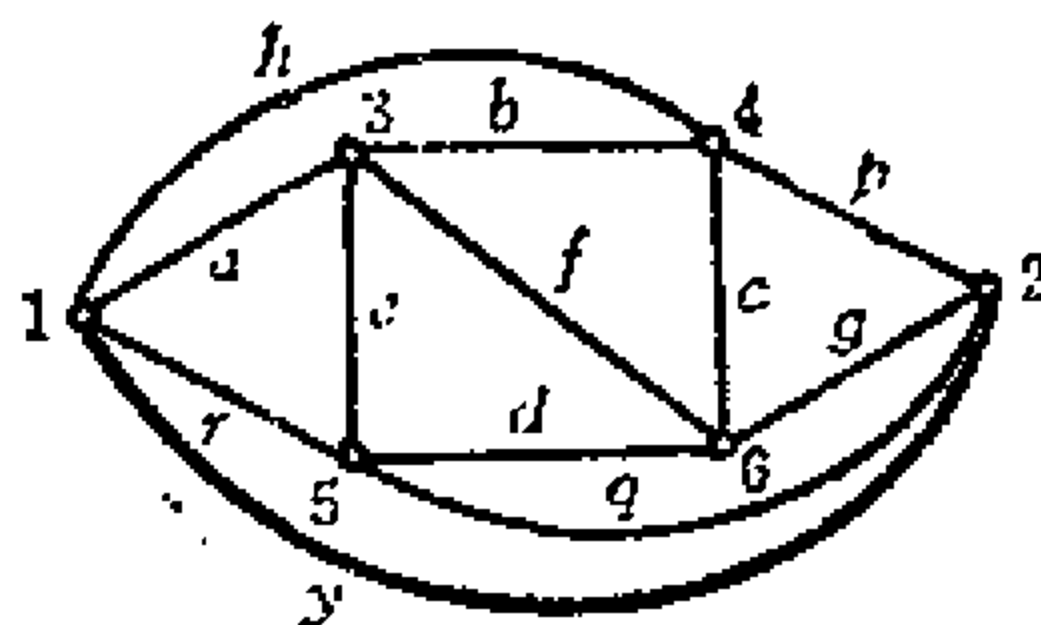


图1-4-2 欧拉图 $M \cup (y)$

例1-4-1 考虑图1-4-1中的 M 图. 显然它的端点是顶点1和2. 加进一条以1和2为端点的边 y , 所得的图如图1-4-2所示, 它显然是一个欧拉图. 于是可得到一个闭边列 $(a b c d e f g y h p q r)$, 它是由 $M \cup (y)$ 中所有的边组成的. 转动这个边列, 得到 $(y h p q r a b c d e f g)$. 然后删去 y , 所得的序列 $(h p q r a b c d e f g)$ 就是由 M 中所有的边组成的一个开边列.

定义1-4-2 如果一个边集合可以分解为一条路径和一个回路的无重边并, 使得这条路径和这个回路的无重边并没有公共边, 则称这个边集合为一条路径和若干回路的无重边并(集) (edge disjoint union of a path and circuits).

例如, 在图1-4-1中, M 图 M 的所有边的集合 $(a, b, c, d, e, f, g, h, p, q, r)$, 可以分解为路径 (a, b, p) 和回路的无重边并 (c, d, e, f, g, h, q, r) . 因此这个集合是一条路径和若干回路的无重边并.

定理1-4-2 一个 M 图或者是一条路径，或者是一条路径和若干回路的无重边并。

证明： 由定理1-4-1，我们知道，存在一个包含连通 M 图的所有边的开边列。我们还知道，若一个开边列的所有边的集合不是一条路径，则可将此边列分解为一个开边列和一些闭边列^{*}，使得分解后得到的这个开边列中所有边的集合是一条路径，而这些闭边列中所有边的集合是一个欧拉图，它或者是一个回路，或者是回路的无重边并。因此，一个连通 M 图或者是一条路径，或者是一条路径与若干回路的无重边并。

假定所给的 M 图 M 是分离的。设 g_1, g_2, \dots, g_ρ 是 M 的最大连通子图集合。因为一个线图中所有顶点度之和的一半，等于这个线图的边数，所以，若一个度为奇数的顶点在 $g_r (1 \leq r \leq \rho)$ 中，则另一个度为奇数的顶点也必在 g_r 中，因此在 g_1, g_2, \dots, g_ρ 中，只有一个是 M 图，比如说是 g_1 ，其余的都是欧拉图。于是我们可以断定， g_1 或者是一条路径，或者是一条路径和若干回路的无重边并。而 g_2, \dots, g_ρ 中的每一个或者是一个回路，或者是回路的无重边并。因此所给的 M 图 M 是一条路径和若干回路的无重边并。
(证毕)

我们来考虑一个众所周知的难题：把规定的图形不重复地一笔画出来。如果一个图形能一笔画出来，则当我们把所给的图形看作一个线图时，必有一个边列包含该图的所有边。于是，如果它是一个开边列，所给的图形一定是一个连通的 M 图。另一方面，如果它是一个闭边列，则所给的图形必是一个连通的欧拉图。假若你不能一笔画出所给的图形，就不可能得到这样一个边列，因此该图形既不是连通 M 图，又不是连通欧拉图。这就是说，一个图形能被一笔画出，当且仅当此图形是一个连通的 M 图

^{*} 原文此处为“一个闭边列。”据定理1-2-1，这种分解所得的闭边列通常不止一个。

——译注

或连通的欧拉图。例如,图1-4-3(a)中的线图是一个连通 M 图,因此可以将它一笔画出。而图1-4-3(b)中的线图既不是 M 图,又不是欧拉图,所以不能将它一笔画出。

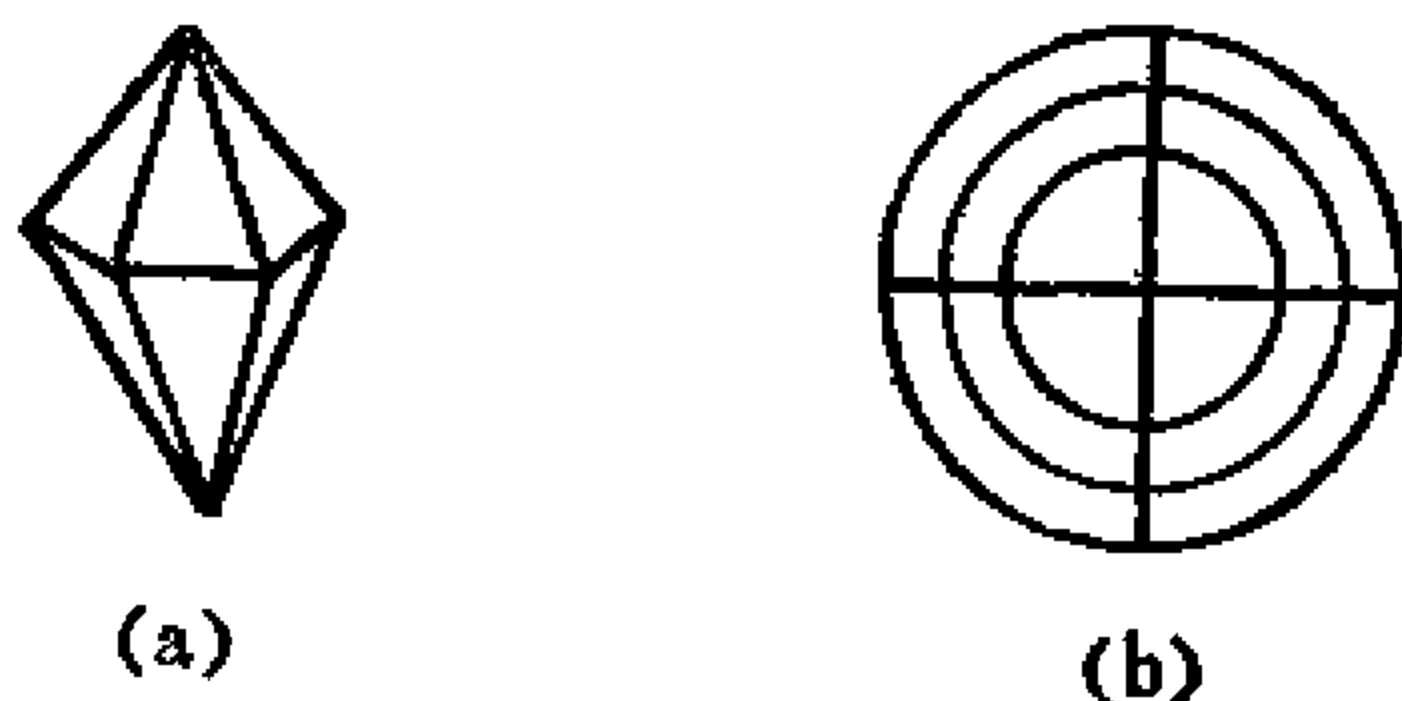


图1-4-3 一笔画难题

我们已经知道,同一对顶点之间的两条路径的环和是一个欧拉图。因为一个 M 图是一条路径和若干回路的无重边并,所以两个具有相同端点的 M 图的环和也是一个欧拉图。

定理1-4-3 设一个线图的两个子图 M_1 和 M_2 是具有相同端点的两个 M 图,则 $M_1 \oplus M_2$ 是一个欧拉图。

证明: 以 M_1 和 M_2 的两个公共端点为端点,另作一条边 γ ,显然 $M_1 \cup (\gamma)$ 和 $M_2 \cup (\gamma)$ 都是欧拉图。于是

$$[M_1 \cup (\gamma)] \oplus [M_2 \cup (\gamma)] = M_1 \oplus M_2 \quad (1-4-1)$$

是一个欧拉图。 (证毕)

我们知道,一条路径和一个回路的环和不一定是一条路径。然而,以下定理表明,一个 M 图和一个欧拉图的环和一定是 M 图。

定理1-4-4 在一个线图中,设 M 是一个 M 图, E 是一个欧拉图,则 $M \oplus E$ 是一个 M 图。

证明: 据定理1-4-2, M 可写作 $M = P \oplus E'$,其中 P 是一条路径, E' 是一个欧拉图。于是

$$M \oplus E = (P \oplus E') \oplus E = P \oplus E'' = M' \quad (1-4-2)$$

其中 $E'' = E' \oplus E$ 。据定理1-3-3, E'' 是一个欧拉图。 (证毕)

由定理1-3-3, 1-4-3 和 1-4-4, 可以作出 M 图 M 和欧拉图 E 的环和表如下:

\oplus	E	M
E	E	M
M	M	E

注意这个表和下面给出的二进制数加法表之间的对称性:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

为了方便, 我们定义符号 $\{P_{ij}\}$ 和 $\{M_{ij}\}$ 如下.

定义1-4-3 设 i 和 j 是线图 G 中的两个顶点. 用符号 $\{P_{ij}\}$ 表示 i 和 j 之间所有路径的集体, 用符号 $\{M_{ij}\}$ 表示 G 中以 i 和 j 为端点的所有 M 图的集体.

前面我们已经定义过符号 $\{E\}$, 它表示一个线图中所有欧拉图的集体. 由定理1-4-2, 我们得到

$$\{M_{ij}\} = \{P \oplus E; P \in \{P_{ij}\}, E \in \{E\}\} \tag{1-4-3}$$

又由定理1-3-3, 1-4-3和1-4-4, 我们得到下面的定理.

定理1-4-5 $\{M_{ij}\}$ 和 $\{E\}$ 中所有子图的集体 $\{E, M_{ij}\}$ 在环和运算下是一个阿贝尔群.

例1-4-2 在例1-3-2和1-3-3中, 我们已经知道, 图1-3-3中线图的 $\{E\}$ 和 $\{P_{12}\}$ 分别如图1-3-4和1-3-7所示. 它们是

$$\begin{aligned} \{E\} &= \{\phi, (a,b), (c,d), (a,c,e), (b,c,e), \\ &\quad (b,d,e), (a,d,e), (a,b,c,d)\} \\ \{P_{12}\} &= \{(e), (a,d), (b,c), (a,c), (b,d)\} \end{aligned}$$

因此，所有以 1 和 2 为端点的 M 图是

$$\begin{aligned}\{M_{12}\} &= \{P \oplus E; P \in \{P_{12}\}, E \in \{E\}\} \\ &= \{(e), (a, d), (b, c), (a, c), (b, d), (a, b, e), \\ &\quad (c, d, e), (a, b, c, d, e)\}\end{aligned}$$

其中，前五个 M 图是路径，其余的则是一条路径和若干回路的无重边并，如图 1-4-4 所示。设 P_1, P_2, P_3, P_4 和 P_5 由图 1-3-7 表示，并设 $M_6 = (a, b, e)$, $M_7 = (c, d, e)$, $M_8 = (a, b, c, d, e)$ ，则由生成元 E_1, E_2, E_3 和 P_1 的集合可以产生集体 $\{E, M_{ij}\}$ 中所有的元素：

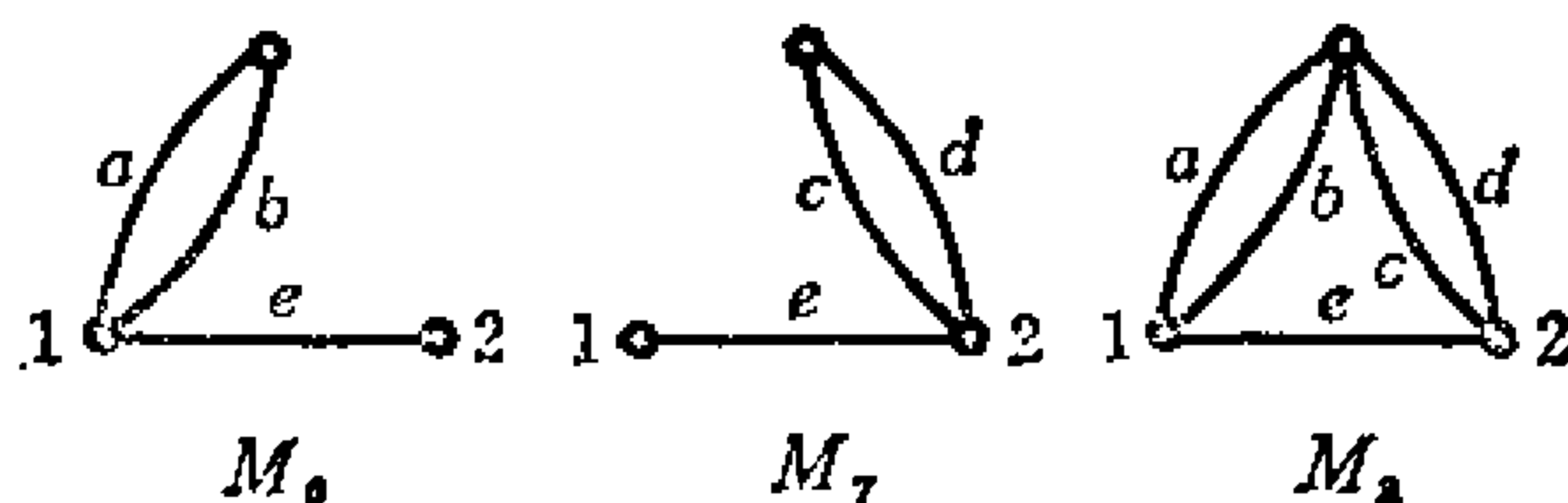


图 1-4-4 M 图

$$\begin{aligned}E_1 \oplus E_2 &= E_7 \\ E_1 \oplus E_3 &= E_4 \\ E_2 \oplus E_3 &= E_6 \\ E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 &= E_5 \\ E_1 \oplus P_1 &= M_6 \\ E_2 \oplus P_1 &= M_7 \\ E_3 \oplus P_1 &= P_4 \\ E_1 \oplus E_2 \oplus P_1 &= M_8 \\ E_1 \oplus E_3 \oplus P_1 &= P_3 \\ E_2 \oplus E_3 \oplus P_1 &= P_2 \\ E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 \oplus P_1 &= P_5 \\ E_1 \oplus E_1 &= E_2 \oplus E_2 = \dots = P_1 \oplus P_1 = \phi\end{aligned}$$

1-5 不可分图

在由生成元的环和来产生 $\langle E, M_{ij} \rangle$ 的所有元素时，可以选取不同的生成元集合。在一个线图中，找出两个指定顶点之间的若干条路径比较容易。不过，这些路径被找出来后，是否能构成 $\langle E, M_{ij} \rangle$ 的生成元集合，还必须加以确定。在例 1-4-2 中，我们可以选取路径 P_1, P_2, P_3 和 P_4 作为 $\langle E, M_{ij} \rangle$ 的生成元，这是因为

$$P_3 \oplus P_4 = E_1$$

$$P_2 \oplus P_4 = E_2$$

$$P_1 \oplus P_4 = E_3$$

但是，如果所给的线图是图 1-4-4 中的 M_0 ，那么，在顶点 1 和 2 之间只有一条路径 (e) ，而单有路径 (e) ，显然是不可能成为

$$\langle E, M_{12} \rangle = \{ \phi, (a, b), (a, b, e), (e) \}$$

的生成元集合的。这两个例子表明，是否存在一个能作为 $\langle E, M_{ij} \rangle$ 的生成元集合的路径集合，取决于所给线图的结构。有这样一种仅由路径就能形成生成元集合的结构，叫做不可分图。为了定义不可分图，我们先说明“切割顶点”的概念如下。

定义 1-5-1 切割顶点 p 为两个新顶点 p_1 和 p_2 ，意思是指将所有以顶点 p 为端点的边分为两部分，使它们的端点分别由 p 变成 p_1 或 p_2 。

例如，在图 1-5-1(a) 所示的线图中，有几种切割顶点 p 的方法，分别如图 1-5-1(b), (c), (d), (e) 所示。

考虑图 1-5-2(a) 所示的连通线图。如果我们将顶点 p 切割为两个顶点 p_1 和 p_2 ，如图 1-5-2(b) 所示，则此线图变成分离图。然而，假若一个连通线图象图 1-5-3(a) 所示的那样，则无

论我们怎样将顶点 p 切割成两个顶点，它都不会成为分离图。

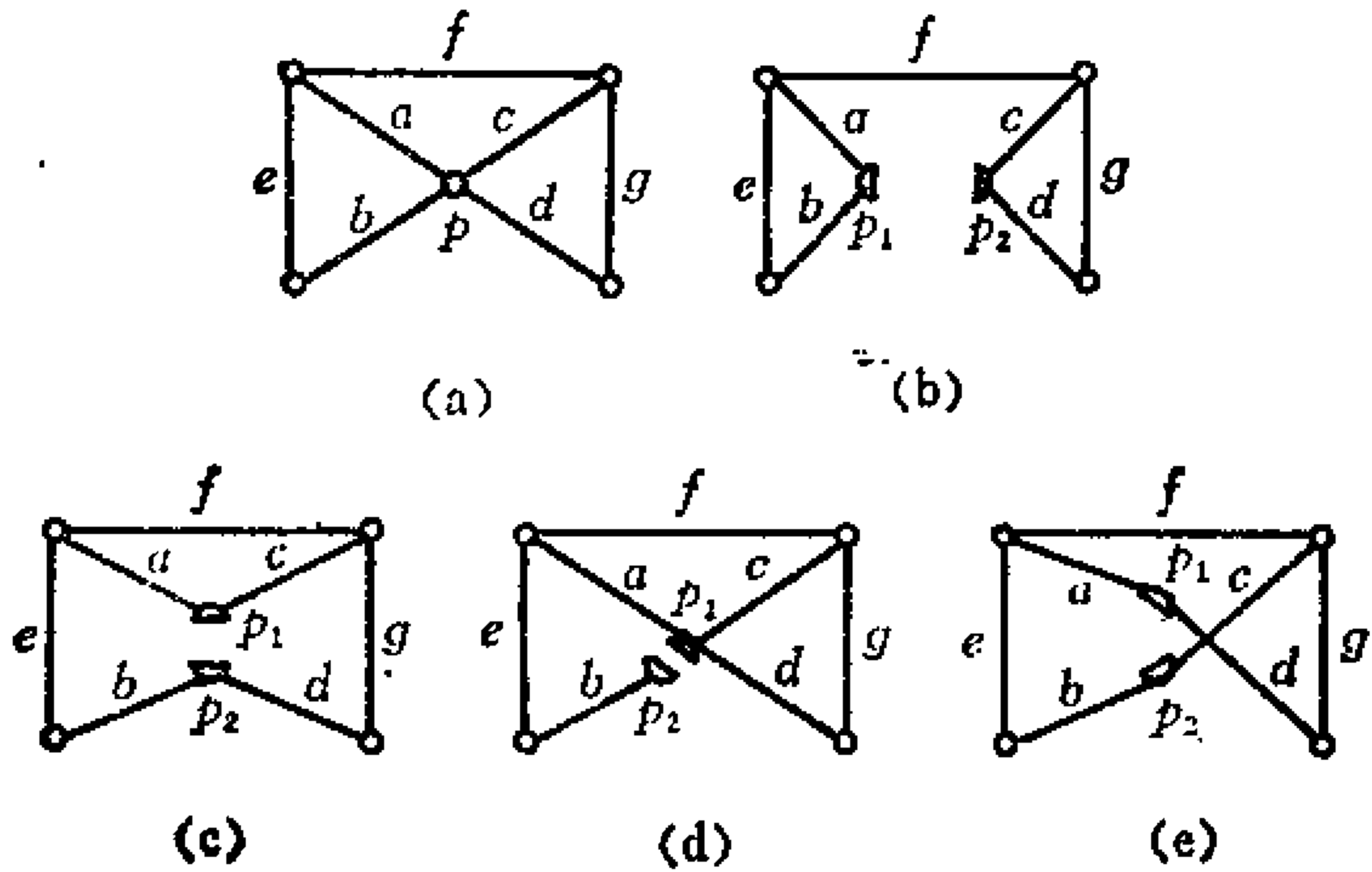


图1-5-1 切割顶点 p 的不同方法
(a)线图 G_1 , (b) G_1 , (c) G_2 , (d) G_3 , (e) G_4

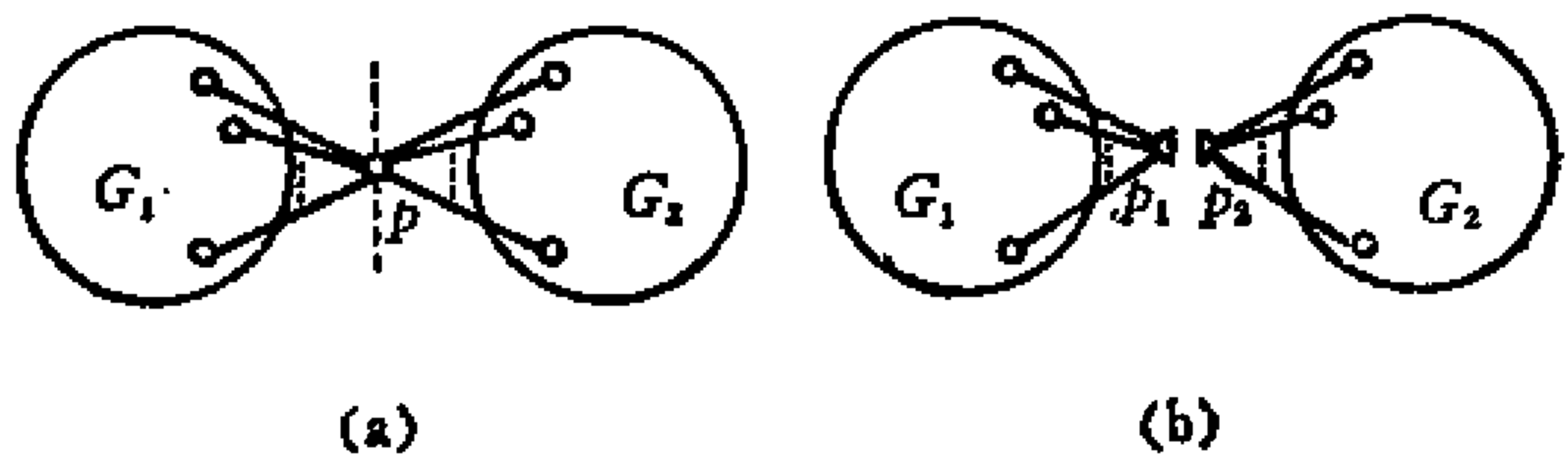


图1-5-2 可分图
(a)割点 p , (b)分离图

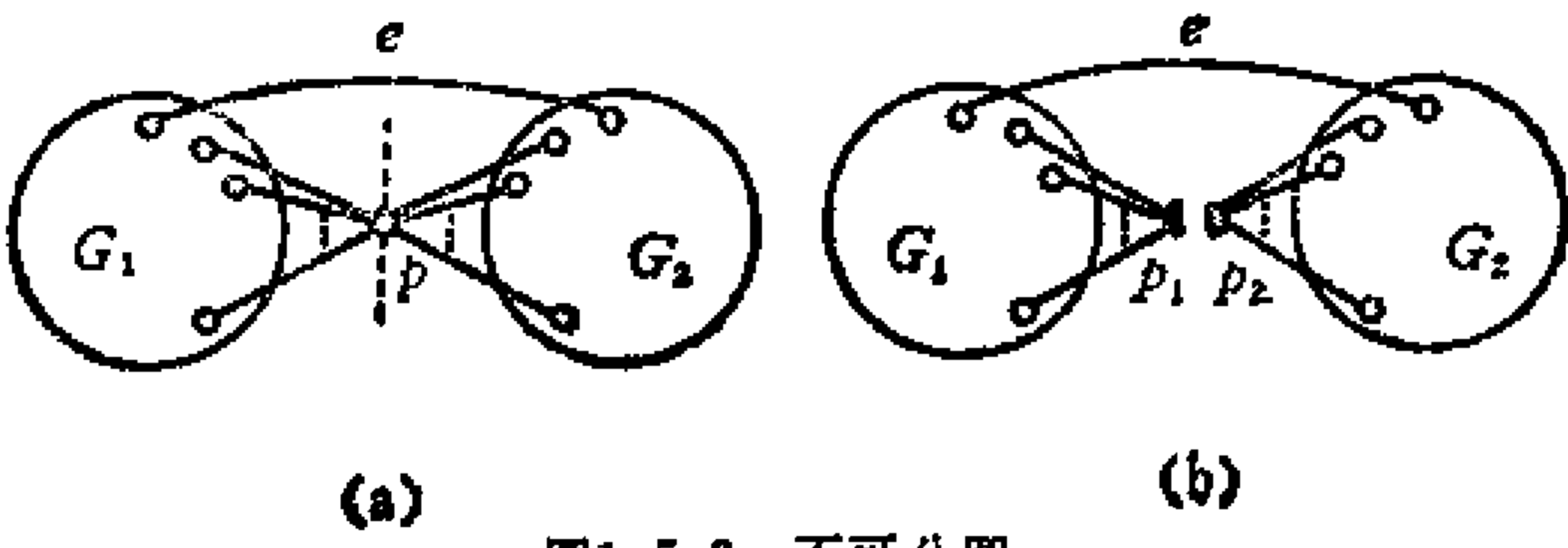


图1-5-3 不可分图
(a)线图, (b)切割顶点 p

定义1-5-2 在一个连通线图中，如果存在一个顶点 p 和一种切割该顶点为两个顶点的方法，使得按此方法切割顶点 p 时，这个线图变成分离图，并且不产生孤立点，则称此连通线图为可分图，称顶点 p 为割点。

例如，图1-5-4(a)，(b)和(c)所示的线图都是可分图。注意顶点 p 和 p' 是它们的割点。

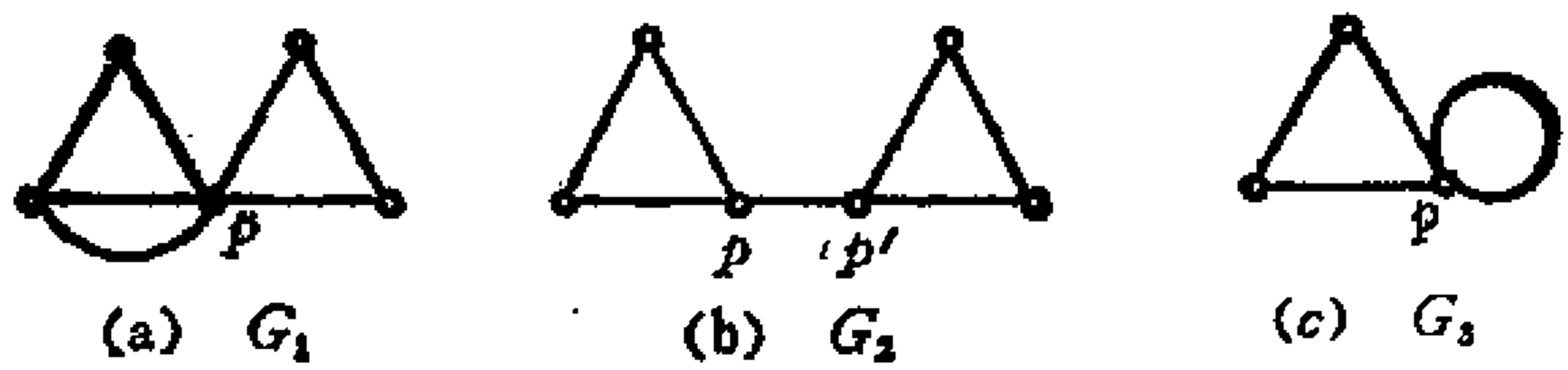


图1-5-4 可分图
(a) G_1 ; (b) G_2 ; (c) G_3

定义1-5-3 如果一个连通线图不是可分图，则为不可分图。

例如，图1-5-5(a)，(b)所示的线图都是不可分图。

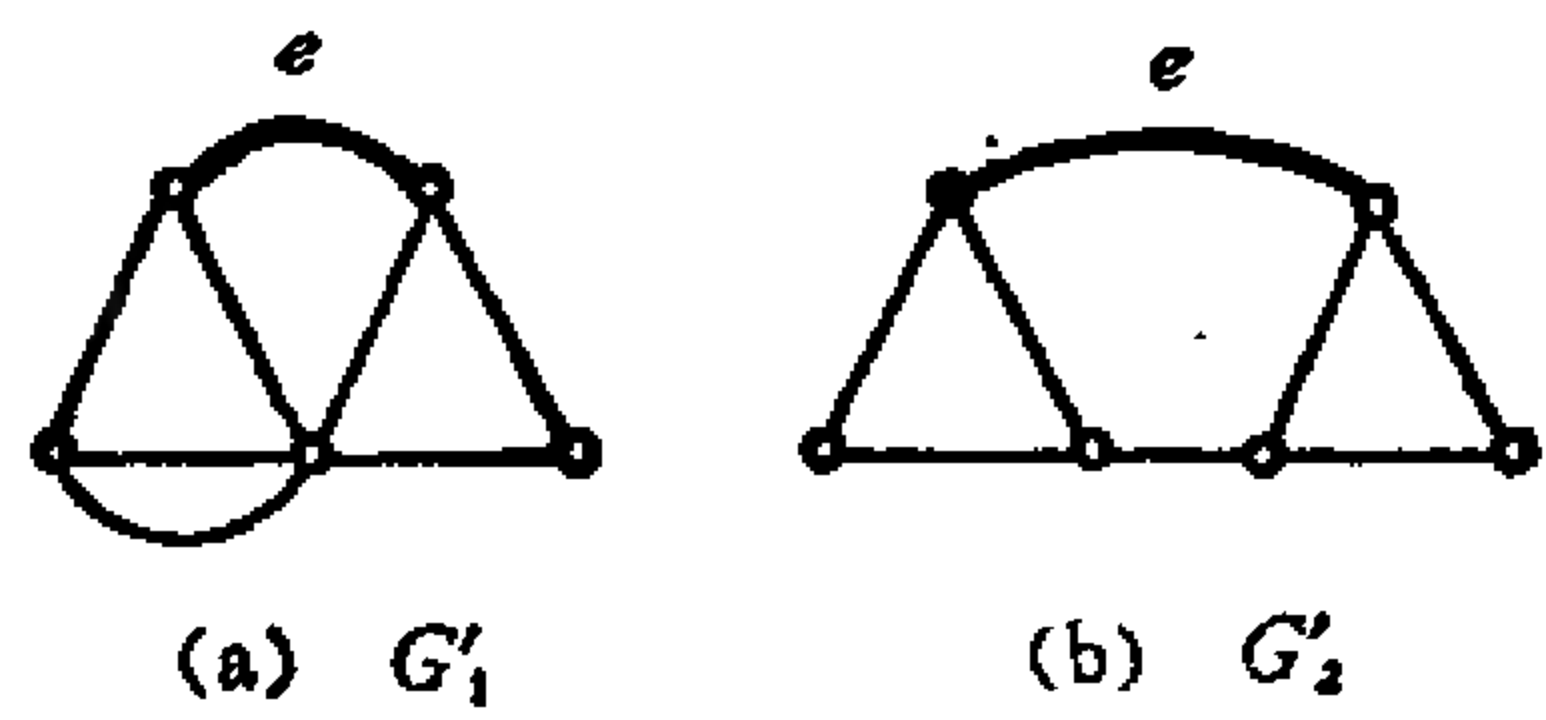


图1-5-5 不可分图
(a) G'_1 ; (b) G'_2

为了得到不可分图的某些性质，我们来考虑由两个最大连通子图 g_1 和 g_2 构成的线图 G ，其中每一个最大连通子图至少包含一条边。容易看出，若在 g_1 的一个顶点和 g_2 的一个顶点之间加上一条边 e ， G 就变成了连通图，如图1-5-6所示。但所得的图是一个

可分图.相反,如果线图 G' 是不可分图,那么删去它的一条边后,也不会变成分离图.

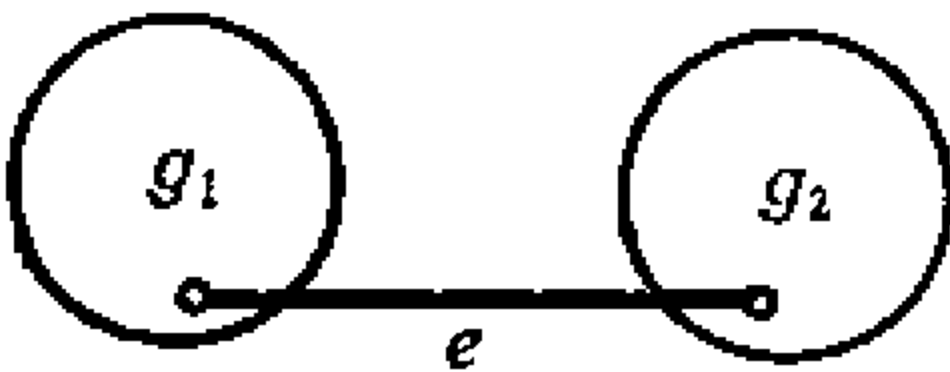


图1-5-6 一个可分图

设 e 是不可分图 G' 中连接顶点 i 和 j 的一条边.因为删去边 e 后, G' 不会分离,所以,在从 G' 中删除 e 所得的图 G'_e 中,存在一条顶点 i 和 j 之间的路径 P_{ij} ,如图1-5-7所示.这条路径和边 e 一起,构成 G' 中的一个回路.于是我们有定理1-5-1.

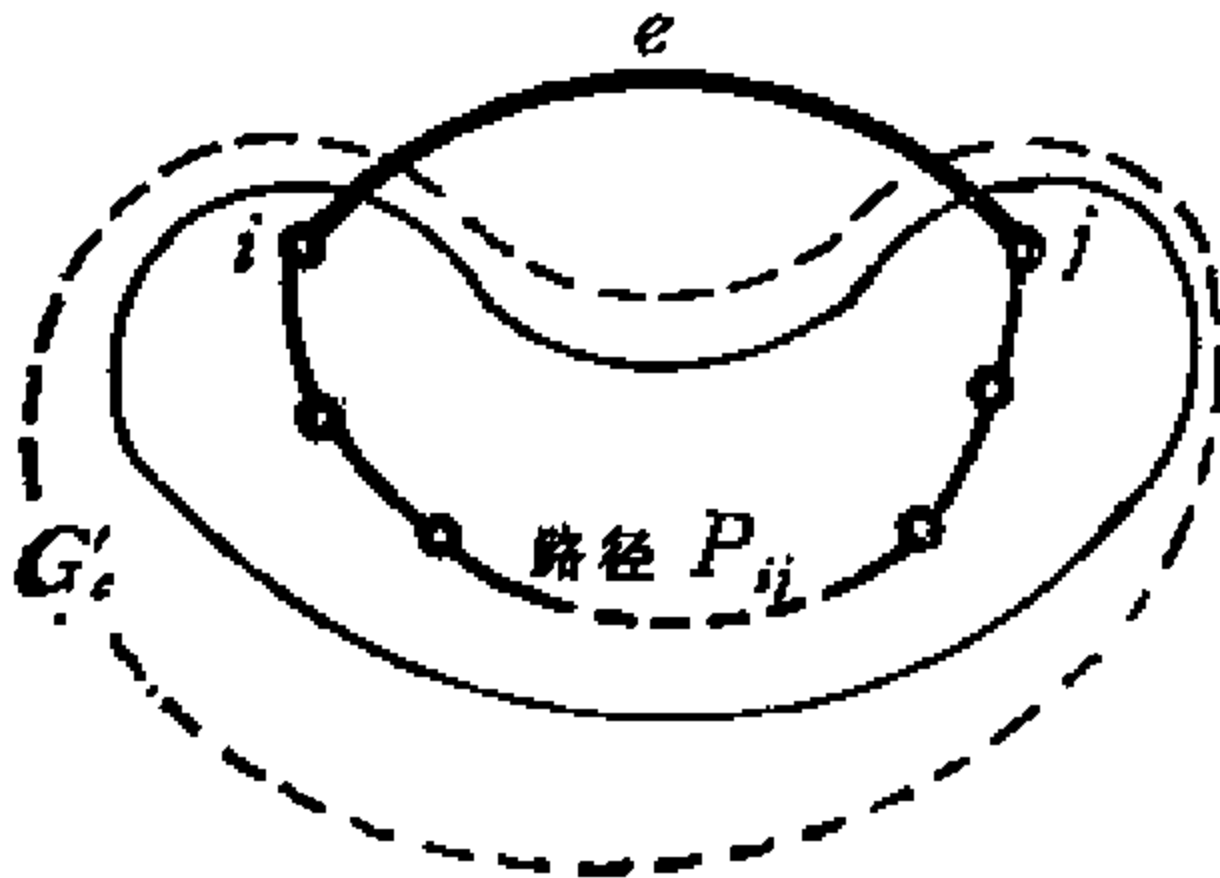


图1-5-7 不可分图 G'

定理1-5-1 一个不可分图的任一条边至少在一个回路中.

应当注意的是,某些可分图和分离图也具有定理1-5-1所述的性质(即每条边至少在一个回路中).例如,图1-5-8(a)和(b)

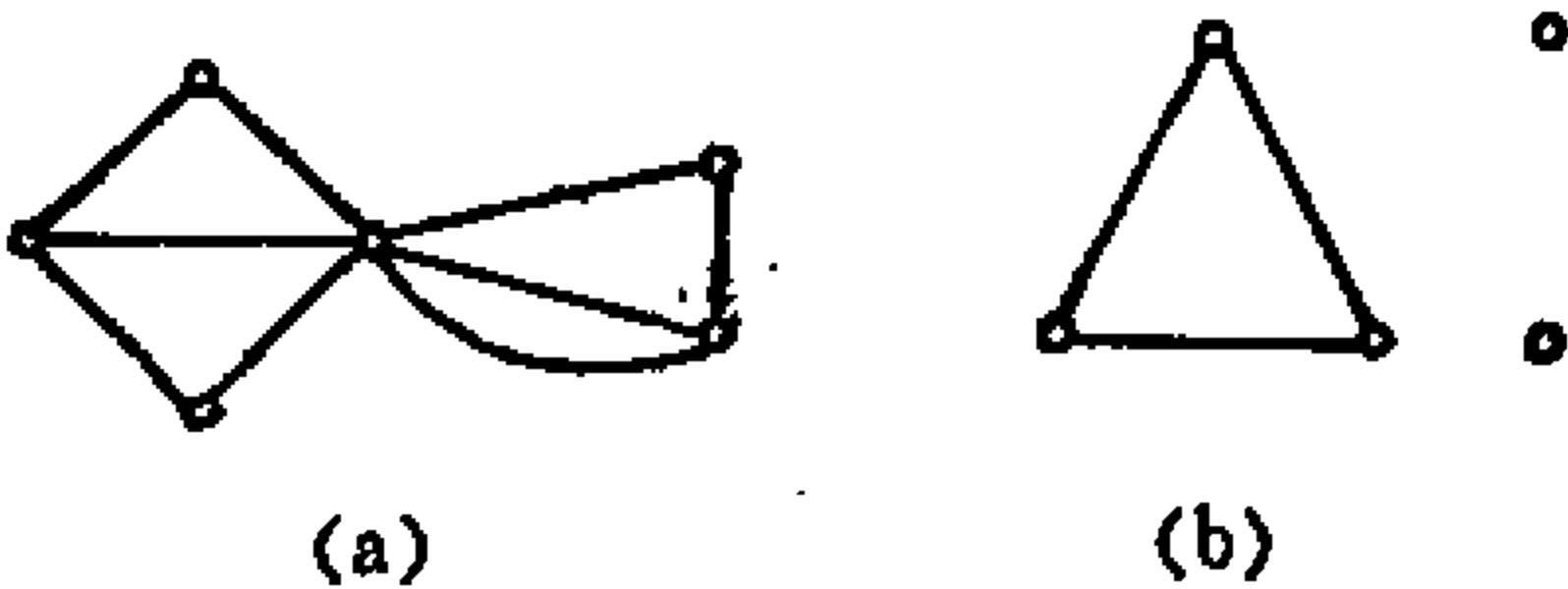


图1-5-8 线图
(a)可分图, (b)分离图

中的可分图和分离图就有这个性质。所以，这个性质并非不可分图特有的性质。

要从一个线图中移去一条边，有两种方法。一种方法是删除一条边（或断开一条边），另一种方法是短路一条边。所谓“短路边 e ”，就是把边 e 删除，并把边 e 的两个端点合并成一个顶点。例如，在图1-5-9(a)所示的线图中，删除（断开）边 e ，就得到图1-5-9(b)所示的线图。然而在同一线图中短路边 e ，则得到图1-5-9(c)所示的线图。

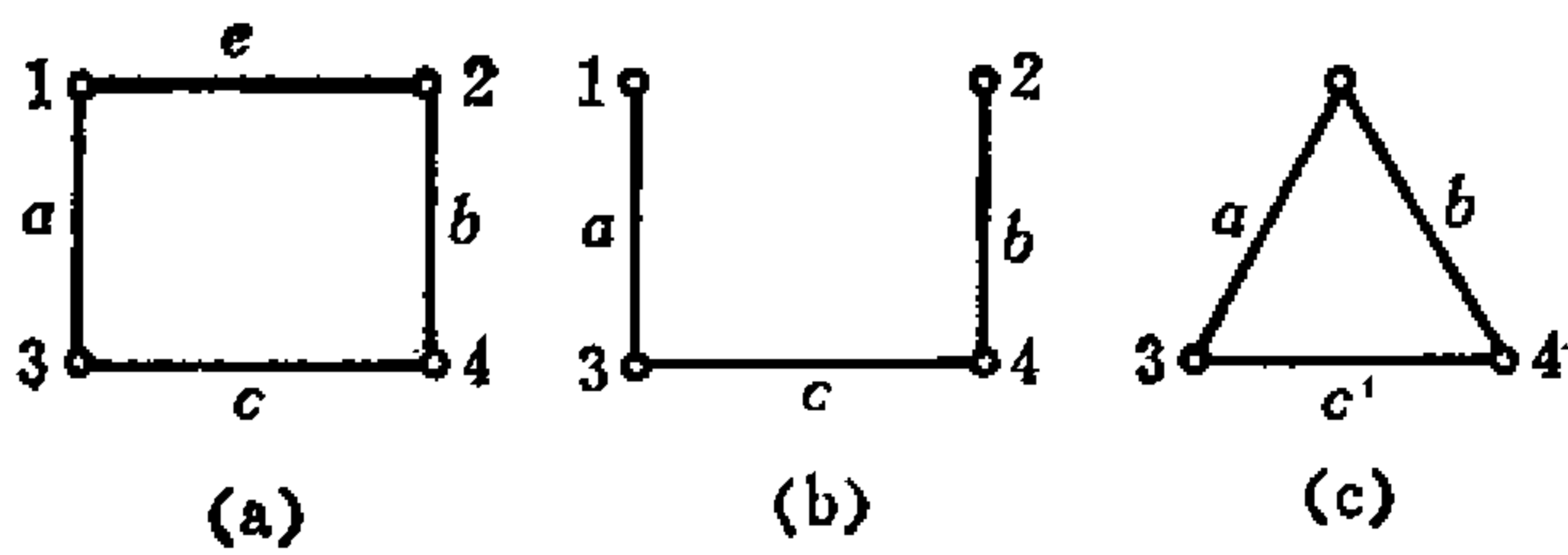


图1-5-9 删除边 e 和短路边 e

(a) 一个线图； (b) 删除边 e ； (c) 短路边 e

下面我们要说明，在对一个不可分图的任何一条边作删除或短路处理时，必至少有一种方法能够保持原线图的不可分性。假定从不可分图 G' 中删除边 e ，使它变成了可分图 G'_e ，顶点 p 是它的一个割点（见图1-5-10）。又设边 e 的两个端点是 i 和 j ，则可看出， i 和 j 中必有一个在 G'_{1e} 中，而另一个在 G'_{2e} 中，并且 i 和 j 都不可能是顶点 p ，因为原图 G' 是不可分的。这样，如果

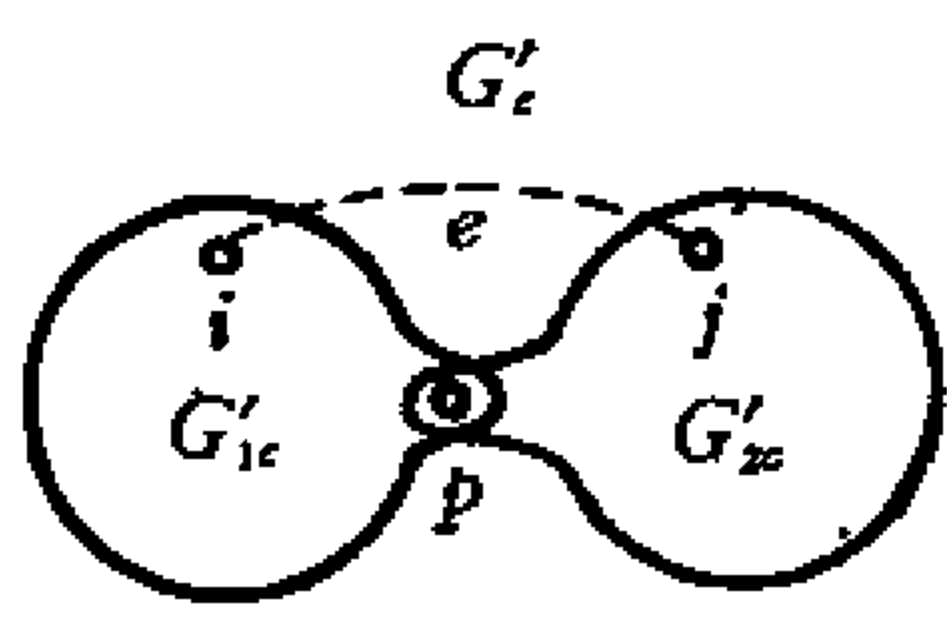


图1-5-10 可分图 G'_e

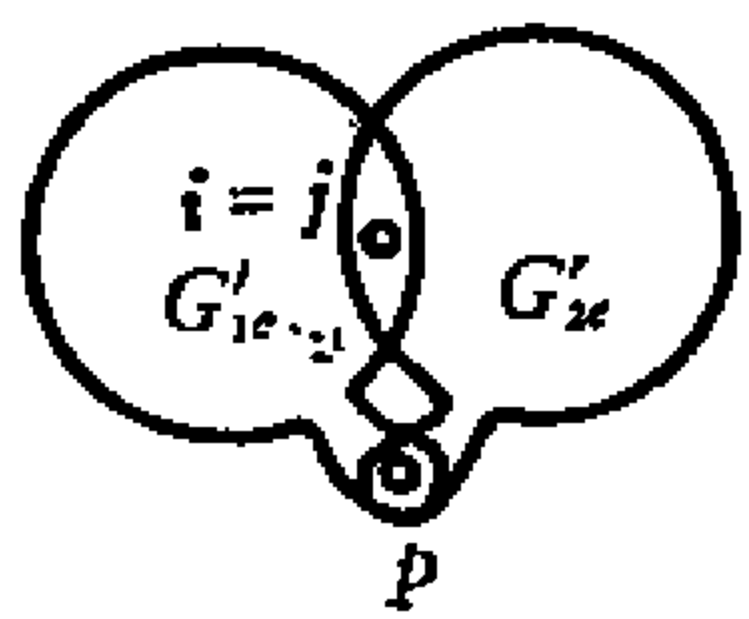


图1-5-11 短路边 e

我们不是删除边 e ，而改用将其短路的方法，所得的图就是不可分的，如图1-5-11所示。

假定在短路边 e 后，不可分图 G'' 变成了可分图 G''_1 ，如图1-5-12所示，则原不可分图必定由边 e 和两个子图 G_1, G_2 构成，其中子图 G_1 和 G_2 在 e 的端点 p_1, p_2 处结合起来，如图1-5-13所示。注意，当我们短路边 e 时，顶点 p_1 和 p_2 变成了割点 p 。这样，如果我们不是短路边 e ，而改用删除 e 的方法，所得的图将是不可分的。只要一个不可分图不少于三个顶点，这个结论都成立。



图1-5-12 短路一条边所得的可分图 G''_1

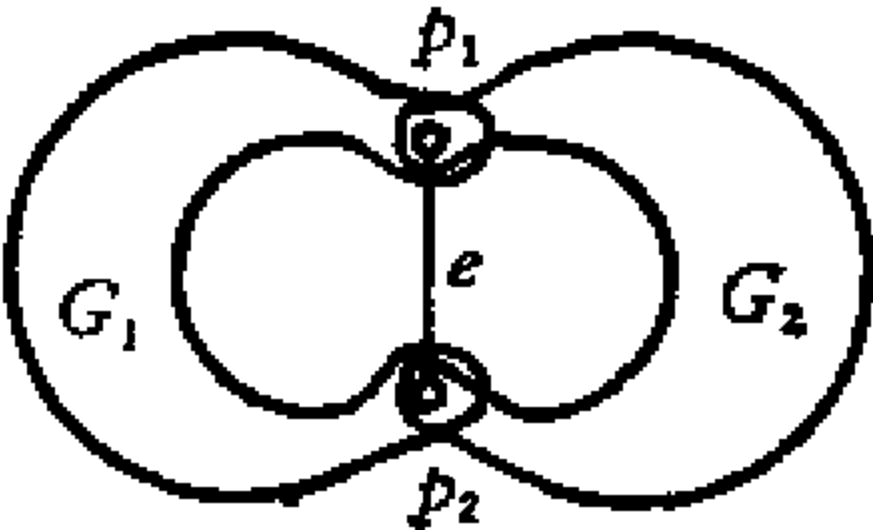


图1-5-13 一个不可分图

定理1-5-2 设不可分图 G 至少包含三个顶点，则用删除或短路的方法移去它的任一条边时，必至少有一种方法能保持其不可分性。

现在我们已经作好准备，可以来讨论不可分图所独具的性质了。

定理1-5-3 当且仅当一个线图是不可分图时，对于该线图的任一对顶点 i, j 和任一条边 e ，在 i 和 j 之间存在一条包含边 e 的路径。

证明： 若不可分图 G 恰有三个顶点，定理显然成立。假设定理对于所有具有 k 个顶点的不可分图都成立。我们来考虑一个具有 $k + 1$ 个顶点的不可分图 G 。据定理1-5-2，我们可以挑出 G 中的任一条边，或者短路它，或者删除它，使所得的图仍是不

可分的。在 G 中选取一条异于边 e 且不与 i 连接的边 e_1 。将 e_1 短路，若所得的图是可分的，就改为将 e_1 删除。然后，再选取另一条异于边 e 且不与 i 连接的边 e_2 。将 e_2 短路，如果所得的图是可分的，又改为将 e_2 删除。如此继续下去，我们很快便能找到这样一条边 e_r ，它异于边 e ，不与 i 连接，且将 e_r 短路所得的图是不可分图，设为 G' 。显然 G' 有 K 个顶点，因此定理对 G' 成立，即在 i 和 j 之间存在着一包含边 e 的路径。而这同一条路径，除了有可能包括边 e_r 外，也是 G 中 i 和 j 之间包含边 e 的路径。

(证毕)

由这个定理，可以得到以下定理。

定理1-5-4 在一个不可分图中，对于任一对顶点 i, j 及任一个回路 C ，一定存在 i 和 j 之间的两条路径 P_1 和 P_2 ，使得

$$C = P_1 \oplus P_2 \quad (1-5-1)$$

这个定理保证了存在一个路径集合，它可以作为 $\{E, M_{ij}\}$ 的生成元集合。我们注意到，图1-3-3中的线图是不可分的，路径 P_1, P_2, P_3 和 P_4 能组成一个生成元的集合，如图1-3-7所示。

1-6 路径的集体

如前所述，以顶点 i 和 j 为端点的 M 图的集体 $\{M_{ij}\}$ 包含了 i 和 j 之间所有的路径。我们还知道， $\{E, M_{ij}\}$ 在环和运算下是一个阿贝尔群。并且，根据定理1-4-3和1-4-4，如果我们适当地选取生成元，很容易得到 $\{M_{ij}\}$ 。例如，在图1-3-3所示的线图中，选取 E_1, E_2, E_3 和 P_1 （见图1-3-4和1-3-7）作为生成元，即可知 $\{M_{ij}\}$ 中所有的 M 图是 $P_1, P_1 \oplus E_1, P_1 \oplus E_2, P_1 \oplus E_3, P_1 \oplus E_1 \oplus E_2, P_1 \oplus E_1 \oplus E_3, P_1 \oplus E_2 \oplus E_3$ 以及 $P_1 \oplus E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$ 。因此，要求出顶点 i 和 j 之间的所有路径，一种方法是先由集体 $\{E, M_{ij}\}$ 中的生成元生成集体 $\{M_{ij}\}$ ，然后设法从 $\{M_{ij}\}$ 中把路径

抽出来。这里介绍一种从 $\{M_{ij}\}$ 中将所有路径抽取出来的方法，称为“最小化运算”。使用这种运算，还能从欧拉图集体 $\{E\}$ 中抽出所有的回路。

这种运算还可以用来得到路径集体的一些重要性质。并且，借助于这些性质，可以导出另一种生成两指定顶点间所有路径的简单算法。对此，我们将在本节内研究，首先，在一个集体上定义“最小化运算”如下。

定义1-6-1 设 A 是若干集合的一个集体，则定义 $\min A$ 为 A 的这样一个子集体： A 中任一个集合 α 属于 $\min A$ ，当且仅当 A 中除 α 外的每一个集合 β ，只要不是空集，就满足 $\beta \not\subset \alpha$ 。（ $\beta \not\subset \alpha$ 表示 β 不是 α 的子集，即 β 中至少有一个元素不在 α 中。）*

例如，设 $A = \{(a, b, c), (a, d), (a), (b, c), \phi\}$ ，则 $\min A$ 由集合 (a) ， (b, c) 和空集 ϕ 组成。可以看出，通过以下步骤即可求出一个集体 A 的 $\min A$ 。

对 $p = 1, 2, 3, \dots, n$ ，检验 $\alpha_p (\neq \phi)$ ，看是否存在一个非空集合 $\alpha_r (\neq \alpha_p)$ ，使得 $\alpha_r \subset \alpha_p$ 。如果存在这样的集合 α_r ，就删去 α_p 。否则将 α_p 保留在此集体中。（ $\alpha_r \subset \alpha_p$ 表示 α_r 是 α_p 的一个子集，即 α_r 的每一个元素都在 α_p 中。）例如，在例1-3-2中，删去 (a, b, c, d) ，即得 $\{E\}$ 的最小化集体为

$$\min \{E\} = \{\phi, (a, b), (c, d), (a, c, e), (b, c, e), \\ (a, d, e), (b, d, e)\}$$

这是因为，只有 (a, b, c, d) ，具有另一个非空子集 (a, b) 适合 $(a, b) \subset (a, b, c, d)$ 。

前面说过， $\{E\}$ 是由所有不同的回路，回路的无重边并和空集组成的集体。设 $E_1 \in \{E\}$ 是回路 C_1, C_2, \dots, C_k 的无重边并，则因 C_1 是一个回路，故 C_1 在 $\{E\}$ 中，且 $C_1 \subset E_1$ 。于是，在求 \min

* 括号中的字是译者加的。——译注

$\{E\}$ 时, E_1 将被删去。由于 $\{E\}$ 中任一回路 C 是一个连通子图, 它的每一个顶点的度均为2, 所以 C 的任何一个真子图都不是回路。

定理1-6-1 用 $\{C\}$ 表示所有的回路和空集组成的一个集体, 则

$$\min\{E\} = \{C\} \quad (1-6-1)$$

按照定义, 集体 $\{M_{ij}\}$ 是以 i 和 j 为端点的全部 M 图的集体。我们已经知道, 一个 M 图 M_{ij} 或者是顶点 i 和 j 间的一条路径 P_{ij} , 或者是路径 P_{ij} 和若干回路的无重边并。在 $\{M_{ij}\}$ 中, 设 M_1 是路径 P_{ij} 和若干回路的无重边并, 则由于 P_{ij} 在 $\{M_{ij}\}$ 中, 所以 M_1 将不属于 $\min\{M_{ij}\}$ 。

假定 P'' 是 $\{M_{ij}\}$ 中一条路径 P'_{ij} 的真子集。若 P'' 也在 $\{M_{ij}\}$ 中, 则据定理1-3-7知, $P'' \oplus P'_{ij}$ 或为回路, 或为回路的无重边并。但是, 由于 P'' 是 P'_{ij} 的真子集, 所以 $P'' \oplus P'_{ij}$ 是 P'_{ij} 的子图。而 P'_{ij} 不可能包含回路, 因此 P'' 不在 $\{M_{ij}\}$ 中。

定理1-6-2 用 $\{P_{ij}\}$ 表示顶点 i 和 j 间所有路径的集体, 则

$$\min\{M_{ij}\} = \{P_{ij}\} \quad (1-6-2)$$

下面, 我们用一种称为环积 \otimes 的运算来把两个集体乘起来。

定义1-6-2 诸集合的集体 A 和 B 的环积记作 $A \otimes B$, 定义为

$$A \otimes B = \min\{\alpha_p \oplus \beta_q, \alpha_p \in A, \beta_q \in B\} \quad (1-6-3)$$

例如, 设 $A = \{(a), (b, c), (d, e)\}$,

$B = \{(a, b), (b, c, d), (e)\}$, 则

$$\begin{aligned} A \otimes B &= \min\{(b), (a, b, c, d), (a, e), (a, c), (d), (b, c, e), \\ &\quad (a, b, d, e)\} \\ &= \{(b), (a, e), (a, c), (d)\} \end{aligned}$$

下面是环积运算的一种应用。据定理1-5-4, 在一个不可分图中, 任一回路都可以表示为顶点 i 和 j 之间两条路径的环和。

因此，如果我们对顶点 i 和 j 之间的路径两两一组作环和，并把所有可能的环和汇集起来，就可以得到一个不可分图中所有的回路。

定理1-6-3 对于一个不可分图，有

$$\{P_{ij}\} \otimes \{P_{ij}\} = \{C\} \quad (1-6-4)$$

注意其中

$$\{P_{ij}\} \otimes \{P_{ij}\} = \min \{P_r \oplus P_s; P_r, P_s \in \{P_{ij}\}\} \quad (1-6-5)$$

由于空集 ϕ 在 $\{C\}$ 中，且任何集合 C 和空集 ϕ 的环和仍为集合 C ，故有

$$\{C\} \subset \{C\} \otimes \{C\} \quad (1-6-6)$$

此外，对于 $\{C\}$ 中的元素 C_r 和 C_s ， $C_r \oplus C_s$ 是一个回路或回路的无重边并。注意， $\{E\}$ 是由所有不同的回路，回路的无重边并和空集组成的集体，故有

$$\{C_r \oplus C_s; C_r, C_s \in \{C\}\} \subset \{E\} \quad (1-6-7)$$

因此

$$\{C\} \otimes \{C\} = \min \{C_r \oplus C_s; C_r, C_s \in \{C\}\} \subset \min \{E\} \quad (1-6-8)$$

然而由式(1-6-1)知， $\min \{E\} = \{C\}$ 。结合式 (1-6-6) 即得

$$\{C\} \subset \{C\} \otimes \{C\} \subset \{C\} \quad (1-6-9)$$

于是得到定理1-6-4。

定理1-6-4

$$\{C\} \oslash \{C\} = \{C\} \quad (1-6-10)$$

因为空集在 $\{C\}$ 中，故有

$$\{P_{ij}\} \subset \{P_{ij}\} \oslash \{C\} \quad (1-6-11)$$

另一方面，

$$\{P \oplus C; P \in \{P_{ij}\}, C \in \{C\}\} \subset \{M_{ij}\} \quad (1-6-12)$$

其中 $\{M_{ij}\}$ 是以 i 和 j 为端点的所有不同的 M 图的集体。由于据式 (1-6-2)， $\min \{M_{ij}\}$ 等于 $\{P_{ij}\}$ ，所以

$$\begin{aligned}\{P_{ij}\} \otimes \{C\} &= \min \{P \oplus C, P \in \{P_{ij}\}, C \in \{C\}\} \\ &\subset \min \{M_{ij}\} = \{P_{ij}\}\end{aligned}\quad (1-6-13)$$

由此式及 (1-6-11), 可得定理1-6-5.

定理1-6-5

$$\{P_{ij}\} \otimes \{C\} = \{P_{ij}\} \quad (1-6-14)$$

这个定理可以进一步修改.

定理1-6-6

$$\{P_{ij}\} \otimes \{P_{ij}\} \otimes \{P_{ij}\} = \{P_{ij}\} \quad (1-6-15)$$

证明: 因为空集 ϕ 在 $\{P_{ij}\} \otimes \{P_{ij}\}$ 中, 故

$$\{P \oplus Q, P \in \{P_{ij}\}, Q \in \{P_{ij}\} \otimes \{P_{ij}\}\} \supset \{P_{ij}\} \quad (1-6-16)$$

由于 Q 是一个欧拉图, 故 $P \oplus Q$ 是一个 M 图. (证毕)

例1-6-1 在例1-3-3中, 给出 $\{P_{12}\}$ 为

$$\{P_{12}\} = \{(e), (a, d), (b, c), (a, c), (b, d)\}$$

通过运算 $\{P_{12}\} \otimes \{P_{12}\}$, 可以得到图 1-3-3 所示不可分图中所有的回路:

$$\begin{aligned}\{P_{12}\} \otimes \{P_{12}\} &= \min \{(e) \oplus (e), (e) \oplus (a, d), (e) \oplus (b, c), \\ &\quad (e) \oplus (a, c), (e) \oplus (b, d), (a, d) \oplus \\ &\quad (b, c), (a, d) \oplus (a, c), (a, d) \oplus \\ &\quad (b, d), (b, c) \oplus (a, c), (b, c) \oplus \\ &\quad (b, d), (a, c) \oplus (b, d)\} \\ &= \min \{\phi, (a, d, e), (b, c, e), (a, c, e), (b, d, e), \\ &\quad (a, b, c, d), (c, d), (a, b)\} \\ &= \{\phi, (a, d, e), (b, c, e), (a, c, e), (b, d, e), \\ &\quad (c, d), (a, b)\} \\ &= \{C\}\end{aligned}$$

注意, $\{P_{rs}\}$ 的下标 r 和 s 代表两个顶点, 而 $\{P_{rs}\}$ 中的每一条路径都在这两个顶点之间。也就是说, 符号 $\{P_{rs}\}$ 表示顶点 r

和 s 之间所有路径的集体。式(1-6-4)说明, $\{P_{rs}\}$ 和 $\{P_{st}\}$ 的环积等于 $\{C\}$ 。但是, 当 $r \neq t, u$ 时, $\{P_{rs}\}$ 和 $\{P_{tu}\}$ 的环积显然不等于 $\{C\}$ 。

定理1-6-7 设 G 是一个连通图, 又设 i, j 和 k 是 G 中三个不同的顶点, 则

$$\{P_{ij}\} \otimes \{P_{jk}\} = \{P_{ik}\} \quad (1-6-17)$$

其中 $\{P_{ij}\}$ 是 G 中 i 和 j 之间所有路径的集体, $\{P_{jk}\}$ 是 j 和 k 之间所有路径的集体, $\{P_{ik}\}$ 是 i 和 k 之间所有路径的集体。

证明: 对 $\{P_{ij}\}$ 中任一路径 P_{ij} 和 $\{P_{jk}\}$ 中任一路径 P_{jk} , $P_{ij} \oplus P_{jk}$ 是一个 M 图 M_{ik} 。因此只需证明, 对于 $\{P_{ik}\}$ 中任一路径 P_{ik} , 分别存在 $\{P_{ij}\}$ 中一条路径 P_{ij} 和 $\{P_{jk}\}$ 中一条路径 P_{jk} , 使得

$$P_{ij} \oplus P_{jk} = P_{ik} \quad (1-6-18)$$

因为 G 是连通的, 故从 j 到路径 P_{ik} 中任一顶点, 存在一条路径。设 P' 是 G 中从 j 到路径 P_{ik} 中一个顶点 r , 且不含 P_{ik} 中其他顶点的一条路径。设 P_{ir} 是子图 P_{ik} 中 i 和 r 间的路径, P_{rk} 是子图 P_{ik} 中 r 和 k 间的路径, 如图1-6-1所示。则 $P_{ij} = P_{ir} \cup P'$ 和 $P_{jk} = P_{rk} \cup P'$ 就是所求的路径。 (证毕)

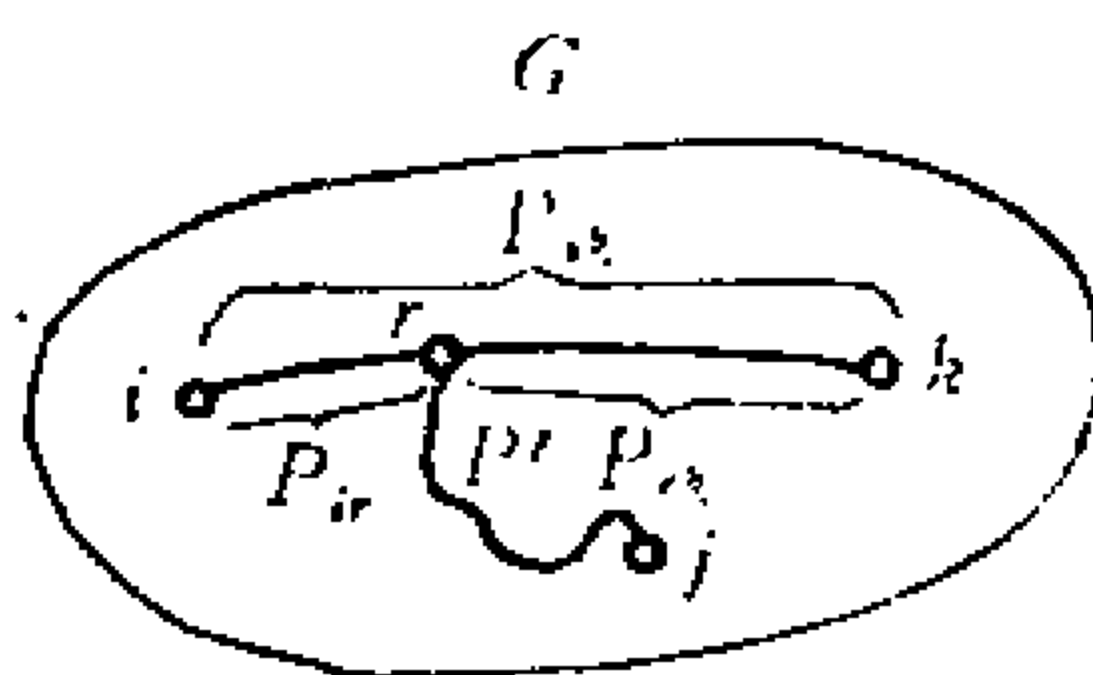


图1-6-1 路径 P_{ik}, P_{ir}, P_{rk} 和 P'

这一定理可推广如下。

定理1-6-8 设 i, j_1, \dots, j_m 和 k 是连通线图 G 的顶点,

则

$$\{P_{ij_1}\} \otimes \{P_{i_1j_2}\} \otimes \{P_{i_2j_3}\} \otimes \cdots \otimes \{P_{i_{m-1}j_m}\} = \{P_{ik}\} \quad (1-6-19)$$

再根据式 (1-6-4), 可将上述定理修改为

定理1-6-9 对于一个不可分图, 有

$$\{P_{ij_1}\} \otimes \{P_{i_1j_2}\} \otimes \cdots \otimes \{P_{i_{m-1}j_m}\} \otimes \{P_{ki}\} = \{C\} \quad (1-6-20)$$

例1-6-2 在图1-3-3所示的连通图中,

$$\{P_{23}\} = \{(c), (d), (a, e), (b, e)\}$$

连同例1-6-1给出的 $\{P_{12}\}$, 我们有

$$\begin{aligned} \{P_{13}\} &= \{P_{12}\} \otimes \{P_{23}\} = \{(e), (a, d), (b, c), (a, c), (b, d)\} \otimes \\ &\quad \{(c), (d), (a, e), (b, e)\} \\ &= \min \{(c, e), (d, e), (a), (b), (a, c, d), (a, b, d, e), \\ &\quad (b, c, d), (a, b, c, e)\} \\ &= \{(c, e), (d, e), (a), (b)\} \end{aligned}$$

现在我们来考虑一个不可分图 G' . 设 e 是 G' 的一条边, 其端点为 i 和 j , 如图1-5-7所示. 设 G'_e 是从 G' 中删去边 e 得到的线图. 因为 G'_e 是连通的, 在顶点 i 和 j 之间至少存在一条路径. 设 $\{P_{ij}\}$ 是 G'_e 中 i 和 j 之间所有路径的集体. 注意 (e) 本身就是 G' 中 i 和 j 之间的一条路径, 所以若 P 在 $\{P_{ij}\}$ 中, 则 $(e) \oplus P$ 是一个回路. 换句话说, 对 $\{P_{ij}\}$ 中任何 P , 存在 G' 中的一个回路 C , 使得

$$C \oplus (e) = P \quad (1-6-21)$$

设 $\{C\}$ 是由空集和 G' 中所有回路组成的集体. 因为 $(e) \oplus \phi = (e)$, 所以 $\min \{(e) \oplus C; C \in \{C\}\}$ 是顶点 i 和 j 之间所有路径的集体.

定义1-6-3 符号 $\{P_{[e]}\}$ 表示边 e 的两个端点之间所有路径的集体.

定理1-6-10 对于一个线图 G 中的任一条边 e ,

$$\{P_{[e]}\} = \min \{(e) \oplus C, C \in \{C\}\} \quad (1-6-22)$$

证明: 设 $P_i (\neq \phi)$ 是顶点 i 和 j 之间的一条路径, 则 $P_i \cup (e)$ 是 $\{C\}$ 中的一个回路. 空集 ϕ 在 $\{C\}$ 中. 故

$$\{(e) \oplus C, C \in \{C\}\} \supset \{P_{[e]}\} \quad (1-6-23)$$

$(e) \oplus C$ 是一个以边 e 的端点为端点的 M 图, 故

$$\min \{(e) \oplus C, C \in \{C\}\} = \{P_{[e]}\} \quad (1-6-24)$$

(证毕)

例1-6-3 在例1-6-1的不可分图中,

$$\begin{aligned} \{C\} = \{ & \phi, (a, b), (c, d), (a, c, e), (b, c, e), \\ & (b, d, e), (a, d, e) \} \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \{P_{[e]}\} &= \min \{(a) \oplus C, C \in \{C\}\} \\ &= \min \{(a), (b), (a, c, d), (c, e), (a, b, c, e), \\ &\quad (a, b, d, e), (d, e)\} \\ &= \{(a), (b), (c, e), (d, e)\} \end{aligned}$$

显然它与例1-6-2中的 $\{P_{13}\}$ 相同. 由例1-6-2可看出,

$$\{P_{12}\} \otimes \{P_{23}\} \otimes \{P_{13}\} = \{P_{13}\} \otimes \{P_{13}\} = \{C\}$$

定理1-6-11 对于一个线图 G 中的任一条边 e ,

$$\{P_{[e]}\} = \{(e) \oplus C, \text{回路 } C \text{ 或为空集, 或包含 } e\} \quad (1-6-25)$$

证明: 设 i 和 j 是边 e 的端点. 由定理1-6-10知, $(e) \oplus C$ 是一个 M 图 M_{ij} . 为使 M_{ij} 是一条路径, C 中必须包含边 e . 也就是说, 如果边 e 在 C 中, $(e) \oplus C$ 就不可能是一条路径 P_{ij} 和回路的无重边并. 另一方面, 对于任一条路径 P_{ij} , $(e) \oplus P_{ij}$ 是包含边 e 的一个回路. (证毕)

在例1-6-3中, 回路 (a, b) , (a, c, e) 和 (a, d, e) 都包含边 a .

因此, 据定理1-6-11, $\{P_{ij}\}$ 由 (a) , (b) , (c, e) 和 (d, e) 组成.

假设边 e_1, e_2, \dots, e_k 构成顶点 i 和 j 之间的一条路径, 则据定理1-6-3, i 和 j 之间所有路径的集体 $\{P_{ij}\}$ 是

$$\{P_{ij}\} = \{P_{[e_1]}\} \otimes \{P_{[e_2]}\} \otimes \dots \otimes \{P_{[e_k]}\} \quad (1-6-26)$$

考虑 $\{P_{ij}\}$ 中的一条路径 P , 可以看出:

$$\min \{P \oplus C; C \in \{C\}\}$$

不一定等于 $\{P_{ij}\}$, 除非 P 仅由一条边组成. 例如, 在图1-6-2所示的线图 G 中, 如果我们取 (a, b) 作为路径 P , 则在 G 中就不存在这样的回路 C , 使 $P \oplus C = (c, d)$. 但另一方面, 我们有下面的定理.

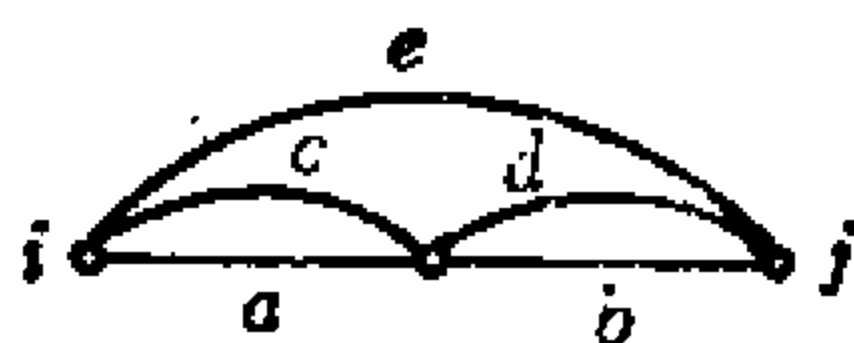


图1-6-2 一个线图

定理1-6-12 设 $\{E\}$ 是线图 G 中所有欧拉图和空集的集体. 假定 P 是 $\{P_{ij}\}$ 中的一条路径, 则

$$\{P_{ij}\} = \min \{P \oplus E; E \in \{E\}\} \quad (1-6-27)$$

证明: 设 P' 是 $\{P_{ij}\}$ 中的任一条路径, 则 $P \oplus P'$ 是一个欧拉图. 因此 $P \oplus P'$ 在 $\{E\}$ 中. (证毕)

路径集合的一个应用领域是开关理论. 用一个线图代表一个开关网络, 其中每一条边表示一个开关变量. 于是, 从顶点 i 到顶点 j 的一个开关函数 F_{ij} 可表示为

$$F_{ij} = \sum_{(q)} \text{路径 } P_{q,ij} \text{ 积} \quad (1-6-28)$$

其中 $\sum_{(q)}$ 表示对从 i 到 j 的所有路径求和, “路径 $P_{q,ij}$ 积” 是与路

径 $P_{q,ij}$ 中的边相联系的所有开关变量的乘积. 于是, 如果知道了顶点 i 和 j 之间的所有路径, 就能求出开关函数 F_{ij} .

例1-6-4 将图1-6-3中的线图看作一个开关网络，其中 a, b, c, d, e, f, g 代表开关变量。假定我们要求出开关函数 F_{12} 和 F_{14} 。从网络中，可以直接得到顶点1和2之间所有的路径及顶点1和4之间所有的路径。

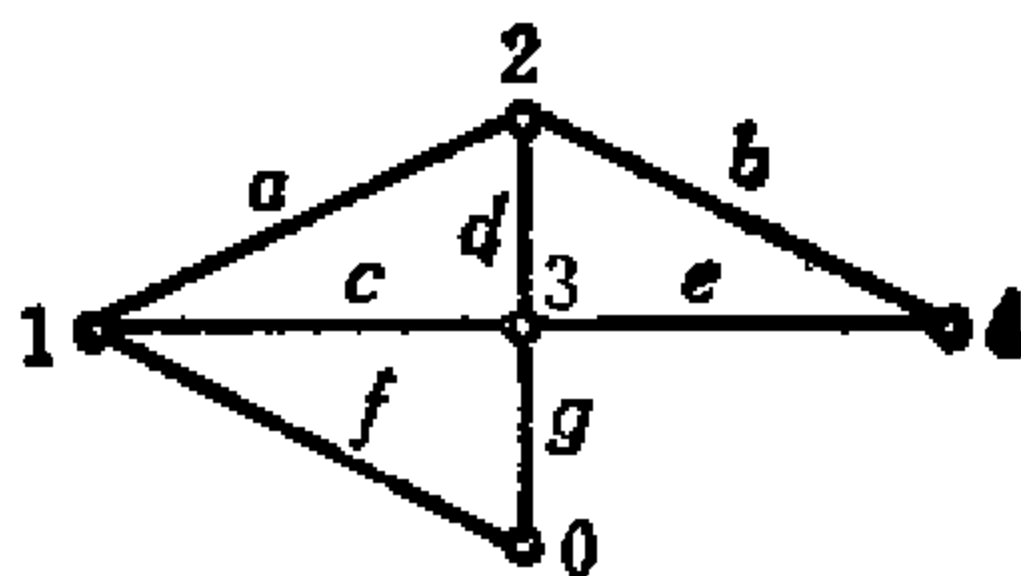


图1-6-3 一个开关网络

不过，我们也可以用式(1-6-2)

和定理1-6-7, 定理1-6-12来求出这些路径。首先求出 $\{E\}$ 为

$$\begin{aligned} \{E\} = \{ & \phi, (a, c, d), (c, f, g), (b, d, e), (a, d, f, g), \\ & (a, b, c, e), (b, c, d, e, f, g), (a, b, e, f, g) \} \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \{C\} = \min \{E\} = \{ & \phi, (a, c, d), (c, f, g), (b, d, e), (a, d, f, g), \\ & (a, b, c, e), (a, b, e, f, g) \} \end{aligned}$$

因为 $\{P_{12}\} = \{P_{[a]}\}$ ，故可得

$$\begin{aligned} \{P_{12}\} = \{P_{[a]}\} = \{ & (a), (c, d), (d, f, g), (b, c, e), \\ & (b, e, f, g) \} \end{aligned}$$

因此

$$F_{12} = a + cd + dfg + bce + befg$$

又因为 $\{P_{24}\} = \{P_{[b]}\}$ ，故

$$\begin{aligned} \{P_{24}\} = \min \{ & (b) \oplus C, C \in \{C\} \} = \{ (b), (d, e), (a, c, e), \\ & (a, e, f, g) \} \end{aligned}$$

据定理1-6-7,

$$\begin{aligned} \{P_{14}\} = \{P_{12}\} \otimes \{P_{24}\} = \{ & (a), (c, d), (d, f, g), (b, c, e), \\ & (b, e, f, g) \} \oslash \{ (b), (d, e), \\ & (a, c, e), (a, e, f, g) \} \\ = \{ & (a, b), (a, d, e), (c, e), (e, f, g), (b, c, d), \\ & (b, d, f, g) \} \end{aligned}$$

因此

$$F_{14} = ab + ade + ce + efg + bcd + bdfg$$

因为 (a, b) 是顶点 1 和 4 之间的一条路径, 应用定理 1-6-12, 可求得

$$\begin{aligned} \{P_{14}\} &= \{P_{\{ab\}}\} = \min \{(a, b) \oplus E, E \in \{E\}\} \\ &= \{(a, b), (b, c, d), (a, d, e), (b, d, f, g), \\ &\quad (c, e), (e, f, g)\} \end{aligned}$$

这个结果与上面求得的结果是一致的。

1-7 τ 图

一对路径的环和可以分为三类。一类是同一集体 $\{P_{ij}\}$ 中两条不同路径 P_1 和 P_2 的环和。在这种情况下, 我们已经知道, $P_1 \oplus P_2$ 或者是一个回路, 或者是回路的无重边并。另一类是路径 P_{ij} 和 P_{ik} 的环和, 其中 P_{ij} 是顶点 i 和 j 之间的路径, P_{ik} 是顶点 i 和 k 之间的路径。在上一节里, 我们已经知道, $P_{ij} \oplus P_{ik}$ 或者是顶点 i 和 k 之间的一条路径 P_{ik} , 或者是路径 P_{ik} 和若干回路的无重边并。现在, 我们要来研究第三种类型, 即路径 P_{rs} 和 P_{tu} 的环和。其中 P_{rs} 是顶点 r 和 s 之间的一条路径, P_{tu} 是顶点 t 和 u 之间的一条路径, 而顶点 r, s, t, u 是互不相同的。例如, 在图 1-6-3 中, (d, e) 是顶点 2 和 4 之间的一条路径, (f, g) 是顶点 1 和 3 之间的一条路径, 这两条路径的环和是 $(d, e) \oplus (f, g) = (d, e, f, g)$, 如图 1-7-1 所示, 它显然不是一条路径。

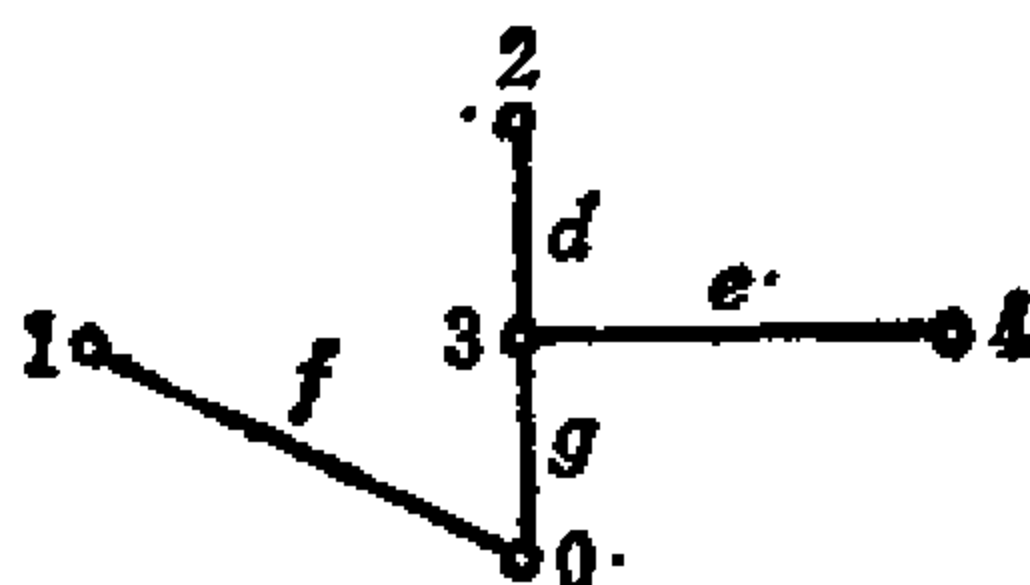


图 1-7-1 $(d, e) \oplus (f, g)$

在所得的线图 $P_{rs} \oplus P_{tu}$ 中, r, s, t, u 的度显然都是奇数, 因此 $P_{rs} \oplus P_{tu}$ 不是一条路径。现在, 我们来定义 τ 图。

定义 1-7-1 如果一个线图中, 既不包含回路, 又没有孤立

点，则称此线图为 τ 图。若在一个 τ 图中，所有度为奇数的顶点是 i_1, i_2, \dots, i_m ，则用符号 $\tau_{(i_1 i_2 \dots i_m)}$ 来表示这个 τ 图。

例如，图 1-7-1 所示的线图是一个 τ 图，其中度为奇数的顶点是 1, 2, 3, 4。因此，可以用符号 $\tau_{(1234)}$ 来表示这个线图。

定理1-7-1 在一个线图中，设 P_{rs} 是顶点 r 和 s 之间的一条路径， P_{tu} 是顶点 t 和 u 之间的一条路径，其中 r, s, t, u 互不相同，则 $P_{rs} \oplus P_{tu}$ 或者是一个 τ 图 $\tau_{(rstu)}$ ，或者是 τ 图 $\tau_{(rstu)}$ 和若干回路的无重边并。

这个定理可以推广为

定理1-7-2 设 τ 图 $\tau_{(i_1 i_2 \dots i_m)}$ 和 $\tau_{(j_1 j_2 \dots j_n)}$ 是同一线图的子图，若 $(i_1 i_2 \dots i_m) \oplus (j_1 j_2 \dots j_n)$ 非空，则 $\tau_{(i_1 i_2 \dots i_m)} \oplus \tau_{(j_1 j_2 \dots j_n)}$ 或者是一个 τ 图 $\tau_{((i_1 i_2 \dots i_m) \oplus (j_1 j_2 \dots j_n))}$ ，或者是 τ 图 $\tau_{((i_1 i_2 \dots i_m) \oplus (j_1 j_2 \dots j_n))}$ 和若干回路的无重边并。

考虑每个顶点的度，便可完成这个定理的证明。这里为了简单，在集合 $(i_1 i_2 \dots i_m)$ 作为下标时，我们省掉了其中的逗号。

例1-7-1 图1-7-2(a)中 $\tau_{(1240)}$ 和图1-7-1中 $\tau_{(1234)}$ 的环和是

$$\tau_{(1240)} \oplus \tau_{(1234)} = (b, f) \oplus (d, e, f, g) = (b, d, e, g)$$

它是 $\tau_{(30)}$ 和回路 (b, d, e) 的无重边并，如图1-7-2(c)所示。另外，图1-7-1中 $\tau_{(1234)}$ 和图1-7-2(b)中 $\tau_{(2340)}$ 的环和是

$$\tau_{(1234)} \oplus \tau_{(2340)} = (d, e, f, g) \oplus (c, d, e, f) = (c, g)$$

它是 $\tau_{(10)}$ ，如图1-7-2(d)所示。

定理1-7-1还可以用另一种方法推广。

定理1-7-3 设 $P_{i_1 j_1}, P_{i_2 j_2}, \dots, P_{i_k j_k}$ 是一个线图中顶点 i_p 和 j_p ($p=1, 2, \dots, k$) 之间的路径，并设 $(i_1, j_1) \oplus (i_2, j_2) \oplus \dots \oplus (i_k, j_k) \neq \phi$ ，则 $P_{i_1 j_1} \oplus P_{i_2 j_2} \oplus \dots \oplus P_{i_k j_k}$ 或者是一个 τ 图 $\tau_{((i_1 j_1) \oplus (i_2 j_2) \oplus \dots \oplus (i_k j_k))}$ ，或者是 $\tau_{((i_1 j_1) \oplus (i_2 j_2) \oplus \dots \oplus (i_k j_k))}$ 和若干回路的无重边并。

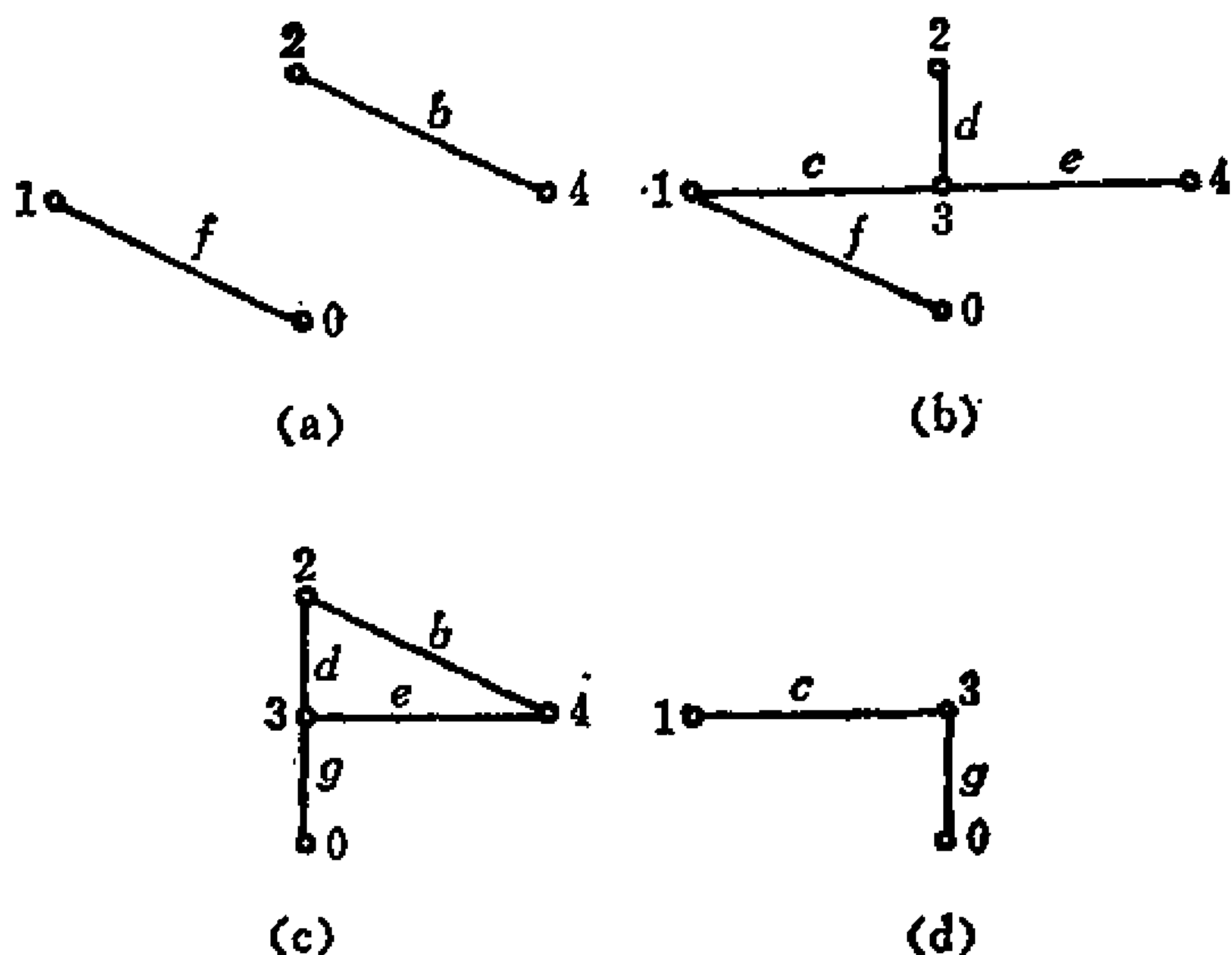


图1-7-2 τ 图及 τ 图和回路的无重边并

(a) $\tau_{(1240)}$ (b) $\tau_{(2240)}$ (c) $\tau_{(30)}$ 和回路 (b, d, e) 的无重边并; (d) $\tau_{(10)}$

考虑所得图中每个顶点的度, 便可完成这个定理的证明。

现在, 我们已经作好准备, 可以来讨论由若干集合组成的集体 $\{P_{t,r}\}$ ($r=1, 2, \dots, k$) 了。下面的定理给出 τ 图集体的一个重要性质。

定理1-7-4 设 r, s, t, u 是一个连通线图 G 中四个互不相同的顶点, $\{P_{r,s}\}$ 是顶点 r 和 s 之间所有路径的集体, $\{P_{t,u}\}$ 是顶点 t 和 u 间所有路径的集体, 则

$$\{P_{r,s}\} \otimes \{P_{t,u}\} = \{\tau_{(rstu)}\} \quad (1-7-1)$$

其中, $\{\tau_{(rstu)}\}$ 是 G 中所有 τ 图 $\tau_{(rstu)}$ 的集体。

为完成这个定理的证明, 只需说明, 对任何 $\tau_{(rstu)}$, 都存在一对路径 $P_{r,s}$ 和 $P_{t,u}$, 使得 $P_{r,s} \oplus P_{t,u}$ 是 τ 图。在证明这样一对路径

存在之前，我们先来研究 τ 图的一些重要性质。

引理1-7-1 设 τ 是一个具有 n_v 个顶点的连通 τ 图，则 τ 恰有 $n_v - 1$ 条边。

证明： 用数学归纳法。设 $\tau^{(2)}$ 是有两个顶点的连通 τ 图。由于不含回路， $\tau^{(2)}$ 必恰有一条边，因此在这种情形下引理成立。假定对所有具有 k 个顶点的连通 τ 图，引理为真，我们要证明，一个具有 $k+1$ 个顶点的连通 τ 图 $\tau^{(k+1)}$ 恰有 k 条边。因为 $\tau^{(k+1)}$ 不含回路，故在 $\tau^{(k+1)}$ 中，短路一条边 e （即删去边 e ，并将 e 的两个端点重合在一起），将得到一个具有 k 个顶点的连通 τ 图。根据归纳假设，这个 τ 图恰有 $k-1$ 条边。因此 $\tau^{(k+1)}$ 恰有 k 条边。这就证明了引理。 (证毕)

引理1-7-2 对于不同的顶点 i 和 j ，任何 τ 图 $\tau_{(ij)}$ 是 i 和 j 间的一条路径。

证明： 我们用加进一条边的方法来证明这个引理。由 $\tau_{(ij)}$ 的定义可知， $\tau_{(ij)}$ 中所有异于 i 和 j 的顶点的度均为偶数。因此，加进一条以 i 和 j 为端点的边 γ 后， $\tau_{(ij)} \cup (\gamma)$ 必为欧拉图。并且 $\tau_{(ij)} \cup (\gamma)$ 一定是一个回路。否则，如果 $\tau_{(ij)} \cup (\gamma)$ 是回路的无重边并，则 $\tau_{(ij)}$ 中必至少包含一个回路，这与 $\tau_{(ij)}$ 是 τ 图的假设矛盾。因此 $\tau_{(ij)}$ 是一条路径。这也表明， $\tau_{(ij)}$ 是连通的。

定理1-7-4的证明 因为据定理 1-7-1， $P_{rs} \oplus P_{tu}$ 或者是一个 τ 图 $\tau_{(rstu)}$ ，或者是 τ 图 $\tau_{(rstu)}$ 和若干回路的无重边并。所以我们只需证明，对于 $\{\tau_{(rstu)}\}$ 中任一 τ 图 $\tau_{(rstu)}$ ，存在 $\{P_{rs}\}$ 中一条路径 P_{rs} 和 $\{P_{tu}\}$ 中一条路径 P_{tu} ，使 $P_{rs} \oplus P_{tu} = \tau_{(rstu)}$ 。

假定 $\tau_{(rstu)}$ 是由 K 个最大连通子图组成的。注意，在 $\tau_{(rstu)}$ 中，度为奇数的顶点有四个。前面说过，在一个连通线图中，度为奇数的顶点个数必为偶数。因此，若 $K > 2$ ，则必至少有一个最大连通子图，它的每个顶点的度均为偶数。显然这个最大连通子图

是欧拉图，因而它或者是一个回路，或者是回路的无重边并。但是，根据定义， $\tau_{(rstu)}$ 中不可能包含回路。所以， K 必不大于2，

情形1 假定 $K=2$ 。设 g_1 和 g_2 是 $\tau_{(rstu)}$ 的两个最大连通子图，则顶点 r, s, t, u 中必恰有两个在 g_1 内，另两个在 g_2 内。因为在 g_1 和 g_2 中都没有回路，故 g_1 和 g_2 都是 τ 图。于是由引理7-1-2知， g_1 和 g_2 都是路径。根据这四个顶点不同的位置，可分为两种情况：

1.若 r 和 s 在 g_1 中，则由引理1-7-2知， $g_1=P_{rs}$ ， $g_2=P_{tu}$ ，这正是我们所求的路径。

2.若 r 和 t 在 g_1 中，则 $g_1=P_{rt}$ ， $g_2=P_{su}$ ，如图1-7-3(a)所示。由于我们假设存在着 r, s 间的路径 P_{rs} 和 t, u 间的路径 P_{tu} ，所以在这个线图（我们从中得到了 P_{rt} 和 P_{su} ）中，存在着一条连接 g_1 的一个顶点和 g_2 的一个顶点的路径。设这条路径是 P' ，如图1-7-3(b)所示。于是显然有两条所求的路径 P_{rs} 和 P_{tu} ，使 $P_{rs} \oplus P_{tu} = \tau_{(rstu)}$ 。

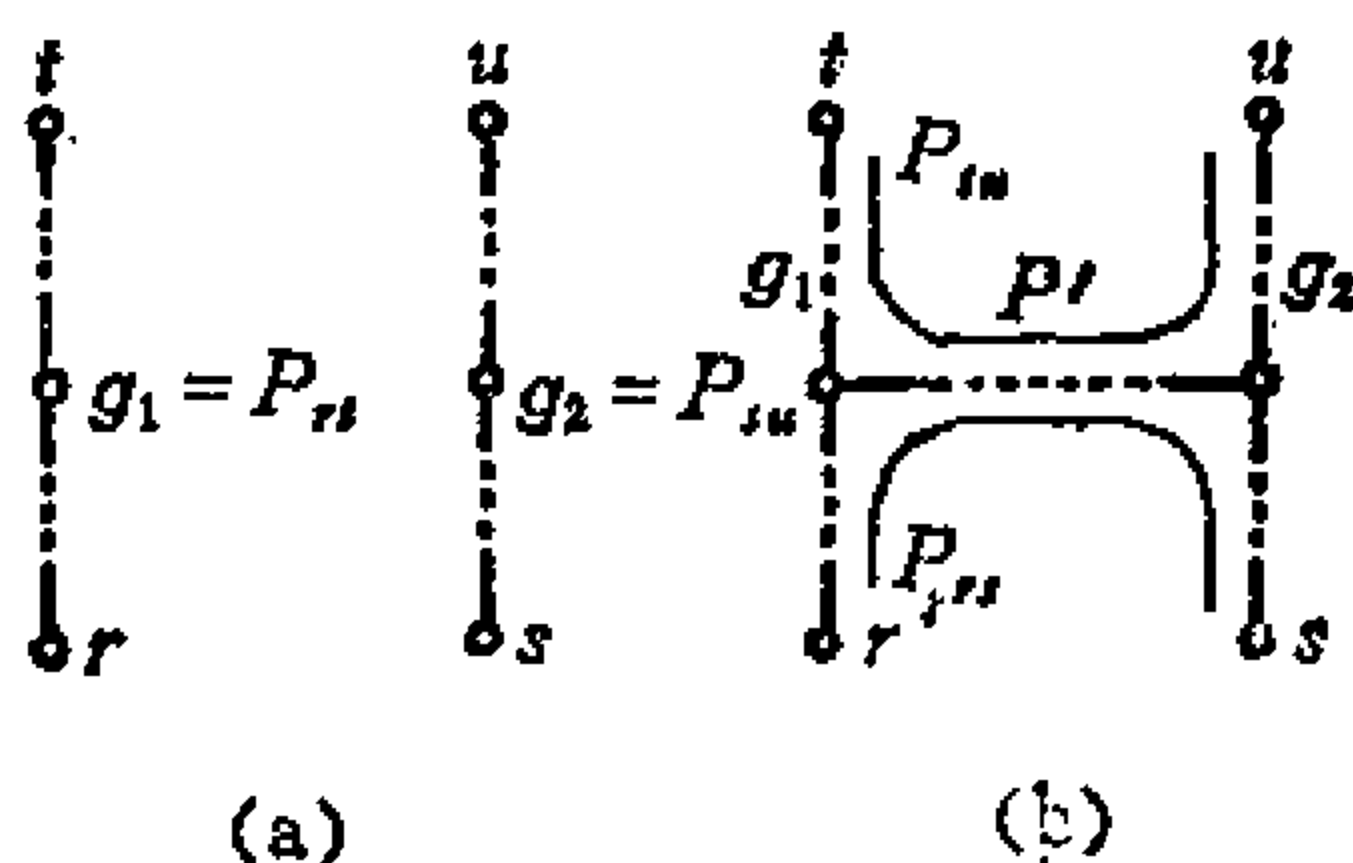


图1-7-3 $\tau_{(rstu)}$ 和路径 P_{rs}, P_{tu}

(a)情形1 (2)的 $\tau_{(rstu)}$ (b)存在路径 P'

情形2 假定 $K=1$ ，则 $\tau_{(rstu)}$ 是连通的。我们从顶点 r 开始取一个开边列，显然这个边列将终止于顶点 s, t 或 u 。用 g 表示由这个开边列中所有边组成的线图，由于 $\tau_{(rstu)}$ 不含回路，故 g 必为一条路径。并且线图 $[\tau_{(rstu)} - g]$ 不含回路，且恰有两个

顶点的度为奇数。因此 $[\tau_{(rstu)} - g]$ 必为 τ 图，从而由引理1-7-2知，它也是一条路径。 设这条路径和 g 分别为 P_1 和 P_2 ，注意 P_1 和 P_2 没有公共边。若 P_1 和 P_2 至少有两个公共顶点，则 $P_1 \cup P_2 = \tau_{(rstu)}$ 至少包含一个回路，与 $\tau_{(rstu)}$ 是 τ 图的假设矛盾。如果 P_1 和 P_2 没有公共顶点，则 $P_1 \cup P_2 = \tau_{(rstu)}$ 是一个分离图，也出现矛盾。因此， P_1 和 P_2 必恰有一个公共顶点，如图1-7-4(a)和(b)所示。

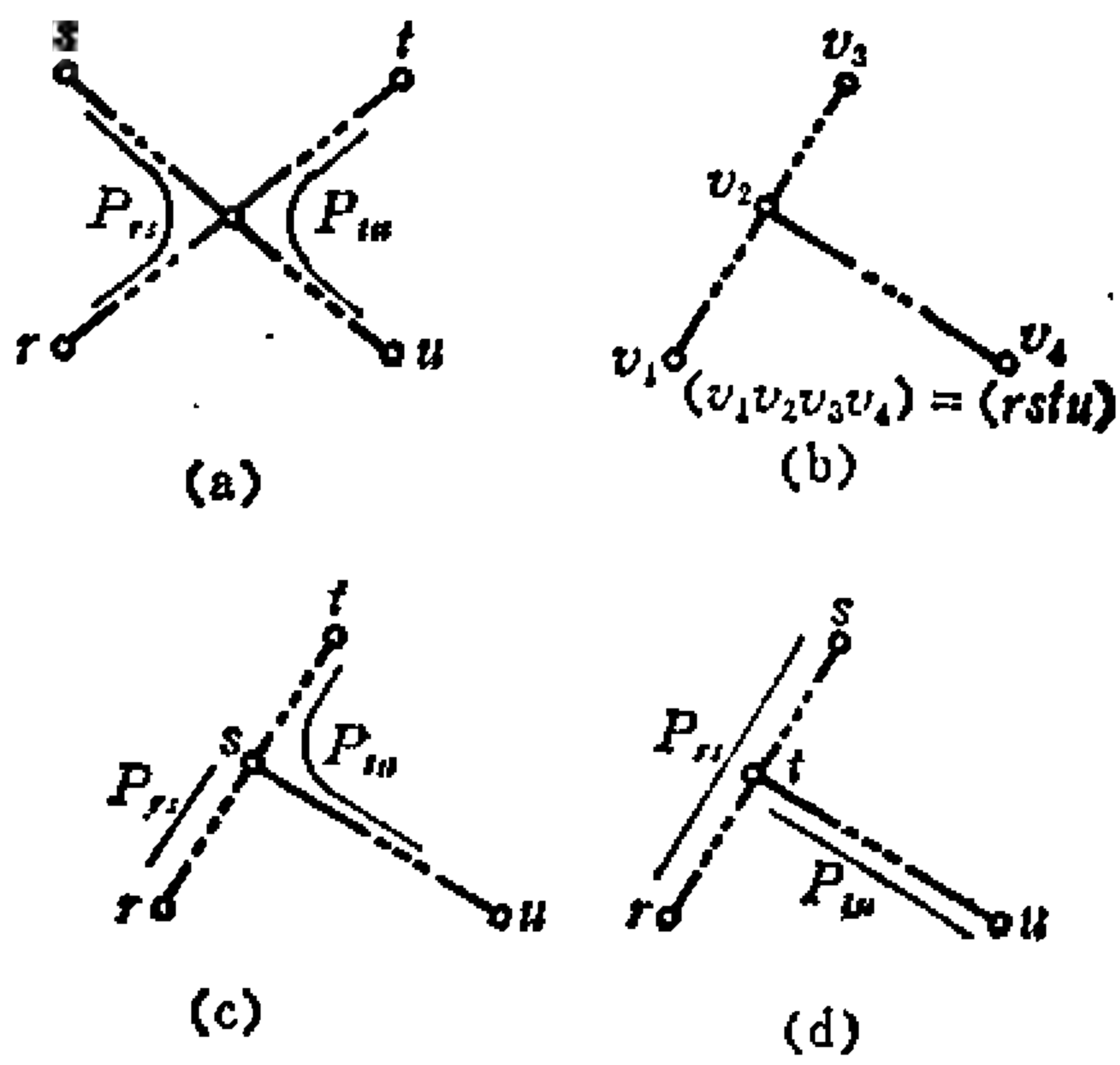


图1-7-4 $\tau_{(rstu)}$ 的结构
 (a) $P_1 \cup P_2$ 的一种结构; (b) $P_1 \cup P_2$ 的另一种结构;
 (c) 顶点 r, s, t, u 的位置; (d) 顶点 r, s, t, u 的位置

若 $\tau_{(rstu)}$ 如图1-7-4(a)所示，则显然存在路径 P_{rs} 和 P_{tu} ，使得 $P_{rs} \oplus P_{tu} = \tau_{(rstu)}$ ，故定理成立。假定 $\tau_{(rstu)}$ 如图1-7-4(b)所示，不失一般性，设 $v_1 = r$ ，则只有两种不同的类型，一种是 $v_2 = s$ ，另一种是 $v_2 = t$ 。若 $v_2 = s$ ，如图1-7-4(c)所示，则可得

到所求的路径 $P_{r,i}$ 和 $P_{i,n}$, 这就证明了定理。当 $v_2 = i$ 时, 如图 1-7-4(d) 所示, 也可以选择两条路径, 使定理成立。 (证毕)

从定理 1-7-4 的证明中, 可以得到以下结论。

引理 1-7-3 对于一个连通图, 有

$$\{P_{r,i}\} \otimes \{P_{i,n}\} = \{P_{r,i}\} \otimes \{P_{i,n}\} \quad (1-7-2)$$

例如, 图 1-7-2(a) 中的 $\tau_{(1240)}$ 显然可以由 $P_{10} \oplus P_{24}$ 得到, 这里 $P_{10} = (f)$, $P_{24} = (b)$ 。然而, 它也可以由 $P_{12} \oplus P_{40}$ 得到, 这里 $P_{12} = (d, f, g)$ 和 $P_{40} = (b, d, g)$ 是图 1-6-3 所示线图的两条路径。

以下定理给出了 τ 图的另一个有趣的性质, 即一个 τ 图总可以分解为若干条路径的无重边并。

定理 1-7-5 τ 图 $\tau_{(i_1 i_2 \cdots i_{2k})}$ 是 k 条路径 $P_{i_1 i_2}$, $P_{i_3 i_4}$, \cdots , $P_{i_{2k-1} i_{2k}}$ 的无重边并。这里, 集合 $(i_1, i_2, \cdots, i_{2k})$ 等于集合 $(j_1, j_2, \cdots, j_{2k})$ 。

证明: 用数学归纳法。当 $k = 1$ 时, 据引理 1-7-2, $\tau_{(i_1 i_2)}$ 即为路径 $P_{i_1 i_2}$ 。假定当 $k = m$ 时定理成立, 则当 $k = m + 1$ 时, 我们从顶点 i_1 出发, 在 $\tau_{(i_1 i_2 \cdots i_{2m+2})}$ 中找一个开边列。显然这个开边列将终止于顶点 $i_2, i_3, \cdots, i_{2m+2}$ 中的一个。假定它终止于顶点 i_r , $2 \leq r \leq 2m+2$ 。用 g 表示这个开边列中所有边组成的线图。显然 g 是一条路径 $P_{i_1 i_r}$, 而线图 $(\tau_{(i_1 i_2 \cdots i_{2m+2})} - g)$ 显然是一个 τ 图 $\tau_{(i_2 \cdots i_{r-1}, i_{r+1} \cdots i_{2m+2})}$, 它包含 $2m$ 个度为奇数的顶点。因此, 由归纳假设知, $(\tau_{(i_1 i_2 \cdots i_{2m+2})} - g)$ 是 m 条路径 $P_{i_1 i_2}, \cdots, P_{i_{2m-1} i_{2m}}$ 的无重边并。这样, 再加上一条路径 $P_{i_{2m+1} i_{2m+2}} = g$ (其中 $j_{2m+1} = i_1, j_{2m+2} = i_r$), 我们就可以说, $\tau_{(i_1 i_2 \cdots i_{2m+2})}$ 是 $m + 1$ 条路径 $P_{i_1 i_2}, \cdots, P_{i_{2m-1} i_{2m}}, P_{i_{2m+1} i_{2m+2}}$ 的无重边并。其中, $(i_1, i_2, \cdots, i_{2m+2}) = (j_1, j_2, \cdots, j_{2m+2})$ 。 (证毕)

例 1-7-2 由例 1-6-4, 图 1-6-3 所示线图的 $\{P_{12}\}$ 是

$$\{P_{12}\} = \{(a), (c, d), (d, f, g), (b, c, e), (b, e, f, g)\}$$

可以求得 $\{P_{34}\}$ 为

$$\{P_{34}\} = \{P_{\{e\}}\} = \{(e), (b, d), (a, b, c), (a, b, f, g)\}$$

因此

$$\begin{aligned} \{\tau_{(1234)}\} &= \{P_{12}\} \otimes \{P_{34}\} = \min \{P_r \oplus P_s, P_r \in \{P_{12}\}, P_s \in \{P_{34}\}\} \\ &= \{(a, e), (a, b, d), (b, c), (b, f, g), (c, d, e), \\ &\quad (d, e, f, g)\} \end{aligned}$$

图1-7-5画出了这些 τ 图。

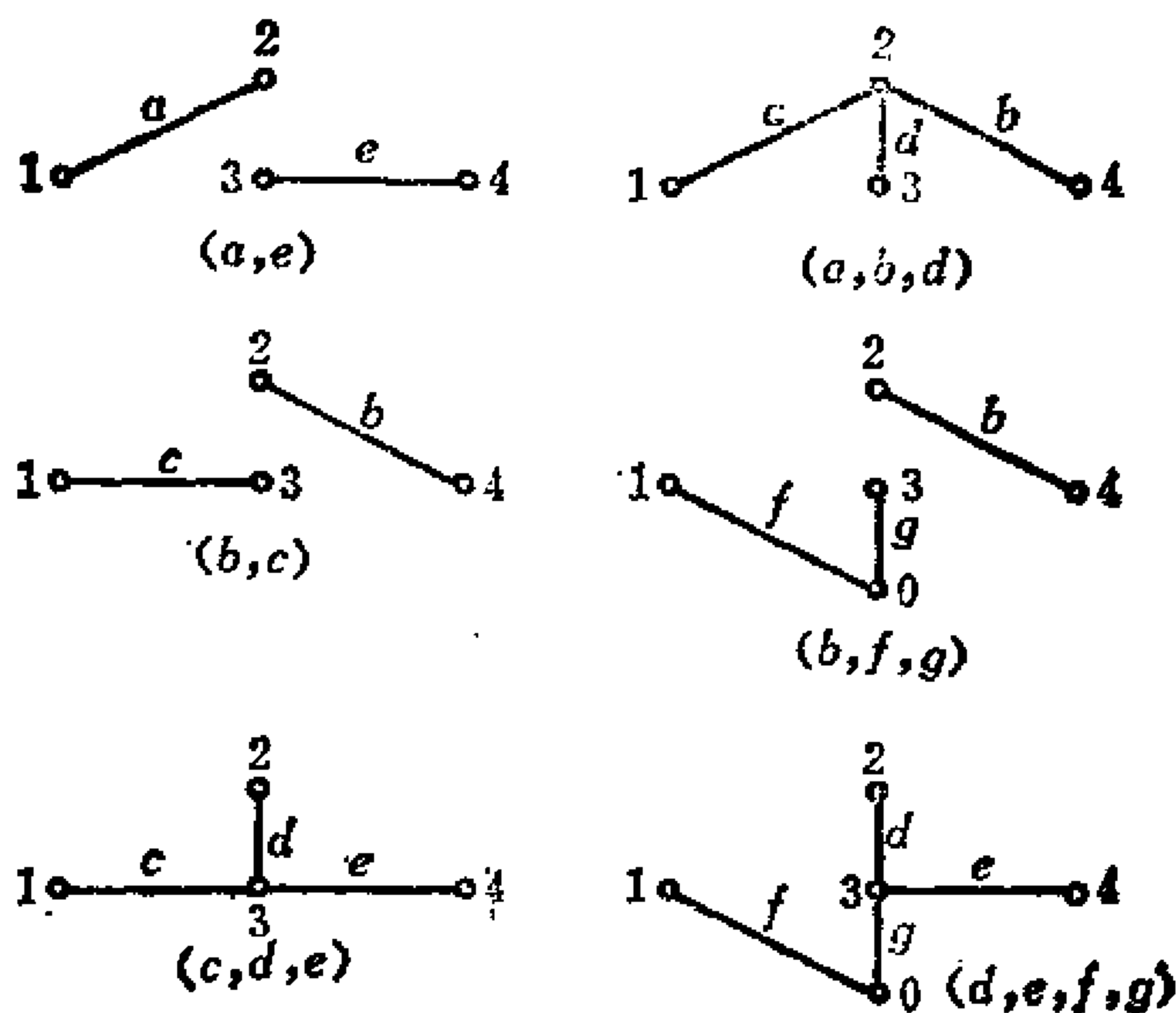


图1-7-5 $\{\tau_{(1234)}\}$

定理1-7-4还可作如下推广。

定理1-7-6 设 i_1, i_2, \dots, i_k 是一个连通线图中互不相同的 k 个顶点，则

$$\{P_{i_1 i_2}\} \otimes \{P_{i_2 i_3}\} \otimes \dots \otimes \{P_{i_{k-1} i_k}\} = \{\tau_{(i_1 i_2 \dots i_k)}\} \quad (1-7-3)$$

应用定理1-7-5和引理1-7-3，可以完成这个定理的证明。现

在可作进一步的推广。

定理1-7-7 设 i_1, i_2, \dots, i_k 是一个连通线图上的顶点，并设 $(i_1, i_2) \oplus (i_3, i_4) \oplus \dots \oplus (i_{k-1}, i_k)$ 是一个非空集合，则

$$\{P_{i_1 i_2}\} \otimes \{P_{i_3 i_4}\} \otimes \dots \otimes \{P_{i_{k-1} i_k}\} = \{\tau_{((i_1 i_2) \oplus (i_3 i_4) \oplus \dots \oplus (i_{k-1} i_k))}\} \quad (1-7-4)$$

证明： 设 $(i_1, i_2) \oplus (i_3, i_4) \oplus \dots \oplus (i_{k-1}, i_k) = (j_1, j_2, \dots, j_r)$ ，其中 $r \leq k$ 。据定理1-6-7，当 $i_u = i_m$ 时，有

$$\{P_{i_u i_u}\} \otimes \{P_{i_m i_m}\} = \{P_{i_u i_m}\}$$

因此可得

$$\{P_{i_1 i_2}\} \otimes \{P_{i_3 i_4}\} \otimes \dots \otimes \{P_{i_{r-1} i_r}\} = \{P_{i_1 i_2}\} \otimes \{P_{i_3 i_4}\} \otimes \dots \otimes \{P_{i_{k-1} i_k}\}$$

据定理1-7-4，上式左边等于 $\{\tau_{(i_1 i_2 \dots i_r)}\}$ ，也就是 $\{\tau_{((i_1 i_2) \oplus \dots \oplus (i_{k-1} i_k))}\}$ 。 (证毕)

定理1-7-4最终可推广为以下形式。

定理1-7-8 设 G 是一个连通线图。假定顶点集合的环和 $(i_1, i_2, \dots, i_m) \oplus (j_1, j_2, \dots, j_n)$ 非空，则

$$\{\tau_{(i_1 i_2 \dots i_m)}\} \otimes \{\tau_{(j_1 j_2 \dots j_n)}\} = \{\tau_{((i_1 i_2 \dots i_m) \oplus (j_1 j_2 \dots j_n))}\} \quad (1-7-5)$$

应用定理1-6-7和1-7-6，即可完成这个定理的证明。

例1-7-3 考虑图1-7-6所示的线图。现在 $\{\tau_{(1245)}\}$ 和 $\{\tau_{(1345)}\}$ 分别为

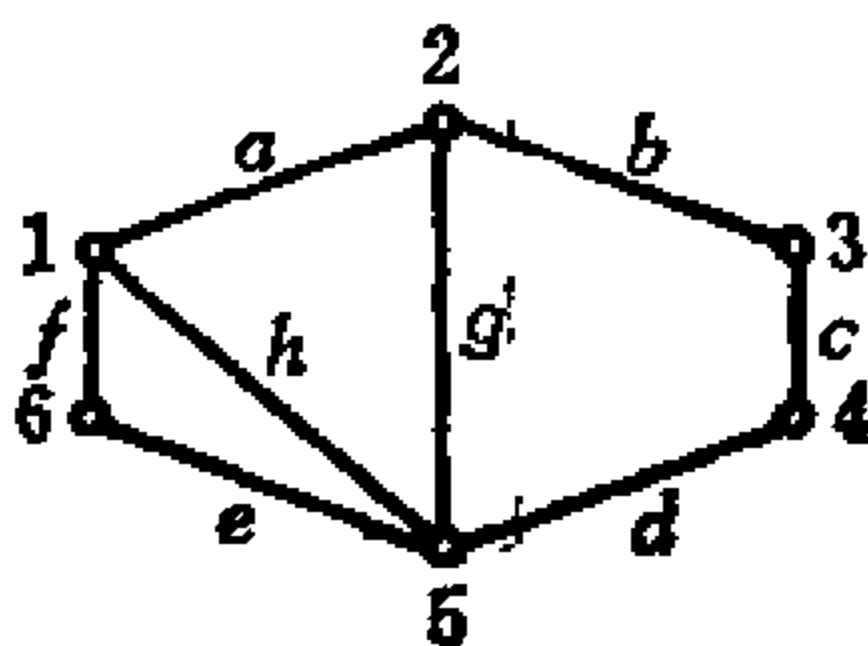


图1-7-6 一个连通线图

$$\{\tau_{(1245)}\} = \{(a,d), (a,b,c,g), (b,c,h), (b,c,e,f), \\ (d,g,h), (d,e,f,g)\}$$

$$\{\tau_{(1346)}\} = \{(a,b,d,e), (b,d,f,g), (a,b,d,f,h), \\ (a,c,e,g), (c,e,h), (c,f), (b,d,e,g,h)\}$$

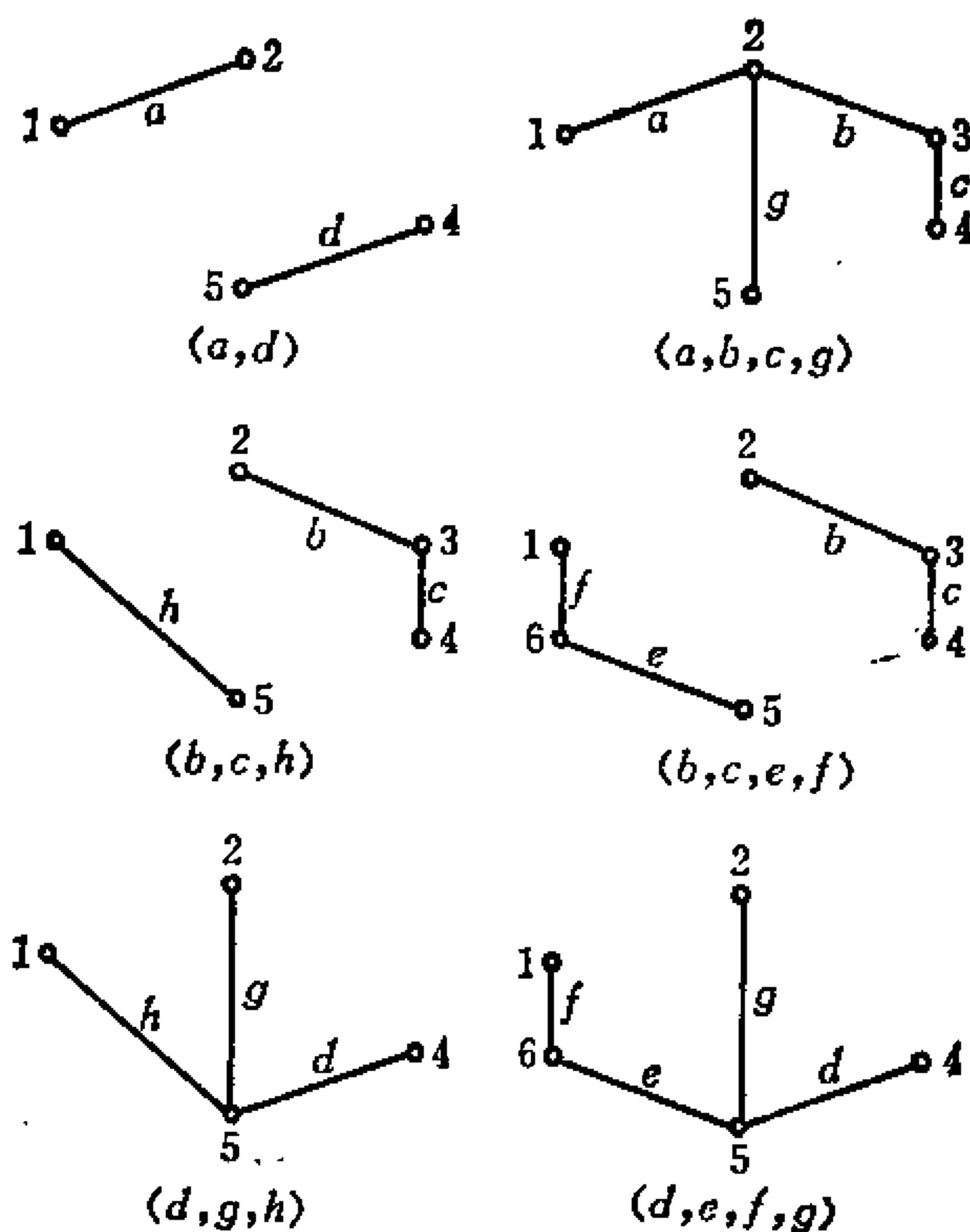


图1-7-7 $\{\tau_{(1245)}\}$

$\{\tau_{(1245)}\}$ 中所有的 τ 图如图1-7-7所示, $\{\tau_{(1346)}\}$ 中所有的 τ 图如图1-7-8所示。于是 $\{\tau_{(1245)}\}$ 和 $\{\tau_{(1346)}\}$ 的环积为

$$\begin{aligned}\{\tau_{(1245)}\} \otimes \{\tau_{(1345)}\} &= \{\tau_{(2356)}\} \\ &= \{(b,e), (a,b,f,g), (b,f,h), (c,d,e,g) \\ &\quad (a,c,d,e,h), (a,c,d,f), (c,d,f,g,h)\}\end{aligned}$$

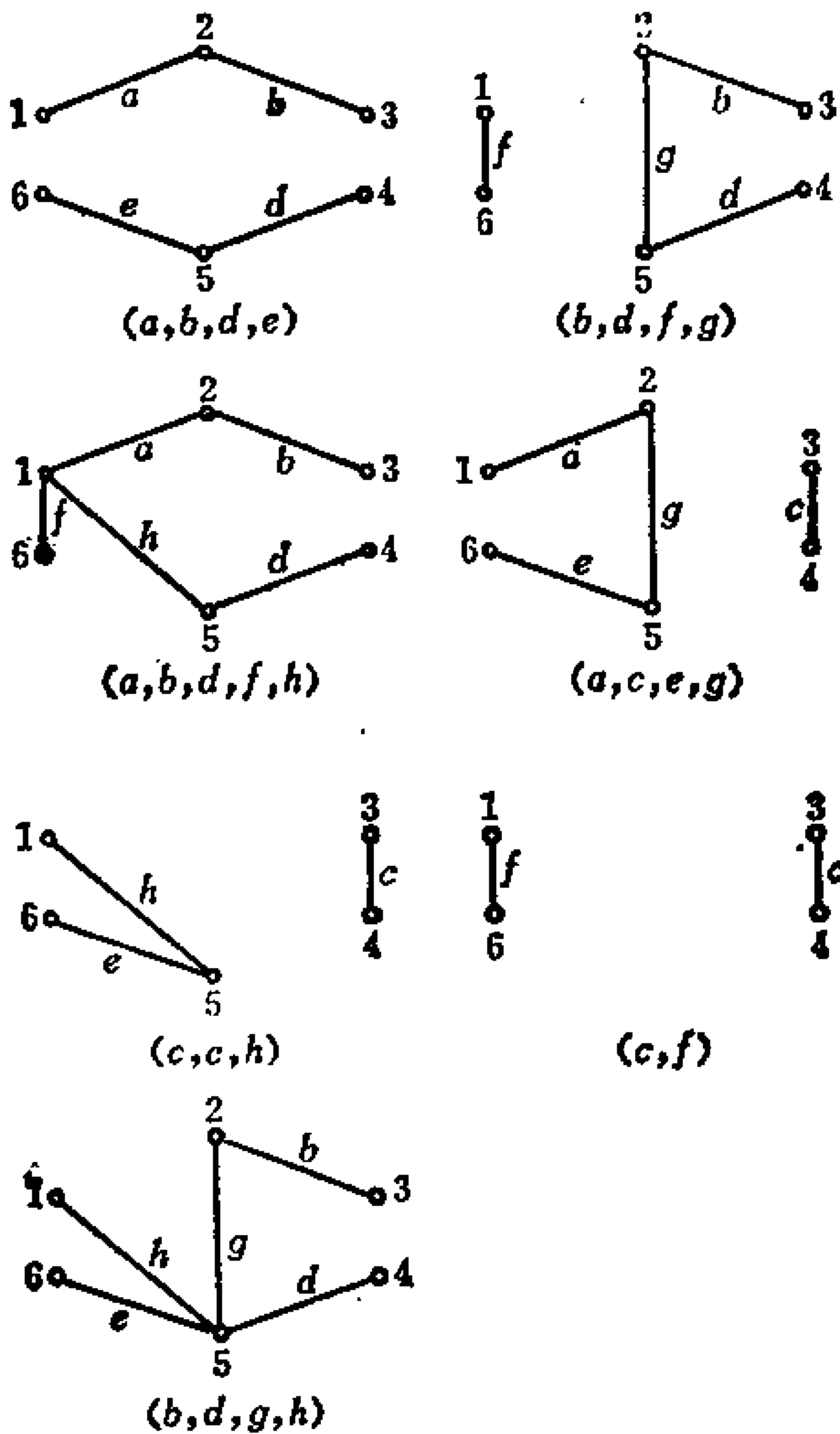


图1-7-8 $\{\tau_{(1245)}\}$

假定 $(1, 2, 3, \dots, n)$ 是一个不可分线图中所有顶点的集合。用符号 $\{\{\tau\}, \{C\}\}$ 表示由集体 $\{C\}$ 和所有可能的集体 $\{\tau_{(i_1, i_2, \dots, i_{2r})}\}$ 为元素组成的集合，其中 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{2r} \leq n$ ， $r = 1, 2, \dots, [n/2]$ 。这里 $[n/2]$ 表示最接近但不大于 $n/2$ 的整数。于是我们可以看到，集合 $\{\{\tau\}, \{C\}\}$ 满足以下条件：

1. 对于 $\{\{\tau\}, \{C\}\}$ 中任何集体 \mathcal{U}_1 和 \mathcal{U}_2 ，

$$\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_2 \otimes \mathcal{U}_1 \text{ 在 } \{\{\tau\}, \{C\}\} \text{ 中。}$$

2. 在 $\{\{\tau\}, \{C\}\}$ 中存在一个集体 $\mathcal{U}_0 = \{C\}$ ，使得对于 $\{\{\tau\}, \{C\}\}$ 中的任何集体 \mathcal{U} ，

$$\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}_0 = \mathcal{U}$$

3. 对于 $\{\{\tau\}, \{C\}\}$ 中任何集体 \mathcal{U} ，

$$\mathcal{U} \otimes \mathcal{U} = \mathcal{U}_0. \quad (\text{自反性})$$

4. 对于 $\{\{\tau\}, \{C\}\}$ 中任何集体 $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ 和 \mathcal{U}_3 ，

$$(\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2) \otimes \mathcal{U}_3 = \mathcal{U}_1 \otimes (\mathcal{U}_2 \otimes \mathcal{U}_3)$$

因此， $\{\{\tau\}, \{C\}\}$ 在环积运算下构成阿贝尔群。

习 题

1. 以下线图如果存在，则将它们画出，其顶点度数分别为 (a) $2, 2, 2, 2, 2$ ；(b) $2, 3, 4, 5, 6$ ；(c) $3, 3, 4, 5, 5, 5, 6$ 。

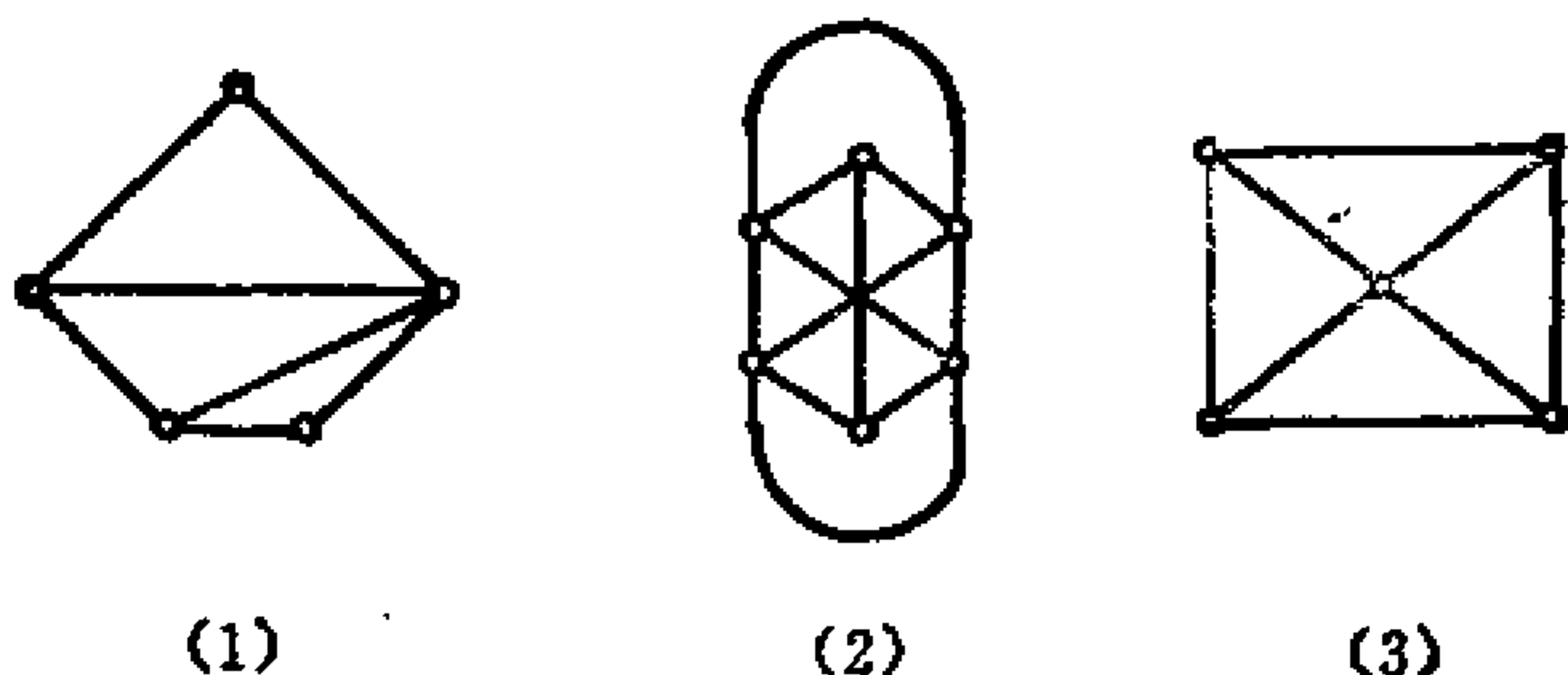
2. 在以下三个线图中，你能分别找出包含其所有边的开边列吗？

3. 证明有 n 个顶点的连通线图至少包含 $n - 1$ 条边。

4. 证明有 n 个顶点的连通线图，若其边数超过 $n - 1$ ，则它至少包含一个回路。

5. 设连通线图 G 有 $n (> 1)$ 个顶点。证明，若 G 由 $n - 1$ 条边组成，则 G 中至少有一个顶点的度为奇数。

6. 设 P 是一条路径，证明在 P 中任两点之间恰有一条路径。



图P-1-2

7. 设 G 是一个连通线图, i 和 j 是 G 中仅有的两个度为奇数的顶点。证明对于 i 和 j 之间的任一路径 P , $G - P$ 是一个欧拉图。

8. 设 G 是一个不含自环的线图。证明顶点 p 是割点, 当且仅当存在 G 的一个子图 g , 使得 g 的一个顶点和 $G - g$ 的一个顶点之间的每一条路径都经过顶点 p 。

9. 设 P 是连通线图 G 中顶点 i 和 j 之间的一条路径, 又设 $\{C\}$ 是 G 中所有的回路和空集的集体。证明, 一般说来, 集体 $\{P \oplus C; C \in \{C\}\}$ 不包含顶点 i 和 j 之间所有的路径。

10. 设 G 是一个可分线图, $\{P_{ij}\}$ 是 G 中顶点 i 和 j 间所有路径的集体。找出 $\min\{P_i \oplus P_j; P_i, P_j \in \{P_{ij}\}\}$ 是 G 中所有回路的集体的条件。

11. 在一个连通图中, 如果每两个顶点之间恰有一条边连接, 则称此连通图为完全图。设 G 是一个 n 阶完全图, 试证明或否定

$$(a) G \text{ 中有 } \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)!}{2} \binom{n}{k} \text{ 个回路。}$$

(b) G 中包含边 e 的回路有 $\sum_{k=1}^{n-2} k! \binom{n-2}{k}$ 个。

(c) G 中任意两点间的路径有 $\sum_{k=1}^{n-2} \frac{(n-2)!}{(n-k-2)!} + 1$ 条。

12. 证明定理 1-7-1。

13. 证明定理 1-7-2。

14. 证明定理 1-7-3。

15. 求出图 P-1-15 所示线图的所有欧拉图集体 $\{E\}$ 。

16. 求出图 P-1-15 所示线图的所有回路和空集的集体 $\{C\}$ 。

17. 求出图 P-1-15 所示线图中顶点 1 和 2 之间所有路径的集体 $\{P_{12}\}$ 。

18. 求出图 P-1-15 所示线图的 $\{P_{12}\}$, $\{P_{23}\}$ 和 $\{P_{13}\}$, 然后说明 $\{P_{12}\} \otimes \{P_{23}\} = \{P_{13}\}$

19. 在图 P-1-15 所示的线图中, 用以下两种方法求 $\{\tau_{(1234)}\}$:
(a) 利用已经求得的 $\{P_{13}\}$ 和 $\{P_{24}\}$, 计算 $\{P_{13}\} \otimes \{P_{24}\}$; (b) 利用已经求得的 $\{C\}$, 先计算 $\{P_{[a]}\}$ 和 $\{P_{[c]}\}$, 然后求出 $\{P_{[a]}\} \otimes \{P_{[c]}\} = \{\tau_{(1234)}\}$ 。

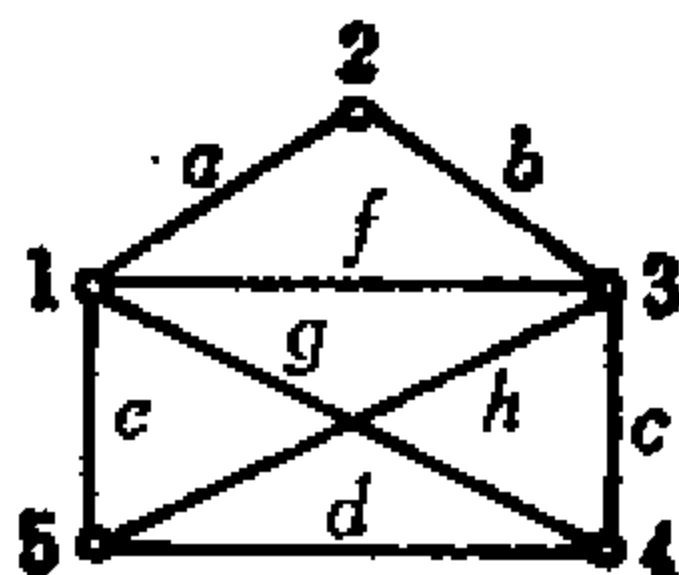


图 P-1-15

第二章 关联集和割集

2-1 关 联 集

前面，我们讨论了在环和运算下构成群的两个子图集体，即 $\{E\}$ 和 $\{E, M_{ij}\}$ 。在这一章里，我们要讨论另一种在环和运算下构成群的子图，称为割集和伪割。割集的性质与回路性质非常相似，伪割的性质则与路径性质几乎相同。这里我们集中讨论割集的性质。首先我们研究一种特殊类型的割集，称为关联集。因为不论是割集还是关联集，都不包含自环，为方便起见，我们作如下假设。

假设 除非特别说明，我们假设一个线图不含自环。

定义2-1-1 与一个顶点相关联的所有边的集合，称为与此顶点对应的关联集。用符号 $S(v)$ 表示与顶点 v 对应的关联集。

根据这个定义，如果没有边与顶点 v 关联，则与此顶点对应的关联集是空集。并且我们可以看到，在一个线图中，每个顶点有一个关联集。例如，在图2-1-1中，线图由五个顶点构成，因此有五个关联集。与顶点0对应的关联集 $S(0)$ 是 (f, g) 。与顶点1，

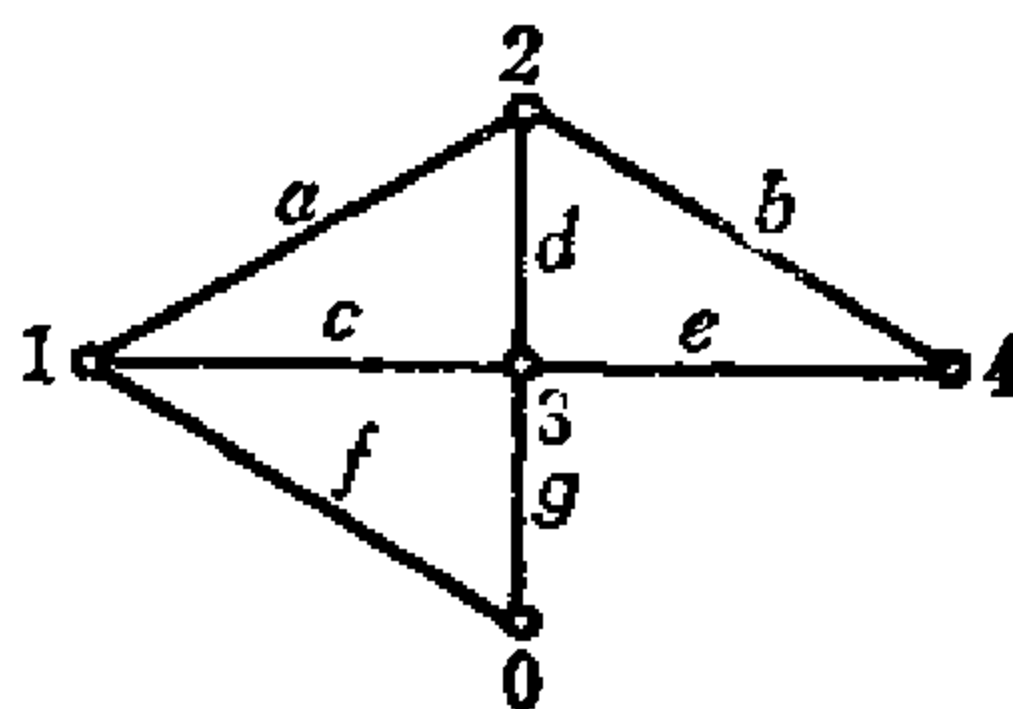


图2-1-1 一个线图

2, 3, 4对应的关联集 $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$, $S(4)$ 分别为 (a, c, f) , (a, b, d) , (c, d, e, g) 和 (b, e) 。

我们知道，两个欧拉图的环和是欧拉图。因此，两个回路的环和或者是回路，或者是回路的无重边并。另一方面，两个关联集的环和一般说来既不是关联集，又不是关联集的无重边并。为了说明这一点，我们考虑一个线图 G 中的关联集 $S(v_1)$ 和 $S(v_2)$ 。要使这两个关联集的环和 $S(v_1) \oplus S(v_2)$ 是一个关联集， $S(v_1) \oplus S(v_2)$ 中每一条边必须与一个顶点 v 关联。并且，在线图 G 中， $S(v_1) \oplus S(v_2)$ 里的这些边，必然只与顶点 v' 关联。换句话说，假定

$$S(v_1) = (e_1, e_2, \dots, e_p, a_1, a_2, \dots, a_m)$$

$$S(v_2) = (e_1, e_2, \dots, e_p, b_1, b_2, \dots, b_n)$$

注意边 e_1, e_2, \dots, e_p 既在 $S(v_1)$ 中，又在 $S(v_2)$ 中，则 $S(v_1) \oplus S(v_2) = (a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n)$ 。由于边 a_1, a_2, \dots, a_m 不与顶点 v_2 关联〔因为它们不在 $S(v_2)$ 中〕，故 $S(v_1) \oplus S(v_2)$ 不是与顶点 v_2 对应的关联集。同样， $S(v_1) \oplus S(v_2)$ 不是与顶点 v_1 对应的关联集。只有当 $S(v_1) \oplus S(v_2)$ 中的所有边都在与一个异于 v_1, v_2 的顶点 v' 关联的边集之中，并且没有其他的边与此顶点相关联时， $S(v_1) \oplus S(v_2)$ 才是一个关联集。因此，所给的图必是图2-1-2所示的那样的最大连通子图。

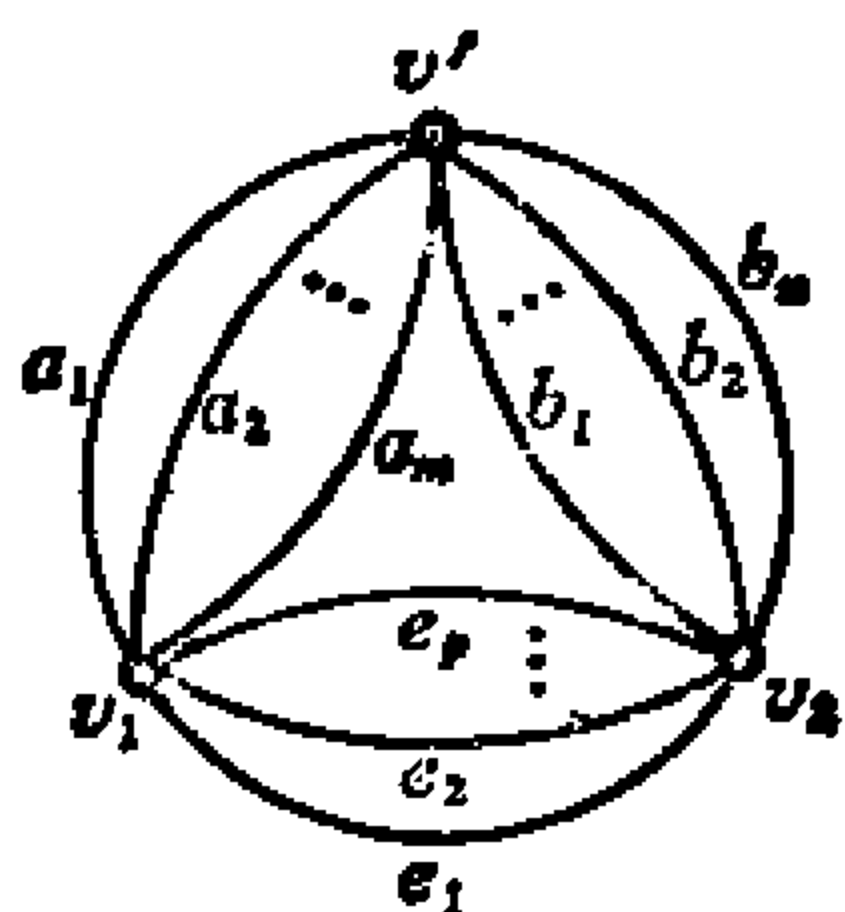


图2-1-2 $S(v_1) \oplus S(v_2)$

是关联集时线图的结构

因此，一般地说，两个关联集的环和不是关联集。假定 $S(v_1) \oplus S(v_2)$ 不是关联集，那么， $S(v_1) \oplus S(v_2)$ 是不是关联集的无重边并呢？如果 $S(v_1)$ 和 $S(v_2)$ 没有公共边，则 $S(v_1) \oplus S(v_2)$ 显然是关联集的无重边并。但是，这只是一种特殊情况。现在，我们假设 $S(v_1)$ 和 $S(v_2)$ 有公共边，正如我们在上

面的讨论中所作的那样。要使 $S(v_1) \oplus S(v_2)$ 成为关联集 $S(v_1)$ 的无重边并， $S(v_1) \oplus S(v_2)$ 必可分解为 k 个集合 $S(v'_1), S(v'_2), \dots, S(v'_k)$ ，其中 $k \geq 2$ ，使得 $S(v_1) \oplus S(v_2)$ 中的每一条边正好是这些集合中的一条边，并且对于 $r=1, 2, \dots, k$ ，集合 $S(v'_r)$ 必为与所给线图 G 中的顶点 v'_r 对应的关联集。这样，所给的线图必然包含图2-1-3所示的子图为其的一个最大连通子图。因此，我们可以得出结论，一般地说，两个关联集的环和既不是一个关联集，也不是关联集的无重边并。

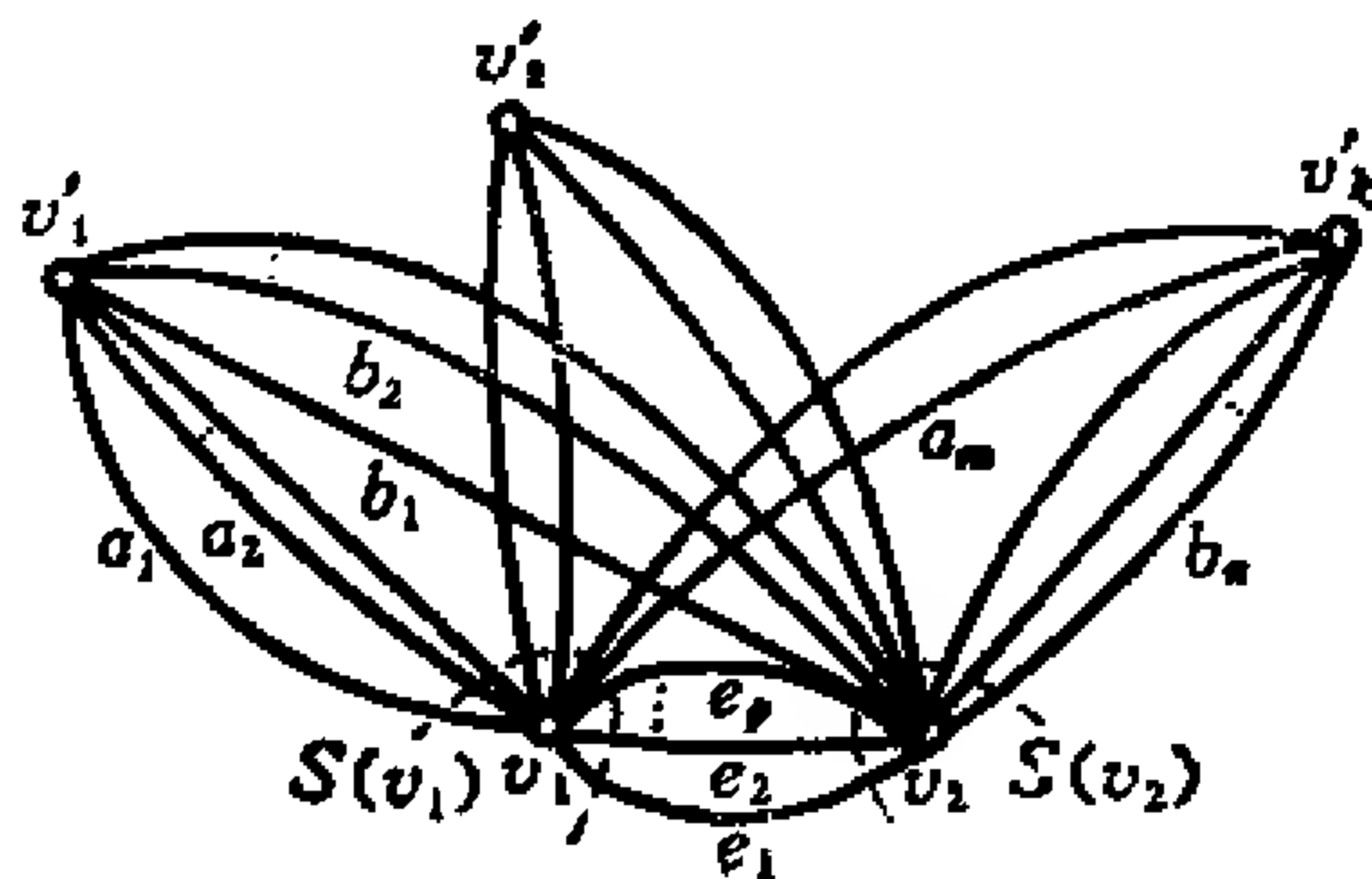


图2-1-3 $S(v_1) \oplus S(v_2)$ 是关联集的无重边并时线图的结构

2-2 割 集

为了定义割集，我们需要一个新的术语，称为线图的秩。

定义2-2-1 一个线图的秩等于 $n_v - \rho$ ，这里 n_v 是顶点数， ρ 是线图中最大连通子图的数目。例如，图2-1-1中线图的秩是4，图1-2-6中线图的秩是5，图1-3-5(a)中线图的秩是7。

假定从一个线图 G 中删除关联集 $S(v_1)$ 的所有边，则所得的图 G' 包含 G 中除 v_1 以外的所有顶点。于是，如果所得的图 G' 中最大连通子图的数目与原图 G 相同， G' 的秩就比 G 的秩少1。但

是，也有这样的线图，删除一个关联集的所有边后所得的图的秩，并不是比原图的秩少1。例如，图2-2-1中线图 G 的关联集 $S(v_1)$ 由 $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ 组成。删除这些边后，所得的图 G' 如图2-2-2所示。 G 的秩是6，而 G' 的秩是 $n_v - \rho = 6 - 2 = 4$ ，它比原图 G 的秩少2，而不是少1。

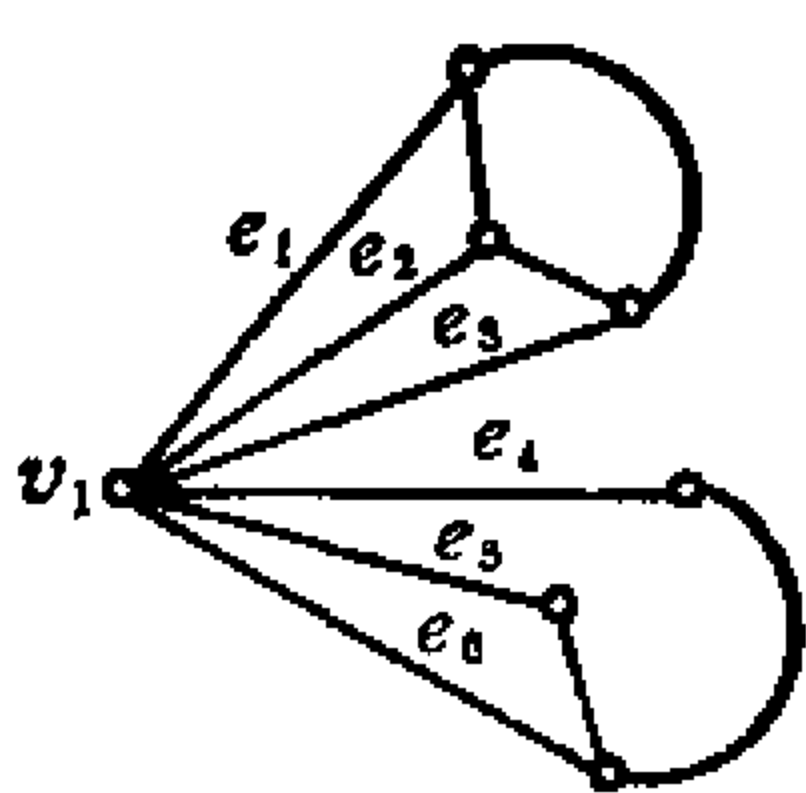


图2-2-1 可分图 G

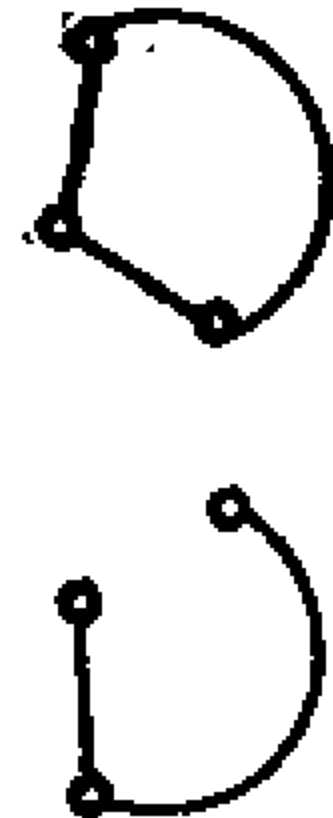


图2-2-2 从 G 中删除 $S(v_1)$ 的所有边得到的图

一个称为“割集”的边集合，具有这样的性质：删除其中所有的边，正好使秩减少1。下面是通常采用的割集定义。

定义2-2-2 如果线图 G 中的一个边集 S 具有这样的性质：
(1)从 G 中删除 S 的所有边，使秩正好减少1；(2) S 的任一真子集*都不具备性质(1)，则称边集 S 为割集。

例2-2-1 考虑图2-1-1中线图的集合 (b, c, d, f) ，可以看出：
(1)删除 (b, c, d, f) 中所有的边产生的线图如图2-2-3(a)所示，它的秩是 $5 - 2 = 3$ （注意原来线图的秩是4）；(2)删除 (b, c, d, f) 中的一部分而不是全部边，则使线图保持连通。例如，从原图中删除边 b, c, d 得到图2-2-3(b)所示的图，它的秩仍为4，没有改变。于是据定义知，集合 (b, c, d, f) 是一个割集。

在上述线图中，考虑集合 (b, e, g) 。删除 (b, e, g) 中的所有边产生的图如图2-2-3(c)所示，它的秩是 $4 - 1 = 3$ ，因此删除这个

* 集合 S 的真子集是不等于 S 的子集。

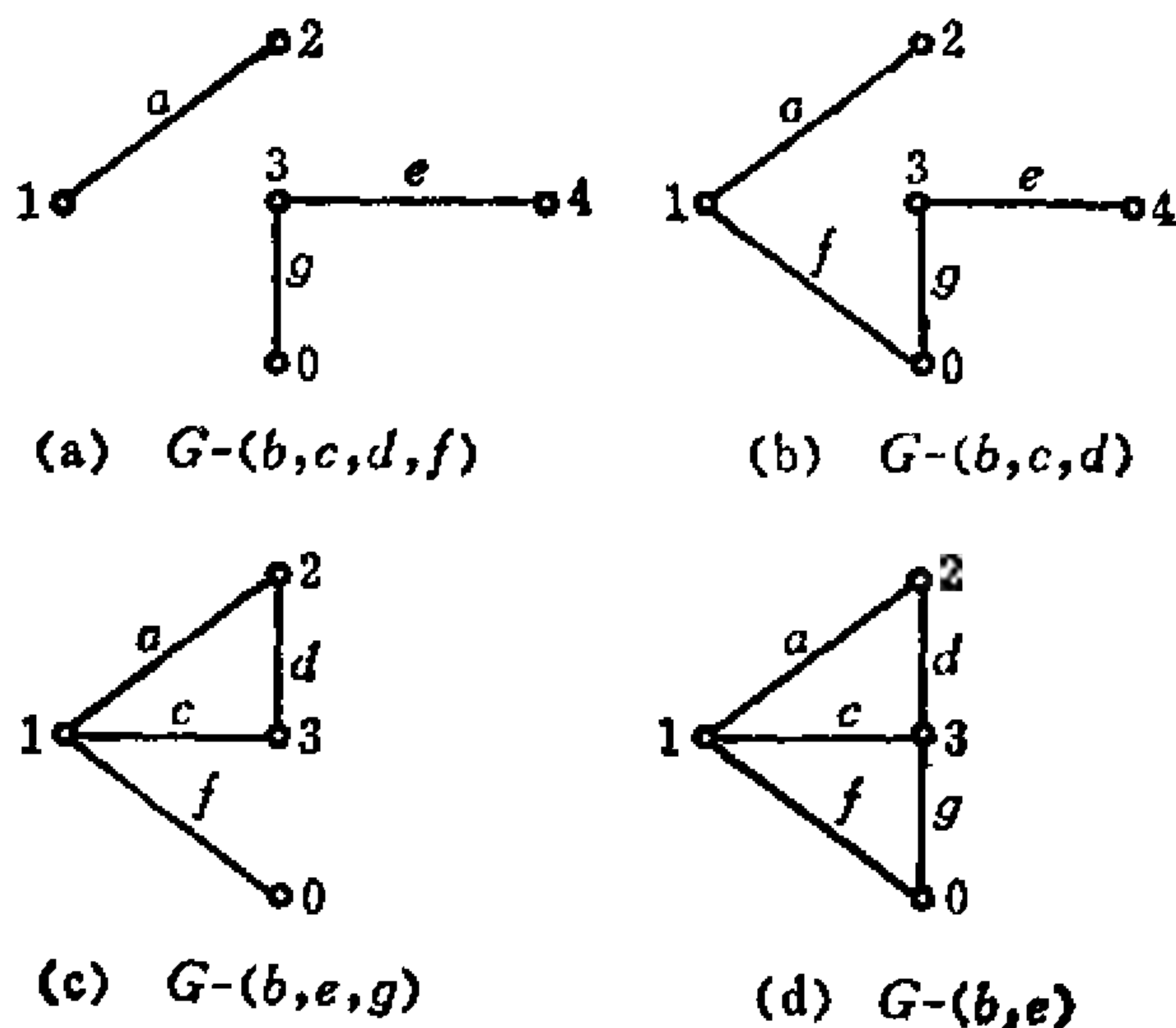


图2-2-3 线图 G 的子图

- (a) $G - (b, c, d, f)$; (b) $G - (b, c, d)$;
(c) $G - (b, e, g)$; (d) $G - (b, e)$

集合的所有边使秩正好减少1。但是，存在 (b, e, g) 的真子集 (b, e) ，删除子集 (b, e) 的所有边也使秩正好减少1，这可以从图2-2-3(d)的图看出来。因此，据定义， (b, e, g) 不是割集。

另一个例子是图2-2-1所示线图的关联集 $S(v_1)$ 。前面说过，这个线图的秩是6，而删除 $S(v_1)$ 中所有边得到的图如图2-2-2所示，它的秩是4。因此据定义， $S(v_1)$ 不是割集。

定义2-2-3 一个完全图是在其任一对顶点之间恰有一条边的线图。

例如，图2-2-4所示的线图是由五个顶点组成的完全图。显然超过两个顶点的完全图是不可分的。

设 G_c 是一个完全图， $\Omega_c = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ 是 G_c 中所有顶点

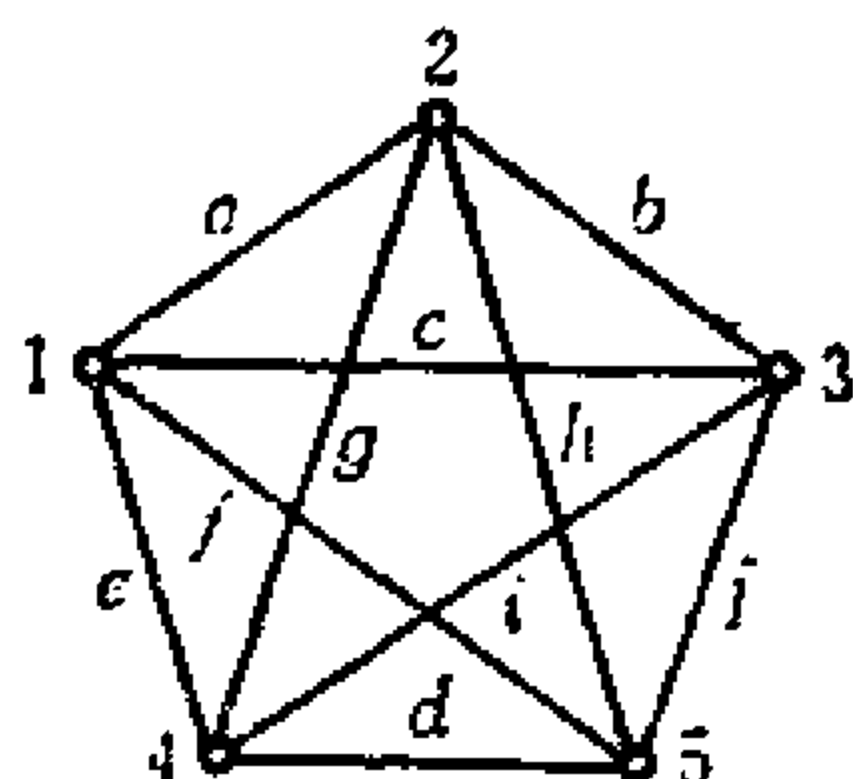


图2-2-4 一个完全图

的集合, 则 G_c 的秩是 $n-1$. 又设 Ω_1 是 Ω_c 的真子集, $\bar{\Omega}_1$ 是 Ω_c 中所有不在 Ω_1 里的顶点的集合, 因此

$$\Omega_1 \cup \bar{\Omega}_1 = \Omega_c \quad (2-2-1)$$

$$\Omega_1 \cap \bar{\Omega}_1 = \phi \quad (2-2-2)$$

例如, 对 $k < n$, 若 $\Omega_1 = (v_1, v_2, \dots, v_k)$, 则

$$\bar{\Omega}_1 = (v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n).$$

定义2-2-4 符号 $\mathcal{E}(\Omega_p \times \Omega_q)$ 表示所有从 Ω_p 中顶点连接到 Ω_q 中顶点的边的集合.

对于一个无向图, $\mathcal{E}(\Omega_p \times \Omega_q)$ 是连接 Ω_p 中顶点和 Ω_q 中的顶点的所有边的集合. 例如, 图2-2-4所示完全图的 Ω_c 是 $(1, 2, 3, 4, 5)$. 如果我们选取 $\Omega_1 = (1, 2, 3)$, 则 $\bar{\Omega}_1 = (4, 5)$, 对于这两个顶点集合, 我们有

$$\mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_1) = (a, b, c)$$

$$\mathcal{E}(\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_1) = (d)$$

$$\mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1) = (e, f, g, h, i, j)$$

显然 $\mathcal{E}(\Omega_c \times \Omega_c) = (a, b, c, d, e, f, g, h, i, j)$ 是所给完全图中所有的边. 子图 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 如图2-2-5所示.

现在考虑 G_c 的子图 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_1)$. 由于 G_c 是完全图, 在 Ω_1 的任两个顶点之间都有一条边相连, 这条边是在子图 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_1)$ 中. 因此在子图 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_1)$ 的任两个顶点之间有一条边. 这就是说, $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_1)$ 是一个完全图. 例如, 假定我们选取图2-2-4所示完全图的 $\Omega_1 = (1, 3, 4, 5)$, 则 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_1)$ 如图2-2-6所示, 显然它是一个包含四个顶点的完全图.

设 Ω_1 和 Ω_2 是 Ω_c 的真子集, 并且

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \phi \quad (2-2-3)$$

我们来考虑子图 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_2)$. 由于子图 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ 只包含图

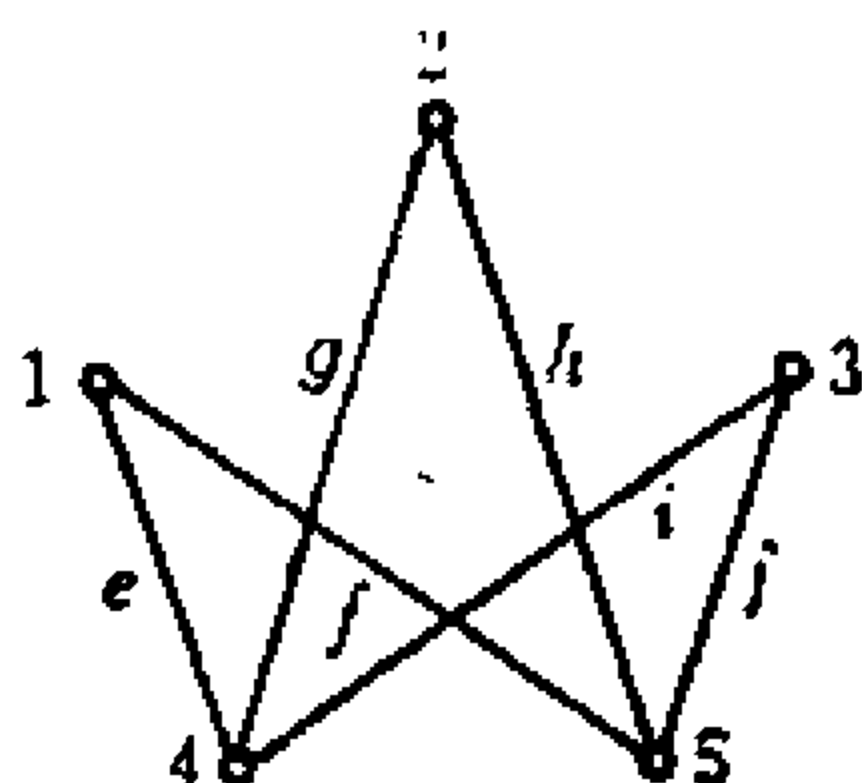


图2-2-5 子图 $\mathcal{G}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$

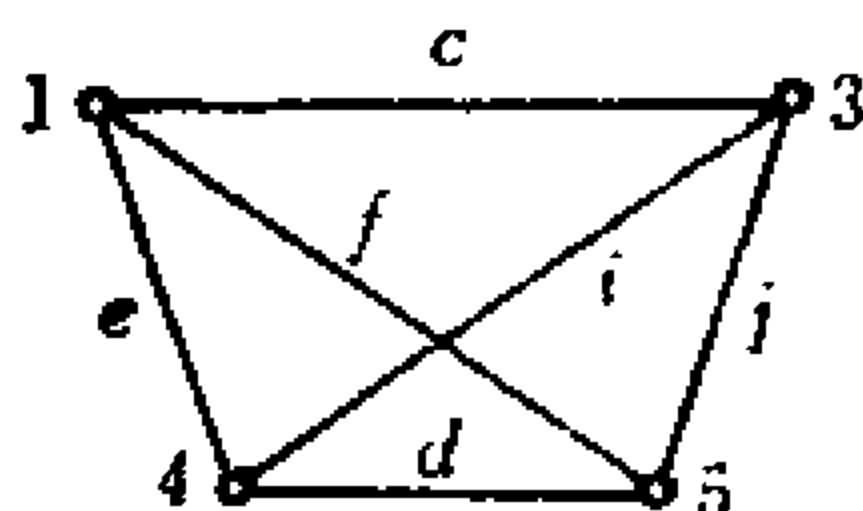


图2-2-6 一个子图

G_c 中每一条连接 Ω_1 中顶点和 Ω_2 中顶点的边，而连接 Ω_1 中任两个顶点的边都不在此子图中，故子图 $\mathcal{G}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ 不是完全图。下一个问题是：子图 $\mathcal{G}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ 是不是连通的？设 v_1 是 Ω_1 的顶点， v_2 是 Ω_2 的顶点，则由于 G_c 是完全图，在 G_c 中 v_1 和 v_2 间有一条边，而 $\mathcal{G}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ 是连接 Ω_1 的顶点和 Ω_2 的顶点的所有边的集合，故在子图 $\mathcal{G}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ 中， v_1 和 v_2 间必存在一条边，因此在顶点 v_1 和 v_2 之间存在着一一条路径（由一条边构成）。于是，为了回答上面提出的问题，我们只需要考查在 Ω_1 的任两个顶点之间和 Ω_2 的任两个顶点之间，是否都有 $\mathcal{G}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ 里的路径。设 v_{1a} 和 v_{1b} 是 Ω_1 的两个顶点， v_2 是 Ω_2 的一个顶点。因为在子图 $\mathcal{G}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ 中存在 v_{1a} 和 v_2 之间的一条边，又存在 v_2 与 v_{1b} 之间的一条边，所以我们可以说，在 v_{1a} 和 v_{1b} 之间至少存在一条路径。因此在子图 $\mathcal{G}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ 中， Ω_1 的任一对顶点之间，有一条路径。同样，在子图 $\mathcal{G}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ 中， Ω_2 的任一对顶点之间也有一条路径。于是我们可以作出结论：子图 $\mathcal{G}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ 连通的。例如，假定我们选取图2-2-4所示完全图的 $\Omega_1 = (1, 2)$ ， $\Omega_2 = (3, 4)$ ，则子图 $\mathcal{G}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ 如图2-2-7所示，显然它是连通的。

设 Ω_1 是 Ω_c 的真子集，且 $\bar{\Omega}_1 = \Omega_c - \Omega_1$ 。我们已经知道，子图 $\mathcal{G}(\Omega_1 \times \Omega_1)$ 是一个完全图。同样，子图 $\mathcal{G}(\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 也是一个完全图。又因为 $\Omega_1 \cap \bar{\Omega}_1 = \phi$ ，故完全图 $\mathcal{G}(\Omega_1 \times \Omega_1)$ 与 $\mathcal{G}(\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 没有

共同的边和顶点。例如，在图2-2-4中所给出的完全图里，假定 $\Omega_1 = (1, 2)$ ，则 $\bar{\Omega}_1 = (3, 4, 5)$ 。子图 $\mathcal{G}(\Omega_1 \times \Omega_1) \cup \mathcal{G}(\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 如图2-2-8所示，注意 $\mathcal{G}(\Omega_1 \times \Omega_1)$ 和 $\mathcal{G}(\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 没有共同的边和顶点。

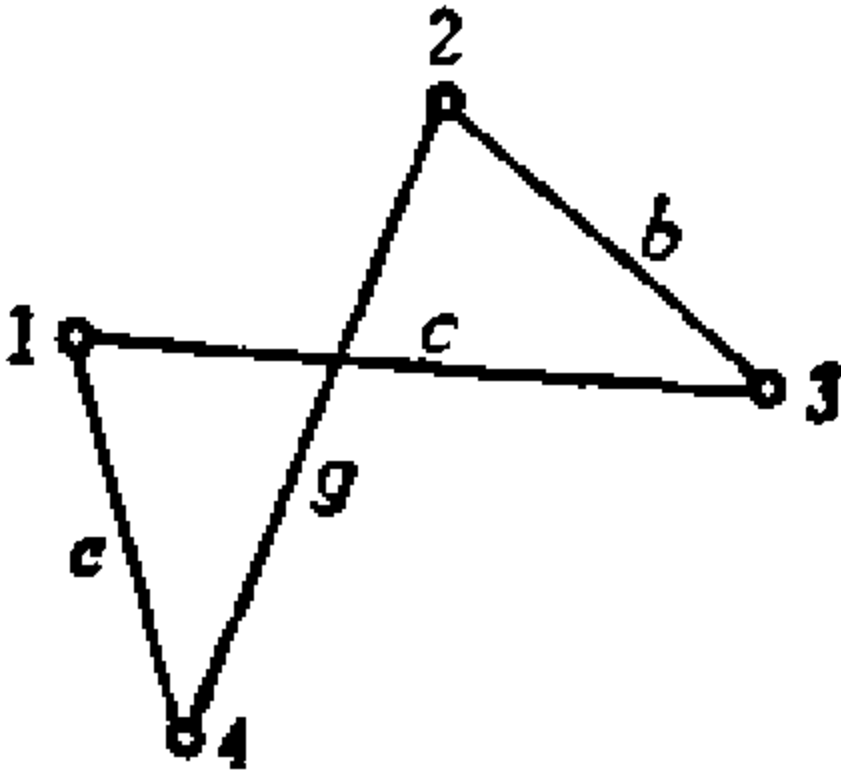


图2-2-7 子图 $\mathcal{G}(\Omega_1 \times \Omega_1)$

考虑完全图 G_c 的三个子图 $\mathcal{G}(\Omega_1 \times \Omega_1)$ ， $\mathcal{G}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ ，和 $\mathcal{G}(\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_1)$ ，设 e 是 G_c 中的任一条边，它的端点是 p 和 q 。根据 e 的端点的位置，我们分以下三种情况来讨论 e 的位置：

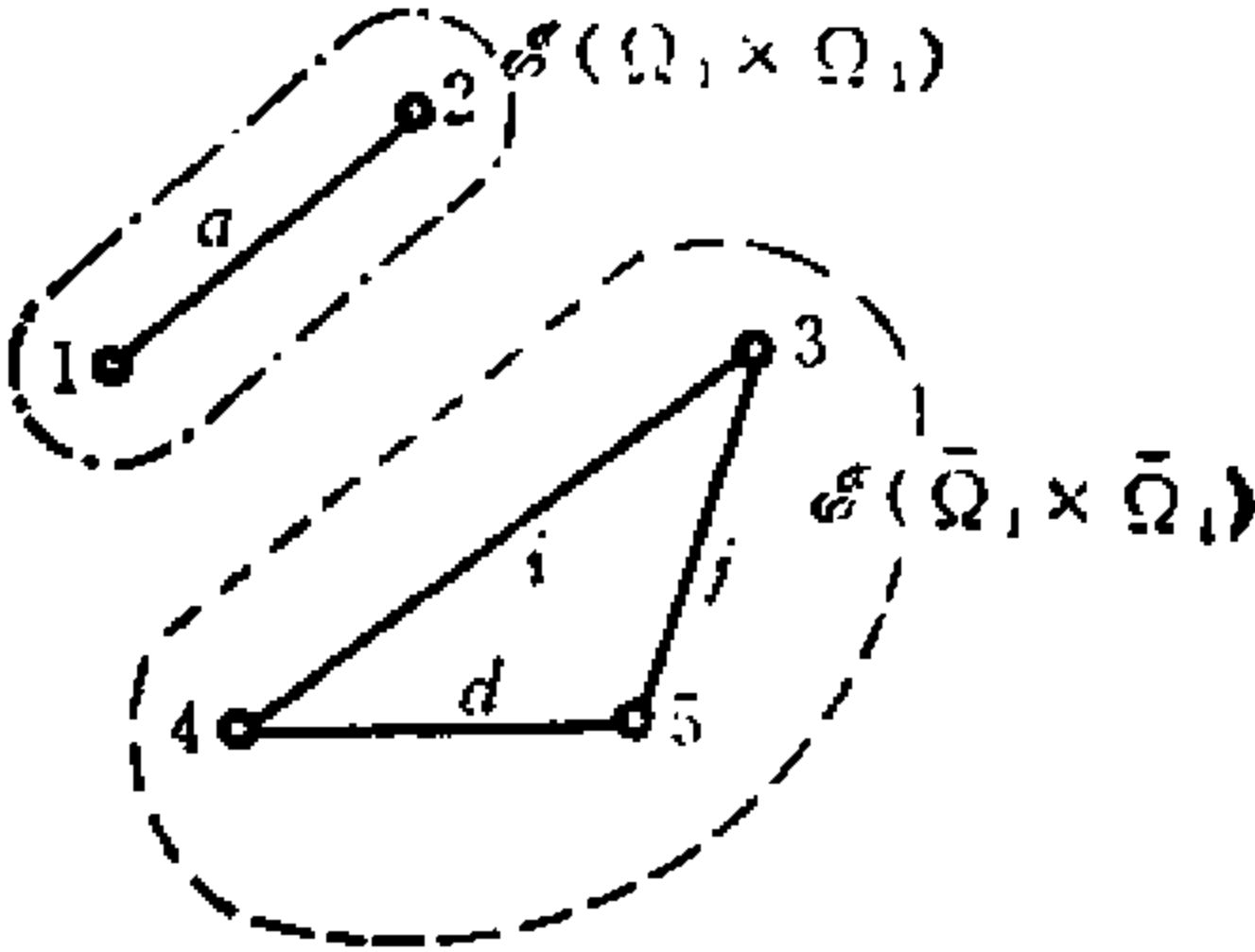


图2-2-8 一个子图

1. 假定顶点 p 和 q 都在 Ω_1 中，则边 e 在子图 $\mathcal{G}(\Omega_1 \times \Omega_1)$ 中，而不在 $\mathcal{G}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 和 $\mathcal{G}(\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 中。
2. 假定 p 和 q 都在 $\bar{\Omega}_1$ 中，则显然边 e 在 $\mathcal{G}(\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 中，而不在另外两个子图中。
3. 假定顶点 p 在 Ω_1 中，顶点 q 在 $\bar{\Omega}_1$ 中，则边 e 必在 $\mathcal{G}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 中，而不在 $\mathcal{G}(\Omega_1 \times \Omega_1)$ 和 $\mathcal{G}(\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 中。

于是我们可以作出结论， G_c 的每一边恰在子图 $\mathcal{G}(\Omega_1 \times \Omega_1)$ ，

$\mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 和 $\mathcal{E}(\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 之一中, 也就是说,

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_1) \cup \mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1) \cup \mathcal{E}(\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_1) \\ &= \mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_1) \oplus \mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1) \oplus \mathcal{E}(\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_1) = \mathcal{E}(\Omega_c \times \Omega_c) \end{aligned} \quad (2-2-4)$$

根据定义, $\mathcal{E}(\Omega_c \times \Omega_c)$ 就是所给完全图 G_c . 因此, 如果我们从 G_c 中删除 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 的所有边, 就得到 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_1) \cup \mathcal{E}(\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_1)$. 也就是

$$\mathcal{E}(\Omega_c \times \Omega_c) - \mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1) = \mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1) \cup \mathcal{E}(\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_1) \quad (2-2-5)$$

现在我们已为证明集合 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 是割集作好了准备. 根据割集的定义, 我们需要证明, 删除 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 的所有边使 G_c 的秩恰好减少 1. 并且, 我们还要证明, 如果只从 G_c 中删除 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 的一部分而不是全部边, 则不会减少秩.

假定 Ω_1 至少由两个顶点组成, 而 $n \geq 4$. 由式 (2-2-5) 可以看出, 从 G_c 中删除 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 的所有边产生子图 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_1) \cup \mathcal{E}(\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_1)$, 因此所得的图包含 G_c 的所有顶点. 我们已经看到, 子图 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_1)$ 和 $\mathcal{E}(\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 没有公共顶点, 因此子图 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_1) \cup \mathcal{E}(\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 包含两个最大连通子图. 于是所得图 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_1) \cup \mathcal{E}(\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 的秩是 $n-2$. 注意 G_c 的秩是 $n-1$. 这就证明了删除集合 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 的所有边恰使秩减少 1.

因为 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 中任一条边, 是连接在 Ω_1 的一个顶点和 $\bar{\Omega}_1$ 的一个顶点之间的边, 如果我们把集合 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 的任一条边, 添加到两个最大连通子图 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_1)$ 和 $\mathcal{E}(\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 中, 这两图就被连接在一起, 变成一个连通图, 显然其秩为 $n-1$. 于是从 G_c 中删除 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 的一部分而不是全部边, 就不会使它的秩减少. 因此根据定义, 集合 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 是一个割集.

我们曾假设 Ω_1 和 $\bar{\Omega}_1$ 至少包含两个顶点. 现在我们要考虑这样一种情况, 即 Ω_1 由一个顶点 (比如说 v_1) 构成, 也就是 $\Omega_1 = (v_1)$. 则集合 $\mathcal{E}[(v_1) \times (v_1)]$ 是与顶点 v_1 关联的所有边的集合,

也就是说，这个集合是与顶点 v_1 对应的关联集。因为 $\mathcal{E}[(v_1) \times (v_1)] = \phi$ ，由式(2-2-5)，我们可以看到，从 G_c 中删除这个关联集中所有的边产生一个连通图 $\mathcal{E}[(\bar{v}_1) \times (\bar{v}_1)]$ ，它由 $n-1$ 个顶点构成，于是所得的图的秩比 G_c 少 1。并且，将此关联集 $\mathcal{E}[(v_1) \times (\bar{v}_1)]$ 的任一条边添入所得的图 $\mathcal{E}[(\bar{v}_1) \times (\bar{v}_1)]$ 中，结果得到一个包含顶点 v_1 的连通图。因此，这个线图的秩是 $n-1$ 。于是，根据割集的定义，关联集 $\mathcal{E}[(v_1) \times (\bar{v}_1)]$ 是一个割集。换句话说，一个完全图的任一关联集是割集。

定理2-2-1 设 Ω_1 是完全图 Ω_c 的一个真子集，又设 $\bar{\Omega}_1 = \Omega_c - \Omega_1$ ，则 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 是一个割集。

例2-2-2 考虑图2-2-4所示的完全图。注意 $\Omega_c = (1, 2, 3, 4, 5)$ 。设 $\Omega_1 = (1, 4)$ ，则 $\bar{\Omega}_1 = (2, 3, 5)$ ， $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1) = (a, c, d, f, g, i)$ 。删除 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 中的所有边，得到图2-2-9所示的线图。从这个线图中，我们可以清楚地看到， $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 是一个割集。

设 $\Omega_2 = (1)$ ，则 $\bar{\Omega}_2 = (2, 3, 4, 5)$ ，而 $\mathcal{E}(\Omega_2 \times \bar{\Omega}_2) = (a, c, e, f)$ ，这是一个关联集，也是一个割集。

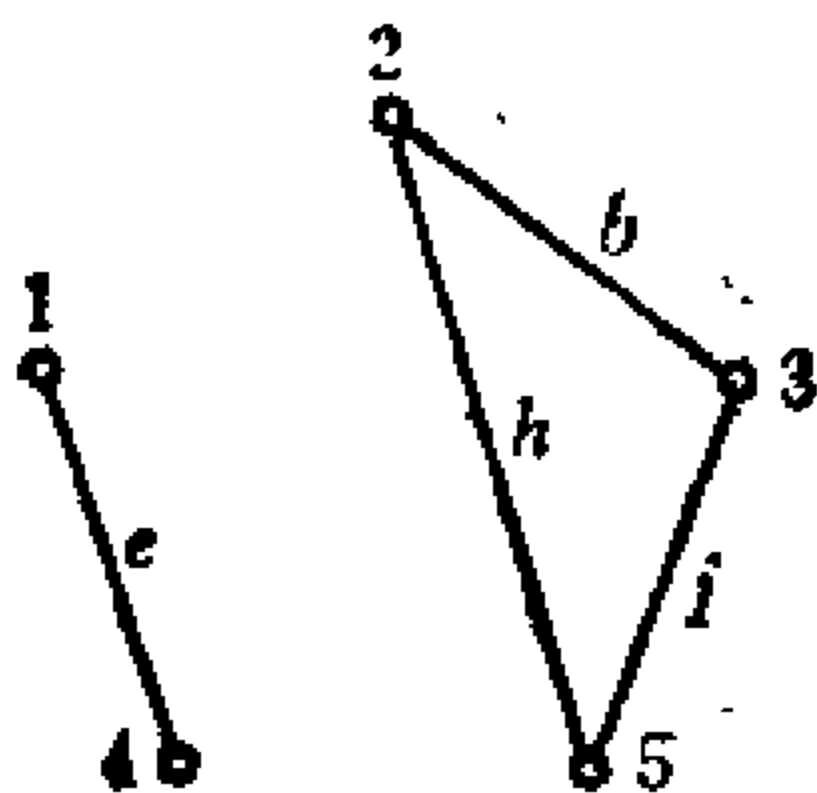


图2-2-9 $G_c - \mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$

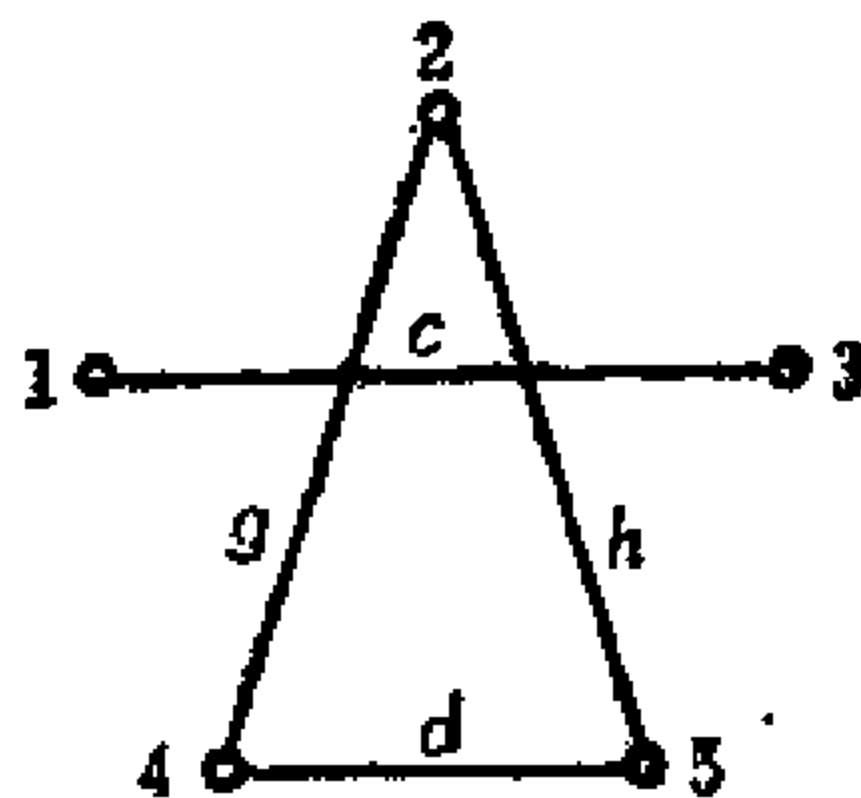


图2-2-10 从完全图中删去一个割集得到的线图

设 $\Omega_3 = (1, 3)$ ，则 $\bar{\Omega}_3 = (2, 4, 5)$ ，而 $\mathcal{E}(\Omega_3 \times \bar{\Omega}_3) = (a, b, e, f, i, j)$ ，删除 $\mathcal{E}(\Omega_3 \times \bar{\Omega}_3)$ 的所有边得到的图如图2-2-10所示。

2-3 割集的环和

在第一章中, 我们已经知道, 一个线图的回路, 回路的无重边并和空集的集体 $\{E\}$, 在环和运算下是一个阿贝尔群。在这一章里, 我们将看到, 割集, 割集的无重边并和空集的集体在环和运算下也是一个阿贝尔群。但是, 在我们研究割集环和的重要性质之前, 有必要先来讨论一下边集的分解。

设 $\Omega_a, \Omega_b, \Omega_c, \Omega_d$ 是一个线图的顶点集合 Ω 的四个互不相交的非空真子集, 也就是说, 对于 $p \in (a, b, c, d)$,

$$\Omega_p \subset \Omega \quad (2-3-1)$$

$$\Omega_p \neq \phi \quad (2-3-2)$$

对于 $p \in (a, b, c, d)$, 则

$$\Omega_p \cap \Omega_q = \phi \quad (2-3-3)$$

对于 $p, q \in (a, b, c, d) \quad p \neq q$

$$\text{设} \quad \Omega_A = \Omega_a \cup \Omega_b \quad (2-3-4)$$

$$\Omega_B = \Omega_c \cup \Omega_d \quad (2-3-5)$$

$$\text{则} \quad \mathcal{E}(\Omega_A \times \Omega_B) = \mathcal{E}(\Omega_a \cup \Omega_b \times \Omega_c \cup \Omega_d) \quad (2-3-6)$$

我们可以把 $\mathcal{E}(\Omega_a \cup \Omega_b \times \Omega_c \cup \Omega_d)$ 分解为以下四个集合:

1. 连接 Ω_a 中顶点和 Ω_c 中顶点的所有边的集合 $\mathcal{E}(\Omega_a \times \Omega_c)$.
2. 连接 Ω_a 中顶点和 Ω_d 中顶点的所有边的集合 $\mathcal{E}(\Omega_a \times \Omega_d)$.
3. 连接 Ω_b 中顶点和 Ω_c 中顶点的所有边的集合 $\mathcal{E}(\Omega_b \times \Omega_c)$.
4. 连接 Ω_b 中顶点和 Ω_d 中顶点的所有边的集合 $\mathcal{E}(\Omega_b \times \Omega_d)$.

换句话说, $\mathcal{E}(\Omega_a \cup \Omega_b \times \Omega_c \cup \Omega_d)$ 可以表示为

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}(\Omega_a \cup \Omega_b \times \Omega_c \cup \Omega_d) \\ &= \mathcal{E}(\Omega_a \times \Omega_c) \cup \mathcal{E}(\Omega_a \times \Omega_d) \cup \mathcal{E}(\Omega_b \times \Omega_c) \cup \mathcal{E}(\Omega_b \times \Omega_d) \end{aligned} \quad (2-3-7)$$

可以看出, 在 $\mathcal{E}(\Omega_a \times \Omega_c), \mathcal{E}(\Omega_a \times \Omega_d), \mathcal{E}(\Omega_b \times \Omega_c), \mathcal{E}(\Omega_b \times \Omega_d)$

Ω_c)中, 任何两个集合都没有公共的边. 因此式(2-3-7)可以写作

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\Omega_c \cup \Omega_b \times \Omega_c \cup \Omega_d) \\ = \mathcal{E}(\Omega_c \times \Omega_c) \oplus \mathcal{E}(\Omega_c \times \Omega_b) \oplus \mathcal{E}(\Omega_b \times \Omega_c) \oplus \mathcal{E}(\Omega_b \times \Omega_d) \end{aligned} \quad (2-3-8)$$

同样, $\mathcal{E}(\Omega_d \times \Omega_d)$ 可以写成

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\Omega_d \times \Omega_d) &= \mathcal{E}(\Omega_c \cup \Omega_b \times \Omega_c \cup \Omega_b) \\ &= \mathcal{E}(\Omega_c \times \Omega_c) \oplus \mathcal{E}(\Omega_c \times \Omega_b) \oplus \mathcal{E}(\Omega_b \times \Omega_b) \end{aligned} \quad (2-3-9)$$

注意

$$\mathcal{E}(\Omega_c \times \Omega_b) = \mathcal{E}(\Omega_b \times \Omega_c) \quad (2-3-10)$$

因为这里所考虑的线图是无向的.

现在, 我们为研究一个完全图中两个割集的和作好了准备. 我们把 Ω_c^* 划分为四个互不相交的集合 Ω_{11} , Ω_{12} , Ω_{21} 和 Ω_{22} , 使得 Ω_c 的每一个顶点恰在这四个集合之一中, 也就是

$$\Omega_{11} \cup \Omega_{12} \cup \Omega_{21} \cup \Omega_{22} = \Omega_c \quad (2-3-11)$$

且

$$\Omega_{pq} \cap \Omega_{rs} = \phi \quad (2-3-12)$$

其中 $p, q, r, s = 1, 2 (p, q) \neq (r, s)$

设集合 $\Omega_1 = \Omega_{11} \cup \Omega_{12}$, 集合 $\Omega_2 = \Omega_{11} \cup \Omega_{21}$, 则 $\bar{\Omega}_1 = \Omega_{21} \cup \Omega_{22}$, $\bar{\Omega}_2 = \Omega_{12} \cup \Omega_{22}$, 如图2-3-1所示.

两个割集 S_1 和 S_2 分别为 $S_1 = \mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$, $S_2 = \mathcal{E}(\Omega_2 \times \bar{\Omega}_2)$. 据式(2-2-4), 这两个割集可以表示为

$$\begin{aligned} S_1 = \mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1) &= \mathcal{E}(\Omega_c \times \Omega_c) \oplus \mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_1) \oplus \mathcal{E}(\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_1) \end{aligned} \quad (2-3-13)$$

$$\begin{aligned} S_2 = \mathcal{E}(\Omega_2 \times \bar{\Omega}_2) &= \mathcal{E}(\Omega_c \times \Omega_c) \oplus \mathcal{E}(\Omega_2 \times \Omega_2) \oplus \mathcal{E}(\bar{\Omega}_2 \times \bar{\Omega}_2) \end{aligned} \quad (2-3-14)$$

我们假设这两个割集是相异的, 因为如果它们相同, 则它们

* 这里的 Ω_c 是一个完全图 G_c 的所有顶点的集合. ——译注

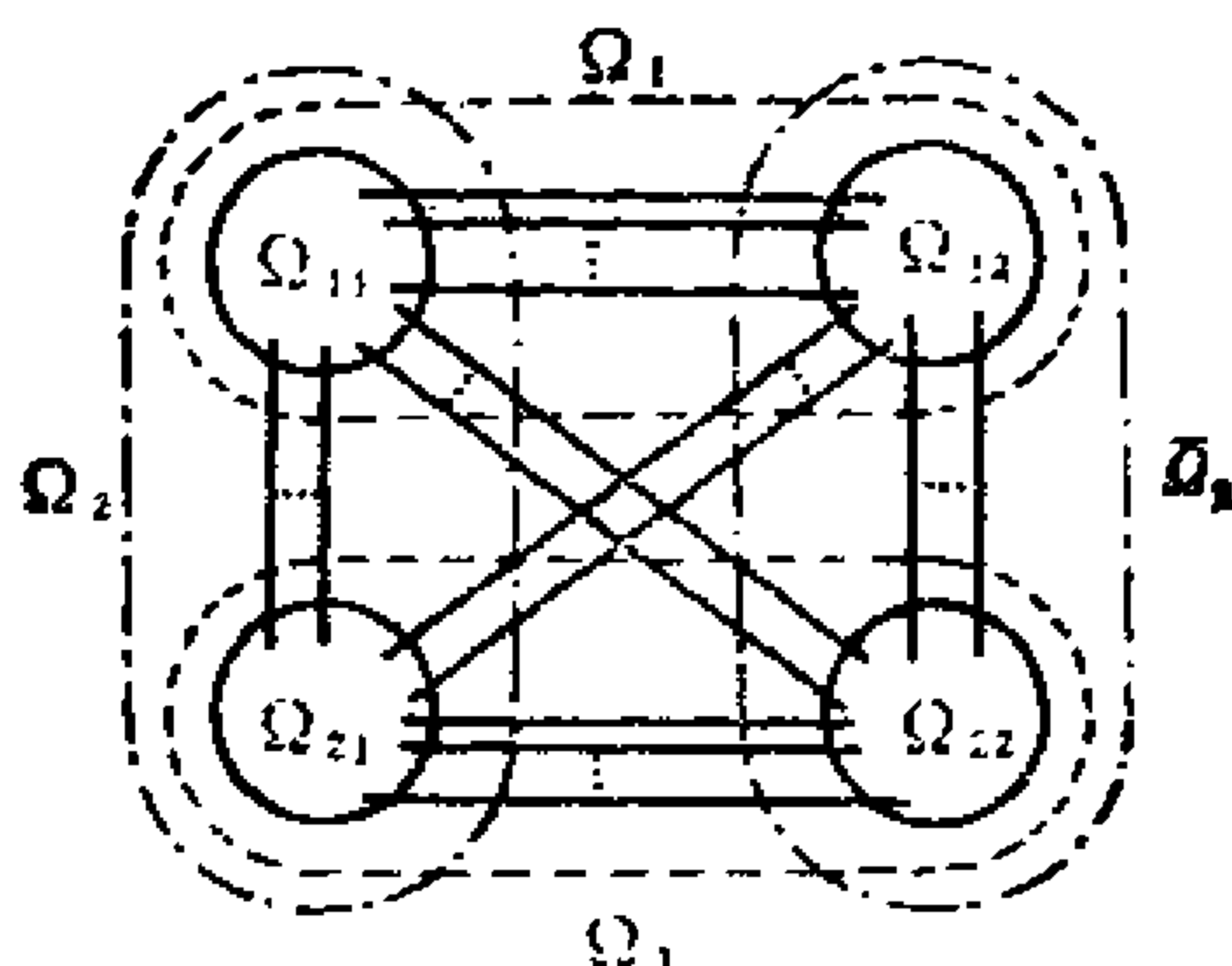


图2-3-1 顶点的集合

的环和为空集。由式(2-3-13)和(2-3-14),这两个割集的环和 $S_1 \oplus S_2$ 是

$$S_1 \oplus S_2 = \mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_1) \oplus \mathcal{E}(\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_1) \oplus \mathcal{E}(\Omega_2 \times \Omega_2) \oplus \mathcal{E}(\bar{\Omega}_2 \times \bar{\Omega}_2) \quad (2-3-15)$$

在式(2-3-15)中代入 $\Omega_1 = \Omega_{11} \cup \Omega_{12}$, $\bar{\Omega}_1 = \Omega_{21} \cup \Omega_{22}$, $\Omega_2 = \Omega_{11} \cup \Omega_{21}$, $\bar{\Omega}_2 = \Omega_{12} \cup \Omega_{22}$, 运用式(2-3-8)和(2-3-9)给出的关系式, 我们有

$$\begin{aligned} S_1 \oplus S_2 &= \mathcal{E}(\Omega_{11} \cup \Omega_{12} \times \Omega_{11} \cup \Omega_{12}) \oplus \mathcal{E}(\Omega_{21} \cup \Omega_{22} \times \Omega_{21} \cup \Omega_{22}) \\ &\quad \oplus \mathcal{E}(\Omega_{11} \cup \Omega_{21} \times \Omega_{11} \cup \Omega_{21}) \oplus \mathcal{E}(\Omega_{12} \cup \Omega_{22} \times \Omega_{12} \cup \Omega_{22}) \\ &= \mathcal{E}(\Omega_{11} \times \Omega_{12}) \oplus \mathcal{E}(\Omega_{21} \times \Omega_{22}) \oplus \mathcal{E}(\Omega_{11} \times \Omega_{21}) \\ &\quad \oplus \mathcal{E}(\Omega_{12} \times \Omega_{22}) \end{aligned} \quad (2-3-16)$$

可以看出,在集合 $\mathcal{E}(\Omega_{11} \times \Omega_{12})$, $\mathcal{E}(\Omega_{21} \times \Omega_{22})$, $\mathcal{E}(\Omega_{11} \times \Omega_{21})$, $\mathcal{E}(\Omega_{12} \times \Omega_{22})$ 中,任两个集合无公共边。因此我们可以利用式(2-3-8),将式(2-3-16)变为

$$S_1 \oplus S_2 = \mathcal{E}(\Omega_{11} \cup \Omega_{22} \times \Omega_{21} \cup \Omega_{12}) = \mathcal{E}(\Omega_3 \times \bar{\Omega}_3) \quad (2-3-17)$$

其中 $\Omega_3 = \Omega_{11} \cup \Omega_{22}$ 。因此,据定理2-2-1,两个割集 S_1 和 S_2 的环和是一个割集。

定理2-3-1 在一个完全图中，两个割集的环和是割集。

例2-2-1 考虑图2-2-4中的完全图。假定我们选取 $\Omega_1 = (1, 2, 3)$, $\Omega_2 = (1, 2, 4)$ 则 $\bar{\Omega}_1 = (4, 5)$, $\bar{\Omega}_2 = (3, 5)$, 另外，我们可以看出，若 $\Omega_{11} = (1, 2)$, $\Omega_{12} = (3)$, $\Omega_{21} = (4)$, $\Omega_{22} = (5)$, 则 $\Omega_1 = \Omega_{11} \cup \Omega_{12}$, $\Omega_2 = \Omega_{11} \cup \Omega_{21}$ 。于是在所给的图中，

$$S_1 = \mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1) = (e, f, g, h, i, j)$$

$$S_2 = \mathcal{E}(\Omega_2 \times \bar{\Omega}_2) = (b, c, d, f, h, i)$$

因此 $S_1 \oplus S_2 = (b, c, d, e, g, j)$

这一结果必然与式(2-3-17)给出的割集相同，其中 $\Omega_3 = \Omega_{11} \cup \Omega_{22} = (1, 2, 5)$ ，直接从图2-2-4中的线图，我们得到

$$\mathcal{E}(\Omega_3 \times \bar{\Omega}_3) = (b, c, d, e, g, j)$$

与上面的 $S_1 \oplus S_2$ 完全相同。

定义2-3-1 割集的重边并是若干割集的并集，其中任何两个割集都没有公共边。

例如，在图2-1-1所示的线图中，两个割集 (a, c, f) 和 (b, e) 没有公共边，因此集合 (a, b, c, e, f) 是割集的重边并。

现在我们来研究，当线图不是完全图时，由此线图的两个割集作环和所得集合的一个性质。设 Ω 是线图 G 中所有顶点的集合， Ω_1 是 Ω 的真子集， Ω_2 是 Ω 的不等于 Ω_1 的真子集，则由这两个子集得到的两个割集 S_1 和 S_2 是

$$S_1 = \mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1) \quad (2-3-18)$$

$$S_2 = \mathcal{E}(\Omega_2 \times \bar{\Omega}_2) \quad (2-3-19)$$

设 $\Omega_1 = \Omega_{11} \cup \Omega_{12}$, $\bar{\Omega}_1 = \mathcal{E}(\Omega_{21} \cup \Omega_{22})$, $\Omega_2 = \Omega_{11} \cup \Omega_{21}$, $\bar{\Omega}_2 = \Omega_{12} \cup \Omega_{22}$ ，其中 Ω_{11} , Ω_{12} , Ω_{21} , Ω_{22} 没有公共顶点，如图2-3-1所示。注意，现在假设图2-3-1中的线图是一个非完全图。因为不论是完全图还是非完全图， S_1 和 S_2 的表达式都成立，所以两个割集 S_1 和 S_2 的环和与式(2-3-17)相同。因此我们有

$$S_1 \oplus S_2 = \mathcal{E}(\Omega_{11} \cup \Omega_{22} \times \Omega_{21} \cup \Omega_{12})$$

$$= \mathcal{G}(\Omega \times \Omega) - [\mathcal{G}(\Omega_{11} \cup \Omega_{22} \times \Omega_{11} \cup \Omega_{22}) \cup \mathcal{G}(\Omega_{21} \cup \Omega_{12} \times \Omega_{21} \cup \Omega_{12})] \quad (2-3-20)$$

$$\text{或 } \mathcal{G}(\Omega \times \Omega) - S_1 \oplus S_2 \\ = \mathcal{G}(\Omega_{11} \cup \Omega_{22} \times \Omega_{11} \cup \Omega_{22}) \cup \mathcal{G}(\Omega_{21} \cup \Omega_{12} \times \Omega_{21} \cup \Omega_{12}) \quad (2-3-21)$$

这说明从线图 G 中删除 $S_1 \oplus S_2$ 中的所有边, 得到两个子图 $\mathcal{G}(\Omega_{11} \cup \Omega_{22} \times \Omega_{11} \cup \Omega_{22})$ 和 $\mathcal{G}(\Omega_{21} \cup \Omega_{12} \times \Omega_{21} \cup \Omega_{12})$. 当我们讨论完全图时, 这些子图本身也是完全图. 但是, 根据假设, G 不是完全图, 因此这里不能保证 $\mathcal{G}(\Omega_{11} \cup \Omega_{22} \times \Omega_{11} \cup \Omega_{22})$ 和 $\mathcal{G}(\Omega_{21} \cup \Omega_{12} \times \Omega_{21} \cup \Omega_{12})$ 是完全图. 事实上, 正如下述例子所示, 即使所给线图 G 是不可分的, 这些子图仍有可能是可分离的.

例2-3-2 考虑图2-3-2所示的线图 G , 其中每个圆圈代表一

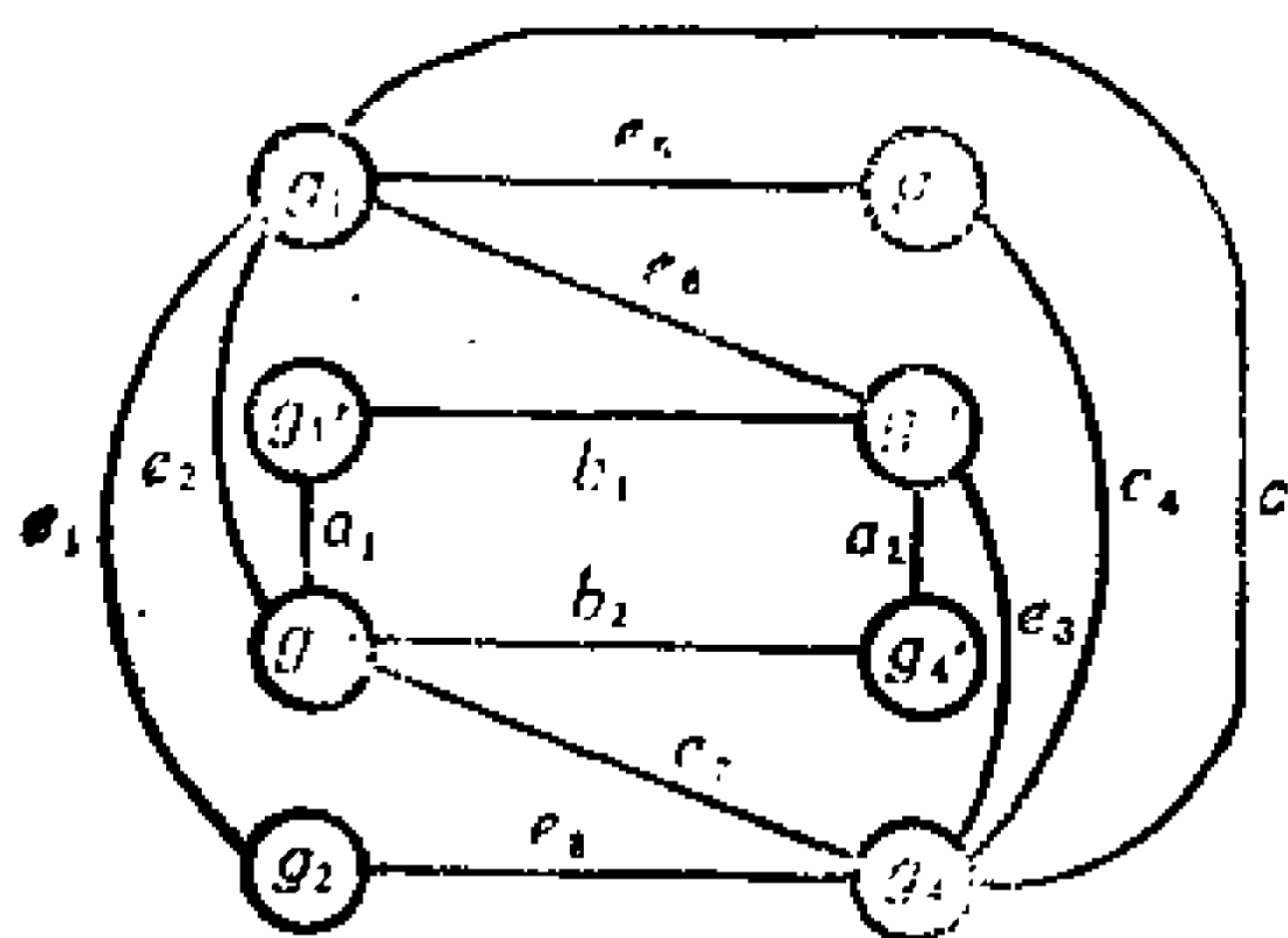


图2-3-2 一个不可分图

个连通的子图. 两个割集 S_1 和 S_2 分别为

$$S_1 = (e_1, e_2, e_3, e_4, a_1, a_2, c)$$

$$S_2 = (e_5, e_6, e_7, e_8, b_1, b_2, c)$$

这两个割集的环和是

$$S_1 \oplus S_2 = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, a_1, a_2, b_1, b_2)$$

定义 $\Omega_{11} = (g_1 \text{ 和 } g_1' \text{ 中的所有顶点})$, $\Omega_{12} = (g_3 \text{ 和 } g_3' \text{ 中的所有顶点})$, $\Omega_{21} = (g_2 \text{ 和 } g_2' \text{ 中的所有顶点})$, $\Omega_{22} = (g_4 \text{ 和 } g_4' \text{ 中的所有顶点})$, 我们可以把这两个割集表示为

$$S_1 = \mathcal{E}(\Omega_{11} \cup \Omega_{12} \times \Omega_{21} \cup \Omega_{22})$$

$$S_2 = \mathcal{E}(\Omega_{11} \cup \Omega_{21} \times \Omega_{12} \cup \Omega_{22})$$

于是, 据式(2-3-17), S_1 和 S_2 的环和变成

$$S_1 \oplus S_2 = \mathcal{E}(\Omega_{11} \cup \Omega_{22} \times \Omega_{21} \cup \Omega_{12})$$

或由式(2-3-21),

$$\mathcal{E}(\Omega \times \Omega) - S_1 \oplus S_2$$

$$= \mathcal{E}(\Omega_{11} \cup \Omega_{22} \times \Omega_{11} \cup \Omega_{22}) \cup \mathcal{E}(\Omega_{21} \cup \Omega_{12} \times \Omega_{21} \cup \Omega_{12})$$

其中 Ω 是 G 中所有顶点的集合。图2-3-3所示的线图, 是由上面给出的线图按以下方法得到的: 调换其子图的位置, 使子图 $\mathcal{E}(\Omega_{11} \cup \Omega_{22} \times \Omega_{11} \cup \Omega_{22})$ 在一边, 而子图 $\mathcal{E}(\Omega_{21} \cup \Omega_{12} \times \Omega_{21} \cup \Omega_{12})$ 在图形的另一边。

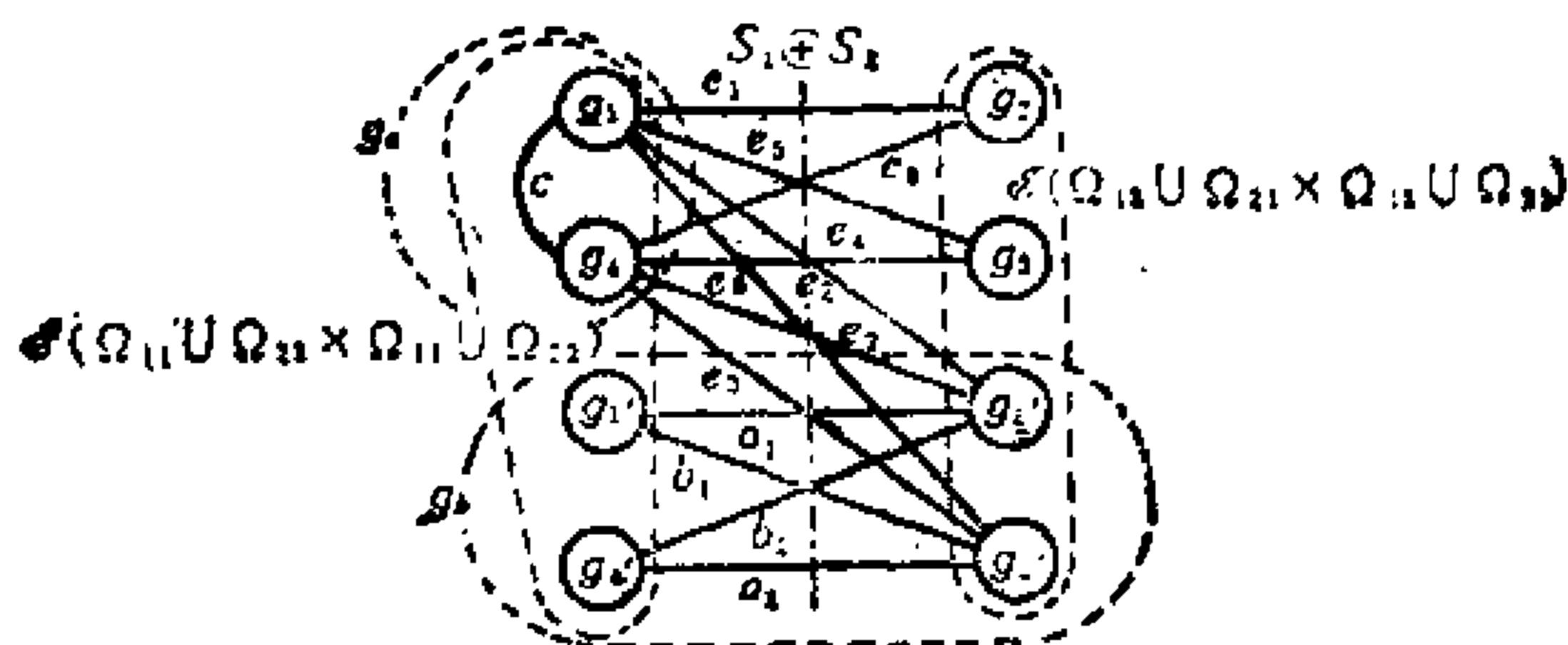


图2-3-3 一个不可分图

当我们删除 $S_1 \oplus S_2$ 中的所有边时, 就得到图2-3-4所示的线图。注意子图 $\mathcal{E}(\Omega_{11} \cup \Omega_{22} \times \Omega_{11} \cup \Omega_{22})$ 由三个最大连通子图 g_1, g_1' 和 g_2 组成, 而子图 $\mathcal{E}(\Omega_{21} \cup \Omega_{12} \times \Omega_{21} \cup \Omega_{12})$ 由四个最大连通子

图 g_2, g_3, g_2' 和 g_3' 组成。因此 $S_1 \oplus S_2$ 不是割集。

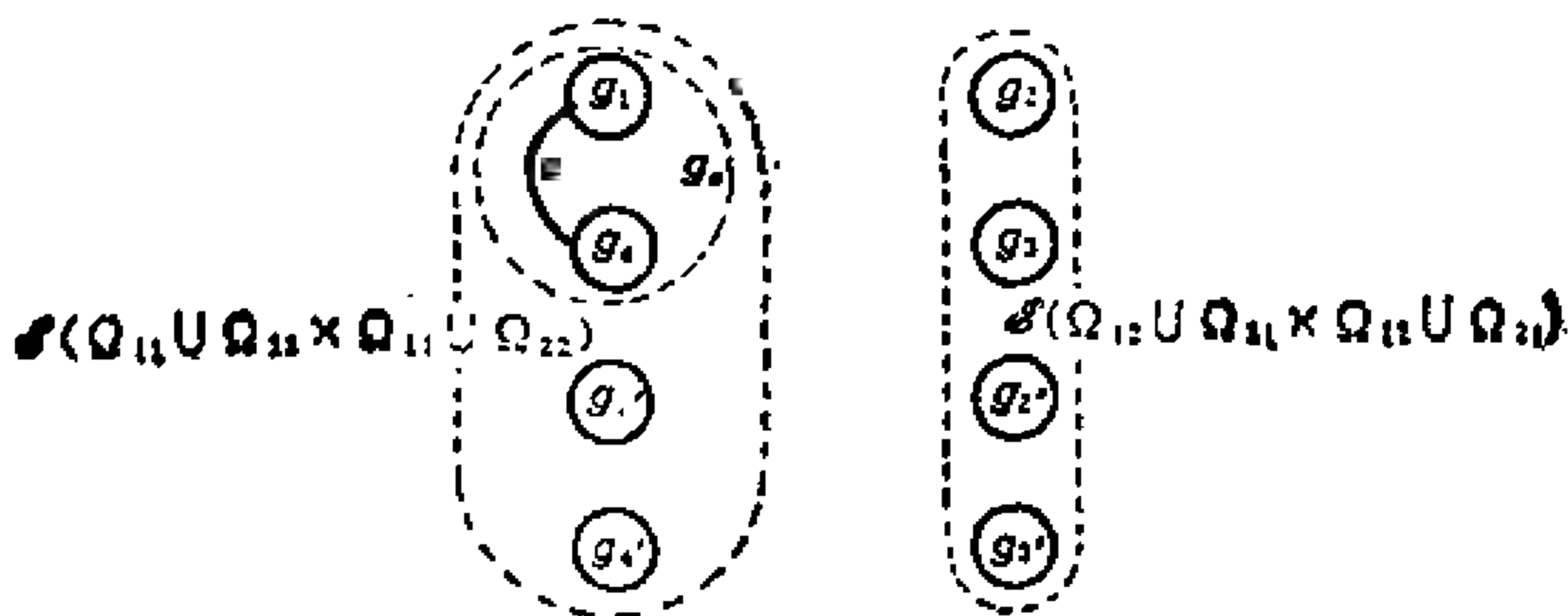


图2-3-4 删除 $S_1 \oplus S_2$ 所得的图

现在考虑 $S_1 \oplus S_2$ 的子集 S_a ，它由与最大连通子图 g_a 的顶点相连接的所有边组成，即

$$S_a = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8)$$

这个子集 S_a 不是割集，因为删除 S_a 的所有边产生的线图由四个最大连通子图 g_a, g_b, g_2 和 g_3 组成，如图2-3-5所示。

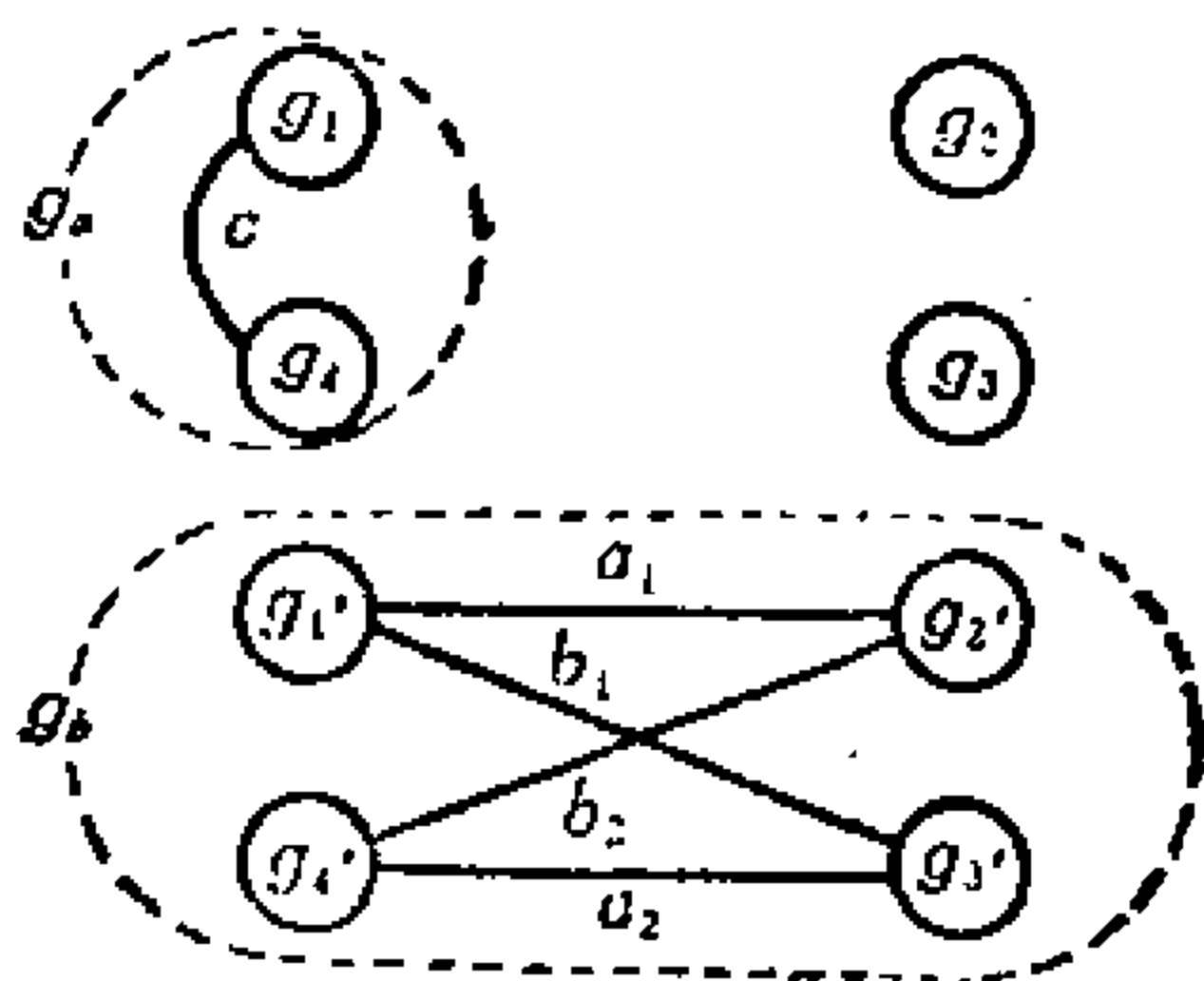


图2-3-5 删除 S_a 所得的图

再考虑 S_a 的子集 S_{a1} ，它是由与 g_2 的顶点相连的所有边组成，即

$$S_{a1} = (e_1, e_8)$$

删除 S_{a1} 的所有边产生的线图，由两个最大连通子图组成，如图

2-3-6所示。因此易知 S_{a1} 是一个割集。同样 S_a 的另一个子集 $S_{a2} = (e_4, e_5)$, 由与 g_3 相连的所有边组成, 是一个割集。 S_a 的子集 $S_{a3} = (e_2, e_3, e_6, e_7)$, 由与 g_1 的顶点关联的所有边组成, 也是一个割集。因此, S_a 是割集 S_{a1} , S_{a2} 和 S_{a3} 的无重边并。我们还可以看到, $S_1 \oplus S_2$ 的子集 S_b 由与 g_1' 相连的所有边组成, 是一个割集。 $S_1 \oplus S_2$ 的子集 $S_c = (a_2, b_2)$, 由与 g_3' 的顶点相关联的所有边组成, 也是一个割集。这样, $S_1 \oplus S_2$ 是割集 S_{a1} , S_{a2} , S_{a3} , S_b 和 S_c 的无重边并。

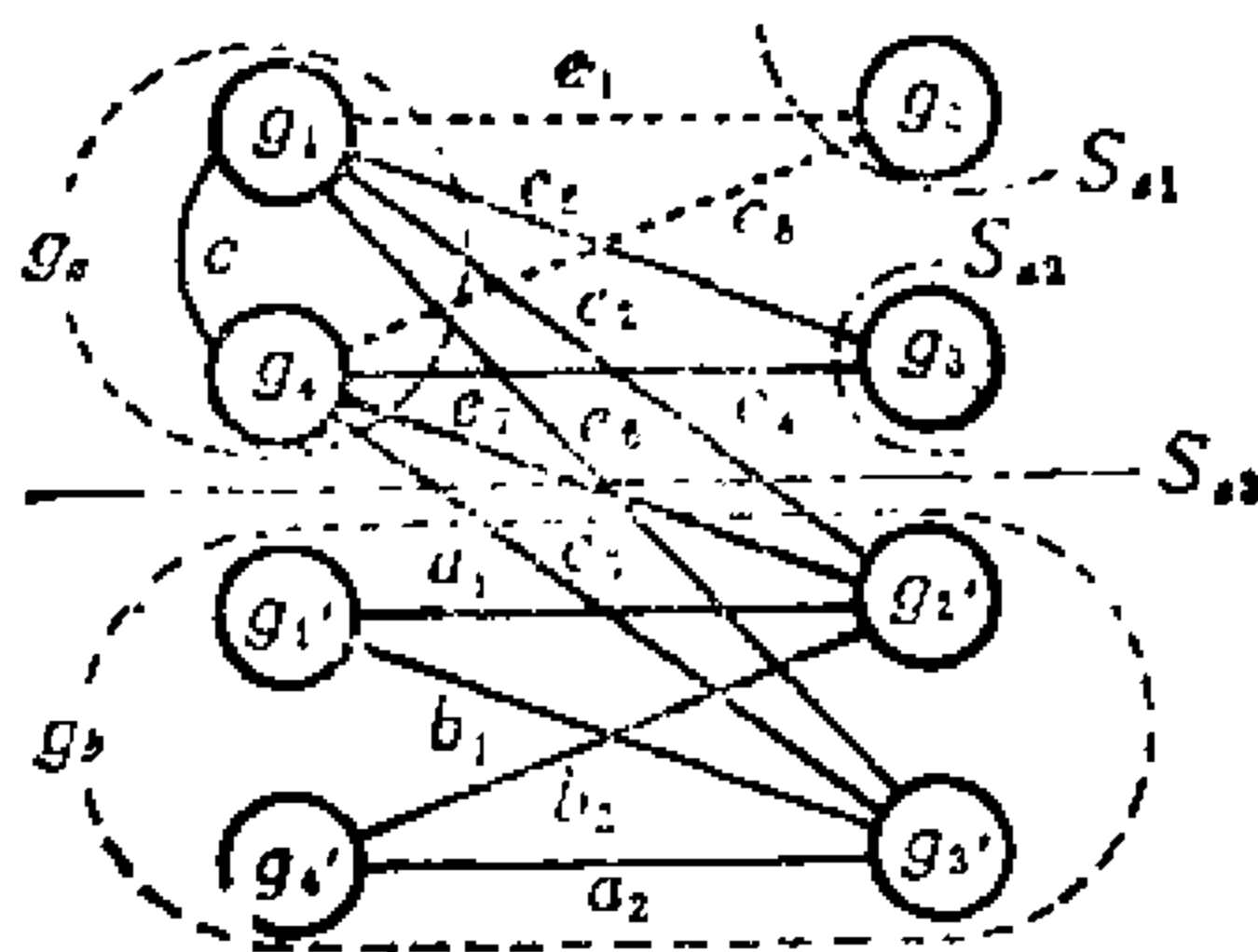


图2-3-6 删除 S_{a1} 所得的图

现在回到一般的情况. 由式(2-3-21), 如果子图 $\mathcal{G}(\Omega_{11} \cup \Omega_{22} \times \Omega_{11} \cup \Omega_{22})$ 和子图 $\mathcal{G}(\Omega_{21} \cup \Omega_{12} \times \Omega_{21} \cup \Omega_{12})$ 每一个都是连通的, 则 $S_1 \oplus S_2$ 显然是一个割集。假定子图 $\mathcal{G}(\Omega_{11} \cup \Omega_{22} \times \Omega_{11} \cup \Omega_{22})$ 是由 k 个最大连通子图 $g_{a1}, g_{a2}, \dots, g_{ak}$ 组成的分离图。设 Ω_{ap} 是 g_{ap} 中所有顶点的集合($p = 1, 2, \dots, k$), 如图2-3-7所示。不要忘记, $\mathcal{G}(\Omega_{21} \cup \Omega_{12} \times \Omega_{21} \cup \Omega_{12})$ 也可能是分离的。注意 $S_1 \oplus S_2 = \mathcal{G}(\Omega_{11} \cup \Omega_{22} \times \Omega_{12} \cup \Omega_{21})$ 中的每一条边与 $g_{a1}, g_{a2}, \dots, g_{ak}$ 中的某一个子图的一个顶点相连。我们把集合 $\mathcal{G}(\Omega_{11} \cup \Omega_{22} \times \Omega_{12} \cup \Omega_{21})$ 分成 k 个子集 $S_{a1}, S_{a2}, \dots, S_{ak}$, 使得集合 S_{ap} ($1 \leq p \leq k$)的所有边与 g_{ap} 中的顶点相连。容易看出,

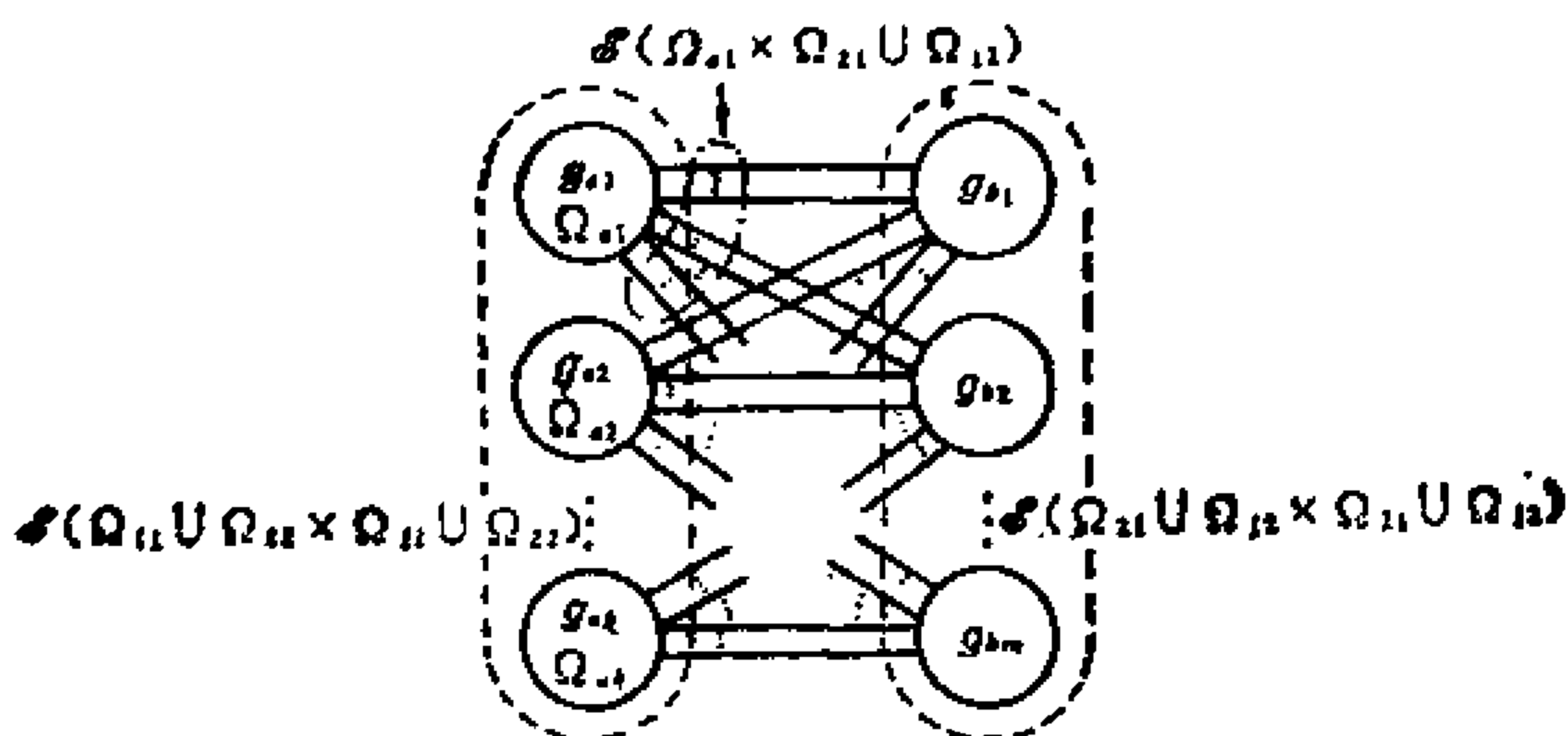


图2-3-7 子图 $g(\Omega_{s1} \cup \Omega_{s2} \times \Omega_{t1} \cup \Omega_{t2})$ 和 $g(\Omega_{t1} \cup \Omega_{t2} \times \Omega_{s1} \cup \Omega_{s2})$

$$S_{sp} = g(\Omega_{sp} \times \Omega_{t1} \cup \Omega_{t2}) \quad (2-3-22)$$

并且，我们可以看到，集合 $g(\Omega_{s1} \cup \Omega_{s2} \times \Omega_{t1} \cup \Omega_{t2})$ 中的每一条边正好在集合 $S_{s1}, S_{s2}, \dots, S_{sk}$ 之一中。因此，集合 $g(\Omega_{s1} \cup \Omega_{s2} \times \Omega_{t1} \cup \Omega_{t2})$ 可以看作集合 $S_{s1}, S_{s2}, \dots, S_{sk}$ 的无重边并。因为对于 $1 \leq p < q \leq k, \Omega_{sp}$ 的顶点和 Ω_{sq} 的顶点之间没有边相连，故集合 $g(\Omega_{sp} \times \Omega_{t1} \cup \Omega_{t2})$ 可以表示为

$$\begin{aligned} & g(\Omega_{sp} \times \Omega_{t1} \cup \Omega_{t2}) \\ &= g(\Omega_{sp} \times \Omega_{t1} \cup \Omega_{t2} \cup \Omega_{s1} \cup \Omega_{s2} \cup \dots \cup \Omega_{sp-1} \cup \Omega_{sp+1} \cup \dots \cup \Omega_{sk}) \end{aligned} \quad (2-3-23)$$

但是，由 $\bar{\Omega}_{sp}$ 的定义可知

$$\Omega_{t1} \cup \Omega_{t2} \cup \Omega_{s1} \cup \Omega_{s2} \cup \dots \cup \Omega_{sp-1} \cup \Omega_{sp+1} \cup \dots \cup \Omega_{sk} = \bar{\Omega}_{sp} \quad (2-3-24)$$

因此，对所有的 $p = 1, 2, \dots, k$,

$$g(\Omega_{sp} \times \Omega_{t1} \cup \Omega_{t2}) = g(\Omega_{sp} \times \bar{\Omega}_{sp}) \quad (2-3-25)$$

于是 $g(\Omega_{s1} \cup \Omega_{s2} \times \Omega_{t1} \cup \Omega_{t2})$ 可以表示为

$$\begin{aligned} & g(\Omega_{s1} \cup \Omega_{s2} \times \Omega_{t1} \cup \Omega_{t2}) \\ &= g(\Omega_{s1} \times \bar{\Omega}_{s1}) \cup g(\Omega_{s2} \times \bar{\Omega}_{s2}) \cup \dots \cup g(\Omega_{sk} \times \bar{\Omega}_{sk}) \end{aligned}$$

$$= \mathcal{E}(\Omega_{s1} \times \bar{\Omega}_{s1}) \oplus \mathcal{E}(\Omega_{s2} \times \bar{\Omega}_{s2}) \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}(\Omega_{sk} \times \bar{\Omega}_{sk}) \quad (2-3-26)$$

由式(2-2-4), 集合 $\mathcal{E}(\Omega_{sp} \times \bar{\Omega}_{sp})$ 可以表示为

$$\mathcal{E}(\Omega_{sp} \times \bar{\Omega}_{sp}) = \mathcal{E}(\Omega \times \Omega) \oplus \mathcal{E}(\Omega_{sp} \times \Omega_{sp}) \oplus \mathcal{E}(\bar{\Omega}_{sp} \times \bar{\Omega}_{sp}) \quad (2-3-27)$$

或由式(2-2-5), 我们有

$$\mathcal{E}(\Omega \times \Omega) - \mathcal{E}(\Omega_{sp} \times \bar{\Omega}_{sp}) = \mathcal{E}(\Omega_{sp} \times \Omega_{sp}) \cup \mathcal{E}(\bar{\Omega}_{sp} \times \bar{\Omega}_{sp}) \quad (2-3-28)$$

由这个公式可以看出, 如果子图 $\mathcal{E}(\bar{\Omega}_{sp} \times \bar{\Omega}_{sp})$ 是连通的, 则 $\mathcal{E}(\Omega_{sp} \times \bar{\Omega}_{sp})$ 是一个割集 (注意, 根据假设, $\mathcal{E}(\Omega_{sp} \times \Omega_{sp})$ 是连通的). 不失一般性, 考虑图2-3-8所示的集合 $\mathcal{E}(\Omega_{s1} \times \bar{\Omega}_{s1})$.

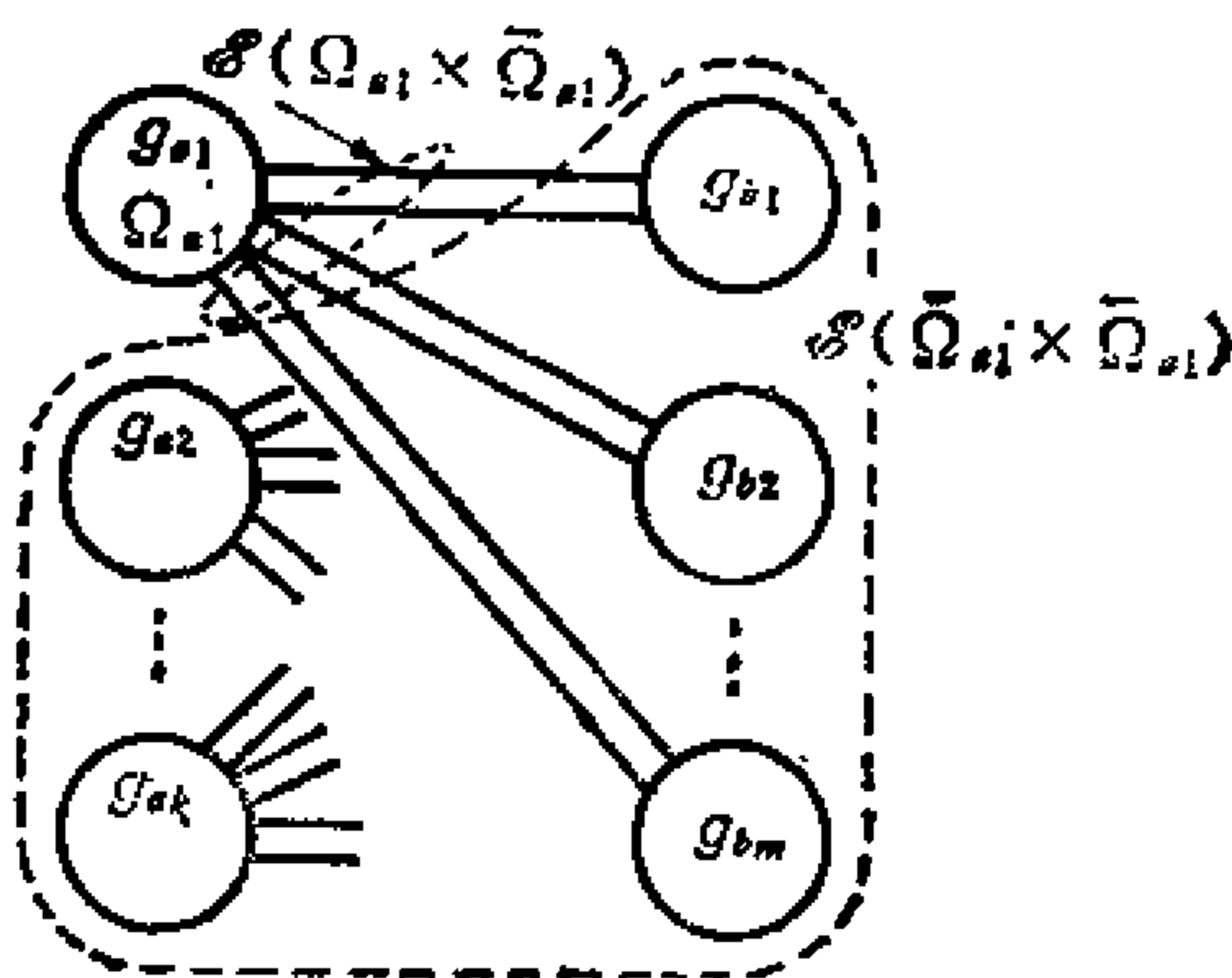


图2-3-8 子图 $\mathcal{E}(\Omega_{s1} \times \bar{\Omega}_{s1})$

由式(2-3-28), 删除 $\mathcal{E}(\Omega_{s1} \times \bar{\Omega}_{s1})$ 中所有的边, 产生两个子图 $\mathcal{E}(\Omega_{s1} \times \Omega_{s1})$ 和 $\mathcal{E}(\bar{\Omega}_{s1} \times \bar{\Omega}_{s1})$. 我们知道, 如果 $\mathcal{E}(\bar{\Omega}_{s1} \times \bar{\Omega}_{s1})$ 是连通的, 则 $\mathcal{E}(\Omega_{s1} \times \bar{\Omega}_{s1})$ 是一个割集. 现在假定 $\mathcal{E}(\bar{\Omega}_{s1} \times \bar{\Omega}_{s1})$ 是分离的, 子图 $\mathcal{E}(\Omega_{s1} \times \Omega_{s1})$ 必然与 $\mathcal{E}(\Omega_{s1} \times \bar{\Omega}_{s1})$ 的边连接. 如图2-3-9所示, 其中假设 $\mathcal{E}(\bar{\Omega}_{s1} \times \bar{\Omega}_{s1})$ 有 n 个最大连通子图 $g_{c1}, g_{c2}, \dots, g_{cn}$.

Ω_{cp} 是一个割集。因此由式(2-3-29)知, 集合 $\mathcal{S}(\Omega_{a1} \times \bar{\Omega}_{a1})$ 是割集
 集 $\mathcal{S}(\Omega_{ap} \times \bar{\Omega}_{ap})$ 或为割集, 或为割集的无重边并。于是据式(2-3-28)知, 集合 $\mathcal{S}(\Omega_{11} \cup \Omega_{22} \times \Omega_{12} \cup \Omega_{21})$ 是割集的无重边并。

如果我们注意观察, 为得到上述结果, 对两个集合 $\mathcal{S}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 和 $\mathcal{S}(\Omega_2 \times \bar{\Omega}_2)$ 的要求, 就可以看出, 我们并没有要求集合 $\mathcal{S}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 和 $\mathcal{S}(\Omega_2 \times \bar{\Omega}_2)$ 是割集。事实上, 只要 Ω_{11} , Ω_{12} , Ω_{21} 和 Ω_{22} 是符合以下要求的顶点集合:

$$1. \Omega_{11} \cup \Omega_{12} \cup \Omega_{21} \cup \Omega_{22} = \Omega \quad (2-3-33)$$

2. 在 Ω_{11} , Ω_{12} , Ω_{21} 和 Ω_{22} 中, 任两个集合没有公共边。

$$3. \Omega_1 = \Omega_{11} \cup \Omega_{12}, \Omega_2 = \Omega_{11} \cup \Omega_{21} \quad (2-3-34)$$

那么不论 S_1 或 S_2 , 或者 S_1 和 S_2 一起, 都可以成为割集的无重边并。因此我们可以说, 对于连通图来说, 一个割集和一个割集的无重边并的环和或者是割集, 或者是割集的无重边并。另外, 两个割集的无重边并的环和或者是割集, 或者是割集的无重边并。

假定线图 G 是分离的, 设 S_1 是 G 的一个最大连通子图中的一个割集或割集的无重边并, S_2 是 G 的另一个最大连通子图的割集或割集的无重边并, 则 $S_1 \oplus S_2$ 显然是一个割集的无重边并。于是, 我们可以叙述如下定理, 而不用限制线图是连通的。

定理2-3-2 设 S_1 是一个割集或割集的无重边并, S_2 是与 S_1 不同的另一个割集或割集的无重边并, 则 $S_1 \oplus S_2$ 或为割集, 或为割集的无重边并。

定理2-3-3 设 $\{S\}$ 是所有割集, 割集的无重边并和空集的集体, 则 $\{S\}$ 在环和运算下是一个阿贝尔群。

例2-3-3 考虑图2-1-1所示的线图。取割集 $S_1 = (a, c, f)$, $S_2 = (a, d, e)$, $S_3 = (b, e)$, $S_4 = (f, g)$ 作为生成元, 我们可以得到所有割集、割集的无重边并和空集的集体 $\{S\}$ 中全部元素如下:

$$S_1 \oplus S_2 = (c, d, e, f)$$

$$S_1 \oplus S_2 = (a, b, c, e, f)$$

$$S_1 \oplus S_4 = (a, c, g)$$

$$S_2 \oplus S_3 = (a, b, d)$$

$$S_2 \oplus S_4 = (a, d, e, f, g)$$

$$S_3 \oplus S_4 = (b, e, f, g)$$

$$S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 = (b, c, d, f)$$

$$S_1 \oplus S_2 \oplus S_4 = (c, d, e, g)$$

$$S_1 \oplus S_3 \oplus S_4 = (a, b, c, e, g)$$

$$S_2 \oplus S_3 \oplus S_4 = (a, b, d, f, g)$$

$$S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \oplus S_4 = (b, c, d, g)$$

$$S_1 \oplus S_1 = S_2 \oplus S_2 = S_3 \oplus S_3 = S_4 \oplus S_4 = \phi$$

注意其中 $S_1 \oplus S_3, S_2 \oplus S_4, S_1 \oplus S_3 \oplus S_4, S_2 \oplus S_3 \oplus S_4$ 都是割集
的无重边并。

2-4 线性无关割集

我们已经知道，集体 $\{S\}$ 在环和运算下构成一个群。如果一个线图是有限的，即线图中边的数目是有限的，则 $\{S\}$ 由有限个集合组成。这里，我们将介绍一种求出一组最少数目的生成元的方法，这组生成元称为线性无关割集，利用它们可以生成 $\{S\}$ 中的所有集合。集体 $\{E\}$ 和 $\{E, M_{ij}\}$ 中也有这样的生成元。在下一章学习线图的矩阵表示以后，可以很容易地知道 $\{E\}$ 和 $\{E, M_{ij}\}$ 中生成元的数目。

下述定理给出了割集的一个重要性质。

定理2-4-1 任何割集都可以表示为若干个关联集的环和。

证明：假定线图 G 的顶点为 v_1, v_2, \dots, v_n 。即 $\Omega = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ，设 $\Omega_{11} = \phi$ ， $\Omega_{12} = (v_1, v_2, \dots, v_{k-1})$ ， $\Omega_{21} = (v_k)$ ， $\Omega_{22} = \Omega - \Omega_{12} \cup \Omega_{21} = (v_{k+1}, \dots, v_n)$ 。又设 $\Omega_1 = \Omega_{11} \cup \Omega_{12}$ ， $\Omega_2 = \Omega_{11} \cup \Omega_{21}$ 。则据式

(2-3-17), 两个集合 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 和 $\mathcal{E}(\Omega_2 \times \bar{\Omega}_2)$ 的环和是

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1) \oplus \mathcal{E}(\Omega_2 \times \bar{\Omega}_2) \\
 &= \mathcal{E}(\Omega_{11} \cup \Omega_{12} \times \overline{\Omega_{11} \cup \Omega_{12}}) \oplus \mathcal{E}(\Omega_{21} \cup \Omega_{22} \times \overline{\Omega_{21} \cup \Omega_{22}}) \\
 &= \mathcal{E}[(v_1, v_2, \dots, v_{k-1}) \times \overline{(v_1, v_2, \dots, v_{k-1})}] \oplus \mathcal{E}[(v_k) \times \overline{(v_k)}] \\
 &= \mathcal{E}[(v_{k+1}, \dots, v_n) \times \overline{(v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k)}] \\
 &= \mathcal{E}[(v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k) \times \overline{(v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k)}] \quad (2-4-1)
 \end{aligned}$$

由这个等式, 我们可以得到以下各等式.

对于 $k=2$,

$$\mathcal{E}[(v_1) \times \overline{(v_1)}] \oplus \mathcal{E}[(v_2) \times \overline{(v_2)}] = \mathcal{E}[(v_1, v_2) \times \overline{(v_1, v_2)}] \quad (2-4-2)$$

对于 $k=3$,

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{E}[(v_1, v_2) \times \overline{(v_1, v_2)}] \oplus \mathcal{E}[(v_3) \times \overline{(v_3)}] \\
 &= \mathcal{E}[(v_1) \times \overline{(v_1)}] \oplus \mathcal{E}[(v_2) \times \overline{(v_2)}] \oplus \mathcal{E}[(v_3) \times \overline{(v_3)}] \\
 &= \mathcal{E}[(v_1, v_2, v_3) \times \overline{(v_1, v_2, v_3)}] \quad (2-4-3)
 \end{aligned}$$

一般地, 我们有

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{E}[(v_1) \times \overline{(v_1)}] \oplus \mathcal{E}[(v_2) \times \overline{(v_2)}] \oplus \dots \oplus \mathcal{E}[(v_k) \times \overline{(v_k)}] \\
 &= \mathcal{E}[(v_1, v_2, \dots, v_k) \times \overline{(v_1, v_2, \dots, v_k)}] \quad (2-4-4)
 \end{aligned}$$

另一方面, 任一割集可写成 $\mathcal{E}[(v_1, v_2, v, \dots, v_k) \times \overline{(v_1, v_2, \dots, v_k)}]$ 的形式, 因此, 任一割集可由若干个关联集的环和得到. (证毕)

从上一个定理, 我们又可以推得以下定理.

定理2-4-2 设 G 是一个连通图, 则 G 中任一关联集等于其它所有关联集的环和.

证明: 不失一般性, 设 (v_1, v_2, \dots, v_n) 是 G 中所有顶点的集合. 又设 v_1 是所选取的顶点, 则据式(2-4-4),

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{E}[(v_2, v_3, \dots, v_n) \times \overline{(v_2, v_3, \dots, v_n)}] \\
 &= \mathcal{E}[(v_2) \times \overline{(v_2)}] \oplus \mathcal{E}[(v_3) \times \overline{(v_3)}] \oplus \dots \oplus \mathcal{E}[(v_n) \times \overline{(v_n)}] \quad (2-4-5)
 \end{aligned}$$

另一方面，我们知道

$$\overline{(v_2, v_3, \dots, v_n)} = (v_1) \quad (2-4-6)$$

因此

$$\mathcal{S}[(v_2, v_3, \dots, v_n) \times \overline{(v_2, v_3, \dots, v_n)}] = \mathcal{S}[(\overline{v_1}) \times (v_1)] \quad (2-4-7)$$

这就是与顶点 v_1 对应的关联集。于是式(2-4-5)的右边等于与顶点 v_1 对应的关联集。 (证毕)

据定理2-4-1，容易看出，在对一个连通图的所有关联集作环和时，将得到一个空集。因此，即使线图 G 不连通，定理2-4-2也成立。

定理2-4-3 在一个线图中，一个关联集 S 等于除 S 外所有关联集的环和。

为了下面叙述方便，我们定义线性相关集合和线性无关集合如下。

定义2-4-1 设 D_1, D_2, \dots, D_m 是一些集合。如果

$$D_1 \oplus D_2 \oplus \dots \oplus D_m = \phi \quad (2-4-8)$$

则说 D_1, D_2, \dots, D_m 是线性相关的，或称 D_1, D_2, \dots, D_m 是线性相关集合。

如果在 D_1, D_2, \dots, D_m 中，没有线性相关集合，则称它们是线性无关的。

例如，若 $D_1 = \phi$ ，则 D_1, D_2, \dots, D_m 显然不是线性无关的。

例2-4-1 图2-1-1所示线图的割集 $(a, c, f), (a, b, d), (b, e)$ 和 (b, c, d, f) 不是线性无关的，因为

$$(a, c, f) \oplus (a, b, d) \oplus (b, c, d, f) = \phi$$

另一方面，割集 $(a, c, f), (a, b, d), (b, e)$ 和 (c, d, e, f) 是线性无关的。

据定理2-4-1，任一割集可由若干关联集的环和得到。并且，据定理2-4-3知，一个关联集等于其它所有关联集的环和。

定理2-4-4 设 G 是由 n 个顶点组成的连通线图。则 G 中至多

存在 n_v-1 个线性无关的关联集。

于是据定理2-4-1和2-4-4，我们有定理2-4-5。

定理2-4-5 在一个包含 n_v 个顶点的连通线图 G 中，最多存在 n_v-1 个线性无关的割集。

现在，我们假定在一个由 n_v 个顶点组成的连通线图 G 中，有 n_v-1 个关联集是线性相关的，也就是说，设 $S(v_1), S(v_2), \dots, S(v_{k+1})$ 是这 n_v-1 个关联集中的一些关联集，使得

$$S(v_1) \oplus S(v_2) \oplus \dots \oplus S(v_k) \oplus S(v_{k+1}) = \phi \quad (2-4-9)$$

这一等式又可以写作

$$S(v_{k+1}) = S(v_1) \oplus S(v_2) \oplus \dots \oplus S(v_k) \quad (2-4-10)$$

但由式(2-4-4)，

$$\begin{aligned} S(v_1) \oplus S(v_2) \oplus \dots \oplus S(v_k) \\ = \mathcal{S}[(v_1, v_2, \dots, v_k) \times \overline{(v_1, v_2, \dots, v_k)}] \end{aligned} \quad (2-4-11)$$

而且 G 中有 n_v 个顶点，注意 $k+1 \leq n_v-1$ ，因此 $\overline{(v_1, v_2, \dots, v_k)}$ 中至少包含两个顶点。这就是说， $S(v_1) \oplus S(v_2) \oplus \dots \oplus S(v_k)$ 不是一个关联集，与式(2-4-10)中 $S(v_{k+1})$ 是一个关联集的假设矛盾。因此，这 n_v-1 个关联集必是线性无关的。

定理2-4-6 设 G 是由 n_v 个顶点组成的连通线图。则 G 中恰有 n_v-1 个线性无关的关联集。

假定线图 G 由 ρ 个最大连通子图 g_1, g_2, \dots, g_ρ 组成。又假定 g_r 由 n_r 个顶点组成， $r=1, 2, \dots, \rho$ ，并且 $\sum_{r=1}^{\rho} n_r = n_v$ ，这里 n_v 是 G 中顶点

数。由定理2-4-6知，在 g_r 中恰有 n_r-1 个线性无关的关联集。并且对于 $1 \leq p < q \leq \rho$ ，显然 g_p 的线性无关关联集与 g_q 的线性无关关联集组成了线性无关集合。

定理2-4-7 设 G 是一个包含 n_v 个顶点和 ρ 个最大连通子图的分离线图，则 G 中恰有 $n_v-\rho$ 个线性无关的关联集。

由于有定理2-4-1，这 $n_v-\rho$ 个线性无关的关联集通过环和运

算就足以得到所给线图的所有割集。换句话说，一个线图的所有割集，割集的无重边并和空集的集合 $\{S\}$ 可以表示为

$$\begin{aligned}\{S\} &= \{S(v_{i_1}) \oplus S(v_{i_2}) \oplus \cdots \oplus S(v_{i_r})\}, \\ S(v_{i_1}), S(v_{i_2}), \cdots, S(v_{i_r}) &\in \{S(v)\}, r = 1, 2, \cdots, n_v - \rho\end{aligned}\quad (2-4-13)$$

这里 $\{S(v)\}$ 是一个（包含 n_v 个顶点和 ρ 个最大连通子图的）线图的 $n_v - \rho$ 个线性无关关联集的集体。

例2-4-2 考虑图2-1-1所示的线图。由于 $n_v - \rho = 4$ ，故有四个线性无关的关联集。假定我们选取 $S(1) = (a, c, f)$ ， $S(2) = (a, b, d)$ ， $S(3) = (c, d, e, g)$ ， $S(4) = (b, e)$ 为四个线性无关的关联集的集合，则

$$\begin{aligned}S(1) \oplus S(2) &= (b, c, d, f) \\ S(1) \oplus S(3) &= (a, d, e, f, g) \\ S(1) \oplus S(4) &= (a, b, c, e, f) \\ S(2) \oplus S(3) &= (a, b, c, e, g) \\ S(2) \oplus S(4) &= (a, d, e) \\ S(3) \oplus S(4) &= (b, c, d, g)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S(1) \oplus S(2) \oplus S(3) &= (b, e, f, g) \\ S(1) \oplus S(2) \oplus S(4) &= (c, d, e, f) \\ S(1) \oplus S(3) \oplus S(4) &= (a, b, d, f, g) \\ S(2) \oplus S(3) \oplus S(4) &= (a, c, g)\end{aligned}$$

$$S(1) \oplus S(2) \oplus S(3) \oplus S(4) = (f, g)$$

加上 $S(1), S(2), S(3), S(4)$ 和空集，就得到了 $\{S\}$ 中的全体集合。读者可以把这些结果，与例2-3-3中的集合相比较。

因为我们不能说每一个关联集都是割集，所以我们不能仅根据定理2-4-7就说，在一个线图中恰有 $n_v - \rho$ 个线性无关的割集。如果我们知道了一种称为“树”的特殊子图的性质，就可以很容易地说明线性无关割集的数目。对此将在后面学习，我们现在就

不研究这个问题了。不过，不用树的知识，要证明线性无关割集的精确数目也并不困难。

习 题

1. 证明一个连通图的任一割集均可表示为 $\mathcal{S}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 。
2. 设 S 是一个割集， C 是一个回路。证明 $S \cap C$ 包含偶数条边。
3. 证明任意三个不同的关联集之交是空集。
4. 设 e 是一个完全图中的一条边，(a) 计算包含边 e 的割集的数目，(b) 计算不包含边 e 的割集的数目。
5. 证明任一条边都可以被包含在一个割集中。
6. 证明在一个不可分图中，任一对边都可以被包含在一个割集中。
7. 证明对于任一条路径 P ，存在一个割集或割集的无重边并 S ，使得 $P \subset S$ 。
8. 设 S 是线图 G 中的一个边集。假定从 G 中删除 S 的所有边，使它的秩减少 $k \geq 1$ 。证明或否定，当且仅当删除 S 的任一真子集的所有边，使秩最多减少 $k-1$ 时， S 是一个割集或割集的无重边并。
9. 假定在一个线图 G 中，任一对顶点之间最多有一条边。设 Ω 是 G 中所有顶点的集体。证明对于 Ω 的每一个真子集 Ω_1 ，当且仅当 $\mathcal{S}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 是割集时， G 是一个完全图。
10. 设 G 是包含 n_v 个顶点的连通线图，则 $\{S\}$ 包含 2^{n_v-1} 个集合。注意 $\{S\}$ 是所有的割集，割集的无重边并和空集的集体。
11. 设 e_1 和 e_2 是一个包含 n_v 个顶点的完全图的两条边。证明包含 e_1 和 e_2 的割集的数目是 2^{n_v-2} 。
12. 设 G 是一个线图， S 是包含边 e 的一个割集。设 G_e 是从 G 中删除边 e 得到的线图。说明如果 S 包含的边不止一条，则 $S - (e)$

是 G_e 的一个割集。

13. 设 G 是一个线图, S 是一个割集。假定边 e 在 G 中但不在 S 中, 设 G_e 是从 G 中短路边 e (即将 e 的端点重合起来) 得到的线图, 证明 S 是 G_e 的一个割集。

14. 证明如果一个关联集 $S(v)$ 不是割集, 则顶点 v 是割点。

第三章 线图的矩阵表示和树

3-1 关联矩阵

我们可以用矩阵代替集合，来表示一个线图。假定我们用矩阵的行 p 和列 q 分别表示子图 g_p 和边 e_q ，则可以用下面的方法来说明哪些边属于子图 g_p ：如果 e_q 在子图 g_p 中，就记 (p, q) 元为1；如果 e_q 不在子图 g_p 中，就记 (p, q) 元为0。

如果一个矩阵的所有行都代表一个线图的关联集，则称此矩阵为关联矩阵。类似地，一个割集矩阵的行代表割集和割集的无重边并，而回路矩阵的各行代表回路和回路的无重边并。这里，我们将要讨论割集矩阵和回路矩阵的某些性质，并且要导出一种确定一个给定矩阵是否为割集矩阵（或回路矩阵）的方法。首先，我们来考虑关联矩阵。

定义3-1-1 一个穷举关联矩阵(*exhaustive incidence matrix*)用符号 A_e 表示，其 (p, q) 元 a_{pq} 定义为

$$a_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{若边 } q \text{ 与顶点 } p \text{ 关联} \\ 0 & \text{若 } q, p \text{ 不关联} \end{cases} \quad (3-1-1)$$

例如，图3-1-1所示线图的穷举关联矩阵 A_e 为

$$A_e = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

其中第 1 行代表的关联集 $S(1)$ 是 (f, g) . 与顶点 2 对应的关联集 $S(2)$ 由第 2 行表示等等. 我们可以看到, A_c 的每一行代表一个顶点, 也代表与此顶点对应的关联集.

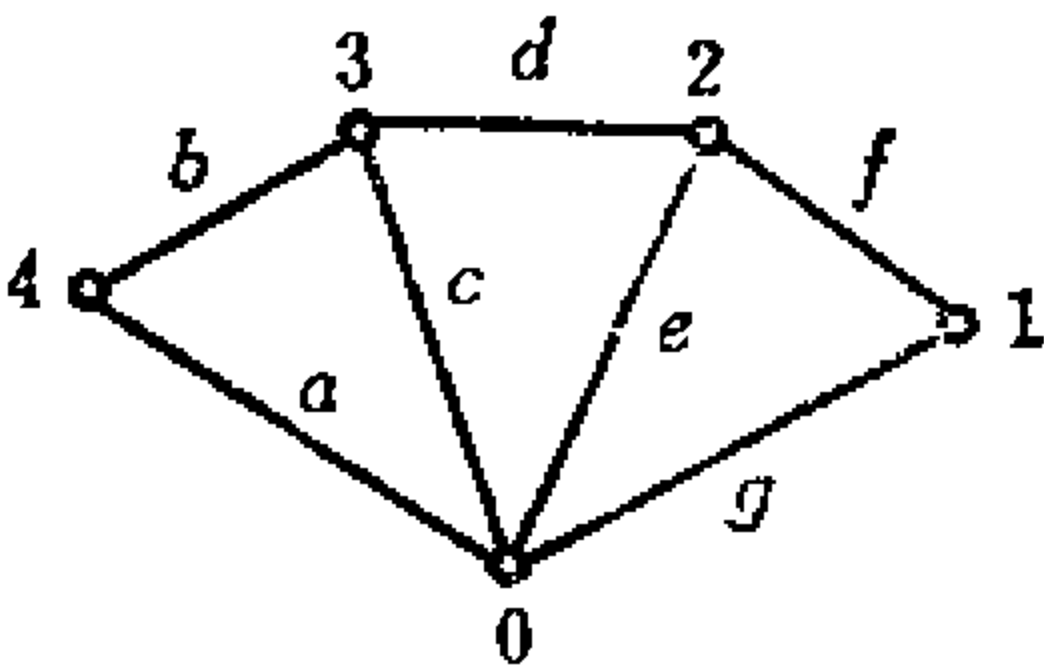


图3-1-1 线图 G

由于一条边有两个端点, 故在穷举关联矩阵的每一列中, 恰有两个 1. 为了求出关联矩阵的秩, 我们首先来研究对线图 G 的关联矩阵的一种运算. 当我们将 G 的一些顶点合并起来, 得到一个新的线图时, 这种运算使所得的矩阵成为新线图的关联矩阵. 由于我们只讨论不含自环的线图, 而重合某些顶点可能产生自环, 所以必须对线图作进一步的限制. 为此, 我们作如下约定:

当对一个线图作某种运算产生了自环时, 我们将其删除, 以使所得的线图不含自环.

例如, 在图3-1-1所示的线图中, 将顶点 4 和 0 重合在一起, 则在所得的图里, 边 a 变成了一个自环. 根据约定, 边 a 将被删去, 于是得到图3-1-2的线图. 这个图的穷举关联矩阵是

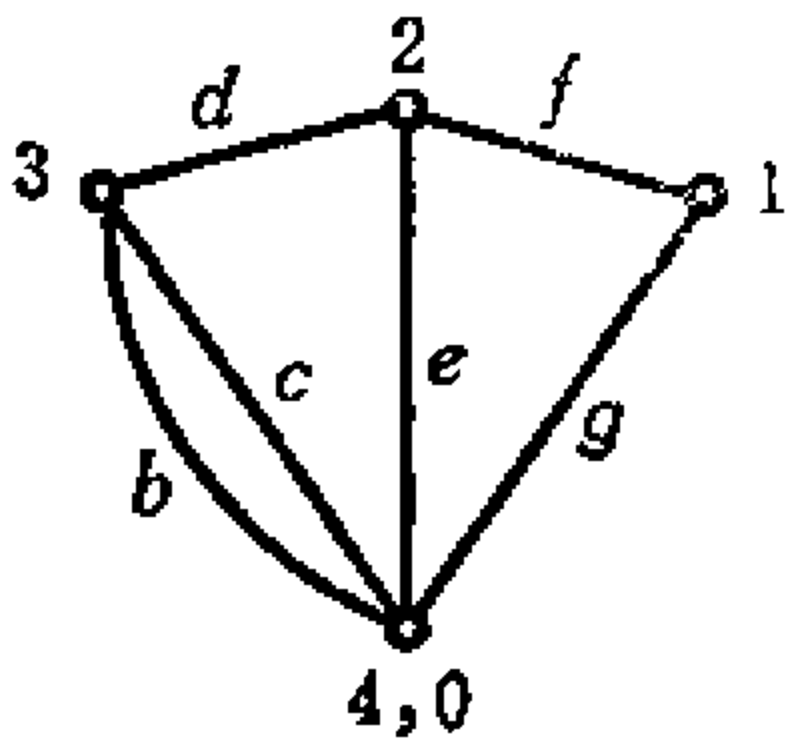


图3-1-2 在图3-1-1所示线图 G 中, 重合顶点 4 和 0 得到的线图

$$A_{c2} = \begin{matrix} & \begin{matrix} b & c & d & e & f & g \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \text{ 和 } 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

设 A_c 是线图 G 的穷举关联矩阵. 将 G 的顶点 i 和 j 重合在一起, 就得到线图 G' , 设它的穷举关联矩阵是 A'_c . 设 $A_c = [a_{pq}]$ 的行 i 代表顶点 i , 行 j 代表顶点

j ，如果我们把 A_e 的行 i 加到行 j 上，那么所得的行 j 中每一个元素应该是 $a_{ir} + a_{jr}$ 。根据 a_{ir} 和 a_{jr} 的不同数值，可以分为以下几种情形：

情形 1 $a_{ir} + a_{jr} = 1$ (a_{ir} , a_{jr} 中有一个为 1，另一个为 0) (3-1-2)

情形 2 $a_{ir} + a_{jr} = 0$ (a_{ir} 和 a_{jr} 均为 0) (3-1-3)

情形 3 $a_{ir} + a_{jr} = 2$ (a_{ir} 和 a_{jr} 均为 1) (3-1-4)

如果 i 和 j 中有一个是与列 r 对应的边 e_r 的端点，而另一个不是 e_r 的端点，就出现情形 1。如果 i 和 j 都不是 e_r 的端点，则出现情形 2。因此，在这两种情形下， A_e' 的行 j 就等于 A_e 的行 i 和 j 相加。

情形 3 (即 $a_{ir} + a_{jr} = 2$) 说明，在图 G 中 e_r 是连接在顶点 i 和 j 之间的。于是，根据前边的约定，在 i 和 j 重合时，边 e_r 应当被删去。这就是说， $a_{ir} + a_{jr}$ 应当等于 0，而不等于 2。因此，我们可以按照 $1 + 1 = 0$ 的规则来把 A_e 的行 i 加到行 j ，从而将行 i 从 A_e 中删去，得到穷举关联矩阵 A_e' 。这种代数运算是模 2 的剩余类。在本章中，我们用它来进行矩阵运算。下面是模 2 算法的加法表和乘法表。

加 法 表

	1	0
1	0	1
0	1	0

乘 法 表

	1	0
1	1	0
0	0	0

前面说过，穷举关联矩阵的每一行代表一个顶点，同时也代表与此顶点对应的关联集。设在线图 G 中， $S(i)$ 是与顶点 i 对应的关联集， $S(j)$ 是与顶点 j 对应的关联集。则边集 $S(i) \oplus S(j)$ 中的边或与顶点 i 关联，或与顶点 j 关联，但不同时与 i 和 j 关联。这就说明，在一个矩阵的代表 $S(i) \oplus S(j)$ 的行里，当且仅

当边 e 与顶点 i 或 j 关联, 但不同时与二者关联时, 对应于边 e 的列为 1. 由于我们采用模 2 加法, 行 i 和行 j 的和就给出了对应 $S(i) \oplus S(j)$ 的行. 换句话说, 在一个穷举关联矩阵 A_e 中, 行的加法恰好与关联集的环和一致. 因此, 根据定理 2-4-7, A_e 的秩* 等于 $n_v - \rho$, 其中 n_v 是 G 的顶点数, ρ 是 G 的最大连通子图数.

下面我们可以直接从 A_e 出发, 来说明 A_e 的秩是 $n_v - \rho$. 由于在 A_e 的每一列中恰有两个非零元 (因为每一边有两个端点), 把除最后一行外所有的行加到最后一行 (模 2 加法), 则最后一行全部变成零. 因此 A_e 的秩必少于 A_e 的行数. 但 A_e 的行数就是 G 的顶点数 n_v , 故 A_e 的秩 $R(A_e)$ 应满足下式:

$$R(A_e) \leq n_v - 1 \quad (3-1-5)$$

假定 G 是一个连通的线图. 设 A_e 的第一列代表边 e , 它的两个端点是 i 和 j . 调整行的次序, 我们可以使行 i 变成第一行:

$$A_e = \begin{array}{c} i \\ j \end{array} \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} e \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & A_{e1} \end{array} \right] \quad (3-1-6)$$

注意在列 e 中, 行 i 和行 j 处是 1, 其余的元素是 0. 把行 i (第一行) 加到行 j , 得到

* 一个矩阵的秩等于这个矩阵中最大非奇异子矩阵的阶数. 所谓非奇异子矩阵是行列式不为零的方子阵.

$$A'_e = \begin{bmatrix} i & 1 & & \\ & 0 & & \\ & \vdots & & \\ & 0 & A'_{e1} & \\ & 0 & & \\ j & 0 & & \\ & \vdots & & \\ & 0 & & \end{bmatrix} \quad (3-1-7)$$

我们已经知道，矩阵 A'_{e1} 是使 G 的顶点 i 和 j 重合得到的线图 G' 的穷举关联矩阵。 G' 是连通的，因为短路一个连通图中的一边仍得连通图。因此， A'_{e1} 具有与 A_e 相同的性质。用上面采用的方法，即调整行的顺序并将一行加到另一行，我们可以使 A'_{e1} 的第一列变成一个单位列向量，其中只在第一行有一个 1。即

$$A''_e = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 0 & 0 & \\ & \vdots & \vdots & A'_{e2} \\ & 0 & 0 & \end{bmatrix} \quad (3-1-8)$$

并且 A'_{e2} 是一个连通图的穷举关联矩阵，于是 A'_{e2} 也具有与 A_e 相同的性质，如此类推。

一般地，我们可以将 A_e 变成下面的形式

$$A_e^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & & \cdots & & \\ 0 & 1 & \cdots & & \\ 0 & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ 0 & 0 & & & & A'_{ek} \\ & 0 & & & & \end{bmatrix} \quad (3-1-9)$$

其中 $A'_{e,k}$ 是一个连通图的穷举关联矩阵。我们还可以继续修改 A_e ，直到 $A'_{e,k}$ 只包含一行。当 $A'_{e,k}$ 只包含一行时，由于我们排除了自环，对应的线图不含任何边，于是 $A'_{e,k}$ 的元素必全为零，也就是说，一个连通线图的 A_e 可以变成

$$A_e^{(n_v-1)} = \begin{bmatrix} 1 & & \cdots & & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{3-1-10}$$

显然这种运算不改变矩阵的秩。因此我们从结果可以看出，至少存在一个阶为 $n_v - 1$ 的子矩阵，其行列式的值非零。

定理3-1-1 一个包含 n_v 个顶点的连通线图的穷举关联矩阵 A_e 的秩 $R(A_e)$ 是 $R(A_e) = n_v - 1$ (3-1-11)

例3-1-1 考虑下面的矩阵，它是图3-1-1所示线图的穷举关联矩阵。

$$A_e = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

交换列 g 和列 a ，将行 1 加到行 0，得

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} g & b & c & d & e & f & a \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

交换列 a 和列 b ，把行 2 加到行 3，得

	g	d	c	b	e	f	a
1	1	0	0	0	0	1	0
2	0	1	0	0	1	1	0
3	0	0	1	1	1	1	0
4	0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	1	0	1	1	1

把行 3 加到行 0，得

	g	d	c	b	e	f	a
1	1	0	0	0	0	1	0
2	0	1	0	0	1	1	0
3	0	0	1	1	1	1	0
4	0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	1	0	0	1

最后，把行 4 加到行 0，就得到

	g	d	c	b	e	f	a
1	1	0	0	0	0	1	0
2	0	1	0	0	1	1	0
3	0	0	1	1	1	1	0
4	0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0

假定 G 是由 ρ 个最大连通子图 g_1, g_2, \dots, g_ρ 组成的分离图。设 g_r 的边数和顶点数分别为 $n_{e,r}$ 和 $n_{v,r}$ ，其中 $r = 1, 2, \dots, \rho$ 。调整行和列的顺序，可使图 G 的 A_e 具有以下性质：(1) 前 $n_{v,1}$ 行表示 g_1 中的顶点，接下来的 $n_{v,2}$ 行表示 g_2 的顶点， \dots ，最后的 $n_{v,\rho}$ 行表示 g_ρ 的顶点；(2) 前 $n_{e,1}$ 列表示 g_1 的边，接下来的 $n_{e,2}$ 列表示 g_2 的边， \dots ，最后的 $n_{e,\rho}$ 列表示 g_ρ 的边。这个穷举关联矩阵 A_e 可以被分块为

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} g_1 \text{ 中的边 } \quad g_2 \text{ 中的边 } \cdots g_\rho \text{ 中的边} \\
 g_1 \text{ 中的顶点 } \\
 g_2 \text{ 中的顶点 } \\
 \vdots \\
 g_\rho \text{ 中的顶点} \end{array}
 \begin{bmatrix}
 A_{e1} & & & \\
 & A_{e2} & & 0 \\
 & & \ddots & \\
 0 & & & A_{e\rho}
 \end{bmatrix}
 \end{array} \quad (3-1-12)$$

其中 A_{er} 是 g_r 的穷举关联矩阵, $r=1,2,\cdots,\rho$. 因为 A_{er} 是一个连通图 g_r 的穷举关联矩阵, 故 A_{er} 的秩是 $n_{er}-1$. 从而 G 的秩 $R(A_e)$ 是 $n_e-\rho$.

定理3-1-2 穷举关联矩阵的秩等于线图的秩.

根据定理3-1-2, 我们可以定义一个线图的关联矩阵 A 如下.

定义3-1-2 在式 (3-1-12), 所示一个线图的穷举关联矩阵中, 从每一个 A_{er} 里删去一行, 得到一个 $n_e-\rho$ 行的矩阵 A . 称 A 为此线图的关联矩阵. A 的秩等于线图的秩.

注意, 一个连通线图的关联矩阵 A 是从它的穷举关联矩阵 A_e 中删除任一行得到的. 因为关联矩阵的每一行代表一个顶点, 当线图连通时, 为了得到线图的关联矩阵, 而从穷举关联矩阵删去一行, 这一行所对应的顶点称为参考点.

定义3-1-3 对于连通线图的一个关联矩阵而言, 不由它的任何一行所代表的那个顶点, 称为此连通线图的参考点.

例如, 假定图3-1-1所示连通线图的一个关联矩阵 A 是

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} a & b & c & d & e & f & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad (3-1-13)$$

则顶点 0 是参考点.

3-2 树

有一种称为“树”的子图，它不仅在理论上，而且在线图的各种应用，例如电网络的分析中，都具有非常重要的作用。这里我们要介绍树的概念，研究关联矩阵和树的关系。首先我们定义一个矩阵的大子阵如下。

定义3-2-1 对于一个 $p \times q$ 阶矩阵，如果一个方子阵的阶等于 p 和 q 的最小值，则称此子阵为大子阵。大子阵的行列式称为大子式。

例如，式(3-1-13)中关联矩阵 A 的大子阵由四行组成，因为 A 的行数少于列数。其中一个大子阵是

$$\begin{array}{ccccc} & a & b & c & d \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

为了说明树与关联矩阵的大子阵之间的关系，我们考虑一个具有 n_v 个顶点的连通线图 G 。设 A 是 G 的一个关联矩阵。因为据定义3-1-2， A 的秩等于它的行数，故 A 至少有一个行列式不为零的大子阵。考虑 G 的一个子图 g_m ，它的边对应于非奇异大子阵 A_m 的列。因为 A_m 是非奇异的， A_m 一定是 g_m 的一个关联矩阵。因为 A_m 的行数是 $n_v - 1$ ，且每一行对应除参考点外的一个顶点，故 g_m 有 n_v 个顶点。因为 A_m 是一个方阵，其每一列对应一条边，故 g_m 共有 $n_v - 1$ 条边。并且 g_m 的秩是 $n_v - 1$ 。因此 g_m 必为连通的。这样的一个子图就称为树。

定义3-2-2 在一个有 n_v 个顶点的连通线图中，有 n_v 个顶点和 $n_v - 1$ 条边的连通子图称为树。

现在很明显，如果一个线图 G 的子图 g_m 是树，而大子阵 A_m 的列对应 g_m 的边，则 A_m 是非奇异的。另一方面，如果一个包含 n_v 个顶点和 $n_v - 1$ 条边的子图 g_m 是分离的，则 g_m 的秩是 $n_v - \rho$ （这里 $\rho > 1$ ），而由于每一个大子阵包含 $n_v - 1$ 行，若大子阵 A_m 的列与 g_m 的全部边对应，则 A_m 的秩小于它的行数。因此 A_m 是奇异的*。

定理3-2-1 设 A_m 是一个连通图的关联矩阵的一个大子阵，则 A_m 是非奇异的，当且仅当由所有与 A_m 的列对应的边组成的子图是树。

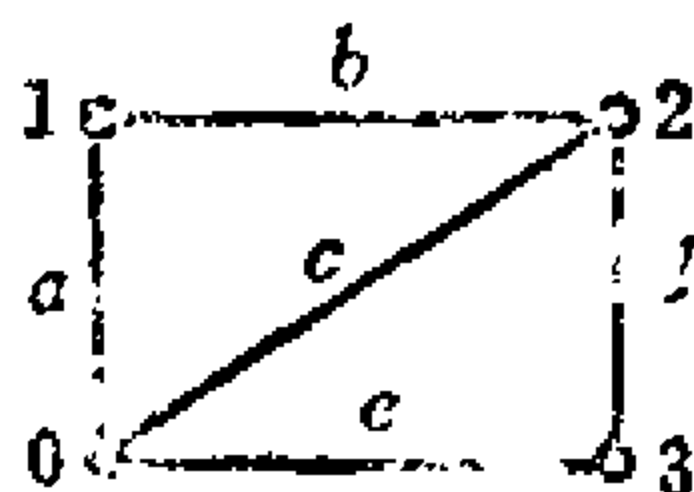


图3-2-1 一个线图

例3-2-1 在图3-2-1所示的线图中，以0为参考点，关联矩阵 A 是

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

A 的非奇异子阵和相应的子图（它们都是树）见表3-2-1。例如方子阵

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

* 如果一个大子阵的行列式为零，则称此大子阵是奇异的。

是奇异的，因为与此子阵对应的子图由边 a, b, c 和顶点 $0, 1, 2, 3$ 组成，它是分离的。

根据树的定义，显然在一个分离图中没有树。但是，对应于分离图关联矩阵的每一个非奇异大子阵，存在着一个子图，这样的子图称为林。

表3-2-1 非奇异子阵和树

非奇异子阵		树	非奇异子阵		树
$\begin{matrix} & a & b & d \\ t_1 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$			$\begin{matrix} & a & d & e \\ t_5 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$		
$\begin{matrix} & a & b & e \\ t_2 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$			$\begin{matrix} & b & c & d \\ t_6 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$		
$\begin{matrix} & a & c & d \\ t_3 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$			$\begin{matrix} & b & c & e \\ t_7 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$		
$\begin{matrix} & a & c & e \\ t_4 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$			$\begin{matrix} & b & d & e \\ t_8 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$		

定义3-2-3 设分离图 G 由 ρ 个最大连通图 G_1, G_2, \dots, G_ρ 组成，若对所有 $i = 1, 2, \dots, \rho$ ， τ_i 是 G_i 的树，则由 ρ 个最大连通子图 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\rho$ 组成的子图 τ 称为林。

例如，考虑图3-2-2所示的线图 G ，它由三个最大连通子图 G_1 ， G_2 和 G_3 组成。图3-2-3所示的子图包含三个最大连通子图 τ_1 ， τ_2 和 τ_3 ，因为 τ_1 是 G_1 的树， τ_2 是 G_2 的树， τ_3 是 G_3 的树，所以该子图是一个林。

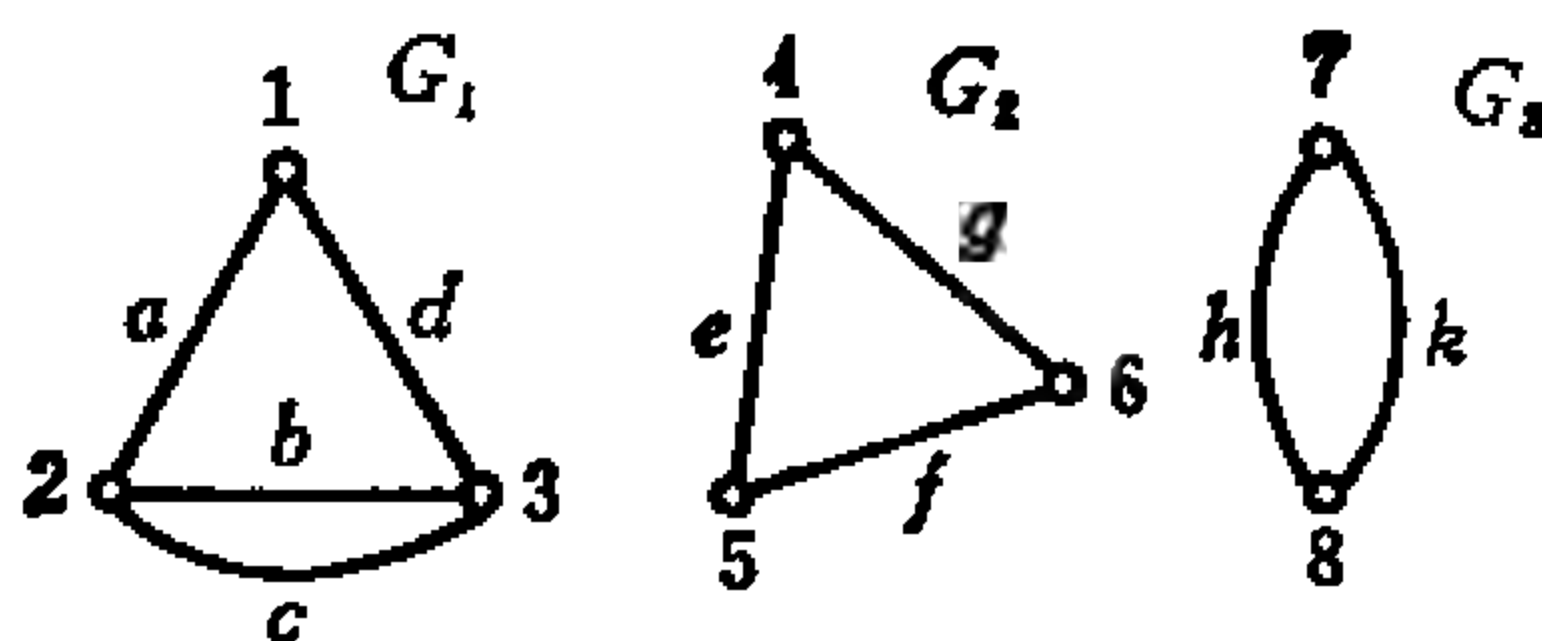


图3-2-2 分离线图 G

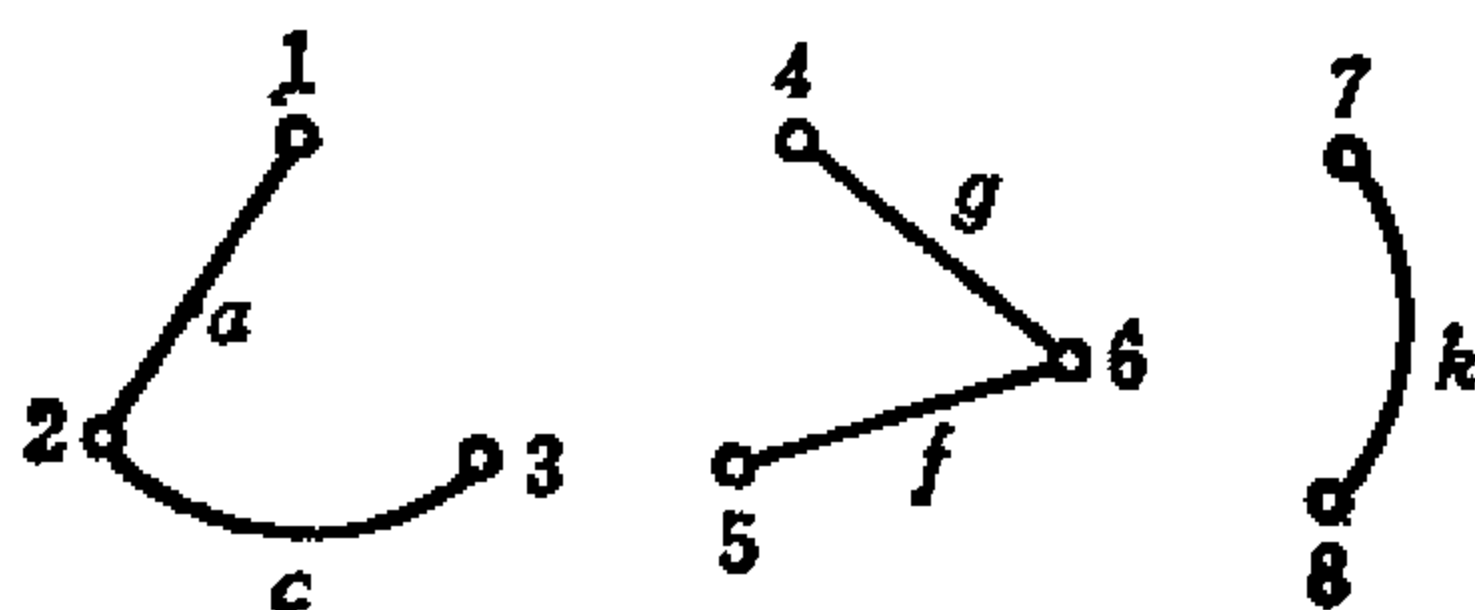


图3-2-3 G 的一个林

虽然我们在这里只讨论树的性质，但从定义3-2-3可看出，这些性质也是林的每一个最大连通子图的性质。因此我们也能很容易地想象出林的性质。

树的一个重要性质由以下定理给出。

定理3-2-2 一个连通图的树不包含回路。

证明： 假定一个树包含回路，则删除回路的一边，所得的图仍是连通的。但是，边数将减少1。于是将得到一个具有 n_v 个顶点和 $n_v - 2$ 条边的连通图。短路一个连通图的一条边，得到少一个顶点的连通图。用逐次短路边的办法，我们将得到一个至少有

两个顶点而没有边的连通图，这是不可能的。因此树中不可能有回路。

(证毕)

根据定义3-2-2和定理3-2-2，树具有以下四个性质：

1. 它是连通的。
2. 它包含 n_v 个顶点。
3. 它不包含回路。
4. 它包含 $n_v - 1$ 条边。

我们可以很容易地说明，其中任意三个性质蕴涵了第四个性质。并且，这些性质中每两个就足以定义一个树，如以下定理所示。

定理3-2-3 对于有 n_v 个顶点的连通线图来说，一个包含 $n_v - 1$ 条边且不含回路的子图是树。

这个定理的证明留给读者。

以下定理给出了树的一些简单性质。

定理3-2-4 当且仅当一个线图的任两个顶点间恰有一条路径时，这个线图是一个树。

证明：因为在线图 G 的任两个顶点间恰有一条路径，所以它是连通的，并且显然没有回路。因此，由树的定义，线图 G 是一个树。反过来也易证。 (证毕)

定理3-2-5 在一个连通线图中至少存在一个树。

证明：因为一个关联矩阵的非奇异大子阵是存在的，故据定理3-2-1，树的存在是显然的。 (证毕)

定理3-2-6 在一个树中，至少存在两个度为1的顶点。

证明：在第1—2节中，我们曾经说过，一个线图 G 中所有顶点的度数 $d(v)$ 的和等于边数 n_e 的两倍，即

$$\sum_{v \in G} d(v) = 2n_e \quad (3-2-3)$$

我们这里考虑的图 G 是树，据定义3-2-2，其边数为 $n_v - 1$ ，其中 n_v 是 G 的顶点数。因此

$$\sum_{v \in G} d(v) = 2(n_v - 1) \quad (3-2-4)$$

假定 G 的每一顶点度都等于或大于 2，则

$$\sum_{v \in G} d(v) \geq 2n_v \quad (3-2-5)$$

但式(3-2-4)表明， $\sum_{v \in G} d(v)$ 不能大于 $2n_v - 2$ 。因此必定有些顶点度小于 2。假定只有一个顶点度为 1（而其它所有顶点度至少是 2），则

$$\sum_{v \in G} d(v) \geq 2(n_v - 1) + 1$$

仍大于 $2n_v - 2$ 。 (证毕)

在第一章中，我们讨论过 τ 图，它是一个没有回路的子图。下面的定理说明一个 τ 图是树的条件。

定理3-2-7 对于一个有 n_v 个顶点的连通线图来说，一个包含 $n_v - 1$ 条边的 τ 图是树。

证明可用定理3-2-3来完成。

τ 图不含回路这个性质说明，一个 n_v 阶连通线图的每一个 τ 图最多只能有 $n_v - 1$ 条边。因此，如果我们知道了所有的 τ 图，应用定理3-2-7就可以很容易地求出所有的树。但是，要得到一个线图的所有 τ 图是不容易的，除非它们已经求出，所以这种方法是不实用的。求出所有树的其它方法，将在后面研究。

3-3 回路矩阵

正如关联矩阵表明了一个线图中每一条边的位置那样，一个

回路矩阵表示每一条边所属的回路。现在我们要来讨论回路矩阵的某些性质，特别是回路矩阵的秩，它等于一个线图的所有欧拉图的集体 $\{E\}$ 中生成元的数目。我们还将研究另一个重要性质，根据这个性质，我们可以把一个回路矩阵变换成关联矩阵，反之亦然。首先，我们定义穷举回路矩阵如下。

定义3-3-1 一个线图的穷举回路矩阵用 B_c 表示，它的各行代表所有的回路和回路的无重边并（即欧拉图），它的各列代表边。穷举回路矩阵 $B_c = [b_{pq}]$ 的元 b_{pq} 是

$$b_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{若边 } q \text{ 在回路（或回路的无重边并） } p \text{ 中} \\ 0 & \text{若边 } q \text{ 不在回路（或回路的无重边并） } p \text{ 中} \end{cases} \quad (3-3-1)$$

例如，图3-3-1所示线图的穷举回路矩阵 B_c 是

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>
C_1	1	1	1	0	0	0	0
C_2	1	1	0	1	1	0	0
C_3	1	1	0	1	0	1	1
C_4	0	0	1	1	1	0	0
C_5	0	0	0	0	1	1	1
C_6	0	0	1	1	0	1	1
$C_7 = C_1 \oplus C_5$	1	1	1	0	1	1	1

因为 B_c 中每一行代表一个回路或回路的无重边并，故行与行的和（模2）或为回路，或为回路的无重边并。例如，上例中 B_c 的前两行加起来就得到第四行。

设 G 是一个包含 n_e 条边和 n_v 个顶点的线图， A 和 B_c 分别是 G 的关联矩阵和穷举回路矩阵，其中

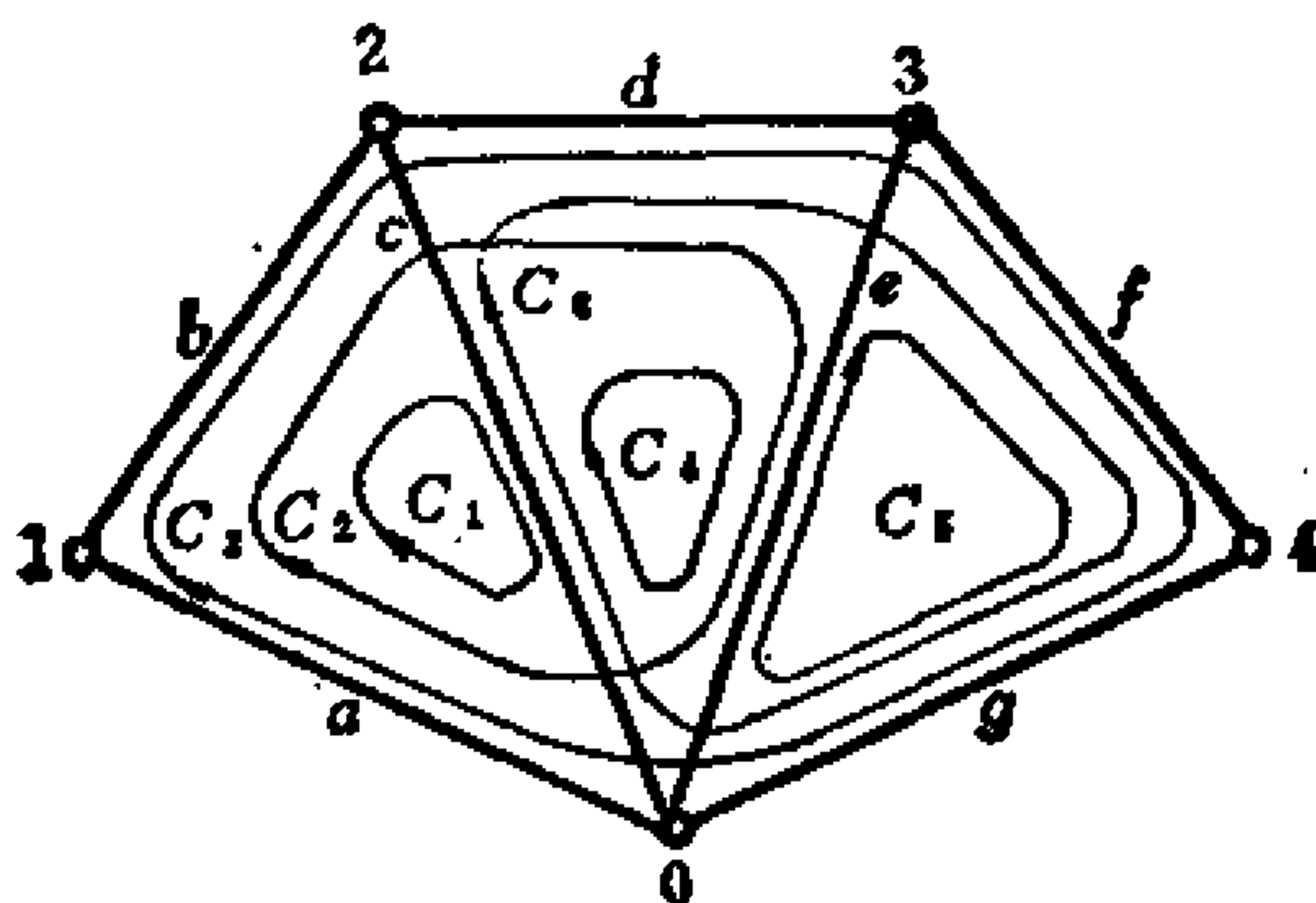


图3-3-1 一个线图

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_{n_v-1} \end{bmatrix} \quad (3-3-2)$$

$$B_e = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ B_p \end{bmatrix} \quad (3-3-3)$$

调整 A 的列，使得对于 $k = 1, 2, \dots, n_e$ ， A 和 B_e 的第 k 列表示同一条边。则

$$AB_e' = \begin{bmatrix} A_1 B_1' & A_1 B_2' & \dots & A_1 B_p' \\ A_2 B_1' & A_2 B_2' & \dots & A_2 B_p' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n_v-1} B_1' & A_{n_v-1} B_2' & \dots & A_{n_v-1} B_p' \end{bmatrix} \quad (3-3-4)$$

其中上标 t 表示矩阵的“转置”，且

$$A_i B_j^t = \sum_{k=1}^{n_e} a_{ik} b_{jk} \quad (3-3-5)$$

注意 $a_{ik} = 1$ 意味着边 k 与顶点 i 关联， $b_{jk} = 1$ 意味着边 k 在 B_c 的第 j 行所代表的回路（或回路的无重边并）中。于是式 (3-3-5) 中非零项的数目就是这样的边的数目：其中每一条边与顶点 i 关联，同时在回路 j （或由 B_c 的第 j 行所代表的回路的无重边并）中。由于一个回路或回路的无重边并中每一个顶点的度都是偶数，所以式 (3-3-5) 中非零项的数目是偶数。又因每一个非零项为 1，而我们采用的是模 2 加法，故对所有的 i 和 j ，

$$A_i B_j^t = 0 \quad (3-3-6)$$

定理3-3-1 设 A 和 B_c 是一个线图的关联矩阵和穷举回路矩阵，则

$$AB_c^t = 0^* \quad (3-3-7)$$

类似地有

$$B_c A^t = 0 \quad (3-3-8)$$

例3-3-1 图3-3-1中线图的 AB_c^t 是

$$AB_c^t = \begin{array}{c|ccccccc} & a & b & c & d & e & f & g \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

* 这里 0 表示所有元素均为零的矩阵。

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	
	1	1	1	0	0	0	1	a
	1	1	1	0	0	0	1	b
	1	0	0	1	0	1	1	c
	0	1	1	1	0	1	0	$d = 0$
	0	1	0	1	1	0	1	e
	0	0	1	0	1	1	1	f
	0	0	1	0	1	1	1	g

定义3-3-2 对于线图 G 的一个树（或林） t ，不在 t 中的边称为弦。 G 的不在 t 中的所有边的集合叫做关于树（或林） t 的弦集。

我们已经知道，对于有 n_v 个顶点的连通线图，一个树包含 $n_v - 1$ 条边，因此，一个弦集包含 $n_e - n_v + 1$ 条边，这里 n_e 是线图中边的数目。

例如，边集 (a, c, e, g) 是图3-3-1所示线图的一个树，则边集 (b, d, f) 是关于树 (a, c, e, g) 的弦集。注意图3-3-1中线图的边数和顶点数分别为 $n_e = 7, n_v = 5$ 。因此弦集包含 $n_e - n_v + 1 = 3$ 条边。

如果将一条弦 d 添加到树 t 中，所得的图 $(d) \cup t$ 正好包含一个回路。根据定理3-2-4，我们知道，在一个树中任两个顶点之间恰有一条路径，所以这点是容易看出的。因为每添加一条弦到树中，可得到一个回路，我们有 $n_e - n_v + 1$ 条弦，可以得到 $n_e - n_v + 1$ 个回路，其中每一个正好包含关于树 t 的弦集中的一条弦。这些回路的集合称为关于树 t 的基本回路集合。

定义3-3-3 设 $(e_1, e_2, \dots, e_{n_e - n_v + 1})$ 是一个连通线图关于树 t 的弦集，又设 C_i 是 $t \cup (e_i)$ 中的回路， $i = 1, 2, \dots, n_e - n_v + 1$ 。则回路集体 $C_1, C_2, \dots, C_{n_e - n_v + 1}$ 称为关于树 t 的基本回路集合。

从这个定义可看出，关于树 t 的弦集中每一条弦恰在关于树 t 的基本回路集合中一个回路里。因此在这些基本回路中，任取

几个作环和都不会成为空集。也就是说，这些基本回路是线性无关的。例如，对于图3-3-1中线图的树 $t = (a, c, e, g)$ ，一个基本回路集合由 (a, b, c) ， (c, d, e) 和 (e, f, g) 组成。显然，它们是线性无关的。

调整一个穷举回路矩阵 B_c 的列，使它的前 $n_c - n_v + 1$ 列对应关于树 t 的所有弦，前 $n_c - n_v + 1$ 行表示关于树 t 的基本回路矩阵集合中的回路，便得到以下形式的矩阵：

$$\begin{array}{c}
 C_1 \\
 C_2 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 C_{n_c - n_v + 1} \\
 \vdots \\
 \vdots
 \end{array}
 B_c =
 \begin{array}{c}
 e_1 \ e_2 \ \cdots e_{n_c - n_v + 1} \ e'_1 \ \cdots e'_{n_v - 1} \\
 \left[\begin{array}{cccccc}
 1 & 0 & & & 0 & \cdots \\
 0 & 1 & & & 0 & \cdots \\
 0 & 0 & & & 0 & \\
 \vdots & \vdots & & & \vdots & \\
 & & & & 0 & \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots \\
 \cdots & & & & & \cdots \\
 \cdots & & & & & \cdots
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \tag{3-3-9}$$

可以看出，在 B_c 的左上角有一个单位矩阵。这是因为，每一条弦恰在关于树 t 的基本回路集合的一个回路中。

取出式(3-3-9)中 B_c 的前 $n_c - n_v + 1$ 行得到的子矩阵，称为基本回路矩阵，记为 B_f 。

定义3-3-4 一个线图的包含 $n_c - n_v + \rho$ 行，且具有以下形式的回路矩阵 $*$ ，称为基本回路矩阵：

$$B_f = [U B_{f_1}] \tag{3-3-10}$$

其中 ρ 是此线图的最大连通子图的数目， U 是一个单位矩阵。

例如，在图3-3-1所示的线图中，如果我们取树 $t = (a, c, e, g)$ ，

* 关于回路矩阵的定义，见定义3-3-5。——译注

则关于树 (a, c, e, g) 的基本回路集合是

$$C_1 = (b, a, e)$$

$$C_2 = (d, c, e)$$

$$C_3 = (f, e, g)$$

注意其中 b, d, f 是弦。关于树 $t = (a, c, e, g)$ 的基本回路矩阵是

$$B_f = \begin{matrix} & b & d & f & a & c & e & g \\ \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

取不同的树，我们就得到不同的基本回路矩阵。

定理3-3-2 在一个连通线图的基本回路矩阵 $[UB_{f_{12}}]$ 中，与 $B_{f_{12}}$ 的列对应的边组成一个树。

证明：设一个连通图的关联矩阵是

$$A = [A_{11} A_{12}]$$

其中， A 的第 i 列和基本回路矩阵 $B_f = [UB_{f_{12}}]$ 的第 i 列代表同一条边， $i = 1, 2, \dots, n_e$ 。由定理3-3-1，

$$AB_f' = A_{11} + A_{12}B_{f_{12}}' = 0$$

或

$$A_{11} = A_{12}B_{f_{12}}'$$

因此

$$A = [A_{12}B_{f_{12}}' \quad A_{12}] = A_{12}[B_{f_{12}}' \quad U]$$

因为 A 的秩与 A 的行数相同， A_{12} 必为非奇异的。故据定理3-2-1，与 A_{11} 的列对应的边构成树。而 A_{12} 的列与 $B_{f_{12}}$ 的列都对应于相同的边。因此，与 $B_{f_{12}}$ 对应的边构成树。 (证毕)

对于由 ρ 个最大连通子图 G_1, G_2, \dots, G_ρ 组成的分离线图 G ，基本回路矩阵可分块为

$$B_f = \begin{bmatrix} B_{f1} & & & \\ & B_{f2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_{fp} \end{bmatrix} \quad (3-3-11)$$

其中，每一个 B_{fp} 是 G_p 的基本回路矩阵，这是因为，对于 $1 \leq p < q \leq \rho$ ， G_p 中的任一边不可能在 G_q 的回路中。由于每一个 B_{fp} 的形式为 $[U_p B_{fp12}]$ ，我们可以将 B_f 调整为

$$B_f = \begin{bmatrix} U_1 & & B_{f112} & & 0 \\ & U_2 & & B_{f212} & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & 0 & B_{fp12} \\ & & U_p & & \end{bmatrix} = [U B_{f12}] \quad (3-3-12)$$

因此，要得到一个分离图的基本回路矩阵 B_f ，可用林来代替树。首先选取给定分离图的一个林，譬如说 t_f 。然后我们调整 B_f 的列，使它的前 $n_c - n_s + \rho$ 列代表不在林 t_f 中的边。现在，我们把第一列所代表的边 e_1 ，加入林 t_f ，所得的图 $t_f \cup (e_1)$ 恰有一个回路，显然它包含 e_1 。我们用 B_f 的第一行来表示这个回路。于是在 B_f 的 $(1, 1)$ 处是 1，接下来至少有 $n_c - n_s + \rho - 1$ 个零。然后我们把 B_f 的第二列代表的边 e_2 加入林 t_f ，所得的图 $t_f \cup (e_2)$ 也恰含一个回路，这个回路由 B_f 的第二行来表示，如此类推，最后得到的矩阵 B_f 具有 $[U B_{f12}]$ 的形式。这个矩阵叫做关于一个林的基本回路矩阵。

定理3-3-2给出了连通图基本回路矩阵的一个性质。分离线图的基本回路矩阵 $B_f = [U B_{f12}]$ 也有同样的性质。

定理3-3-3 在一个分离线图的基本回路矩阵 $B_f = [U B_{f12}]$

中，与 B_{11} 的列对应的边构成一个林。

证明留给读者。

由于在基本回路矩阵中有一个单位矩阵，而基本回路矩阵是穷举回路矩阵 B_e 的子矩阵，所以，在一个线图中，穷举回路矩阵 B_e 的秩至少是 $n_e - n_v + \rho$ 。这里 n_e 是边数， n_v 是顶点数， ρ 是最大连通子图的数目。

现在，我们要利用西勒维斯特 (Sylvester) 零度定理，证明 B_e 的秩是 $n_e - n_v + \rho$ 。

定理3-3-4 (西勒维斯特定理) 设 $H = [h_{ij}]_{p \times e}$ 和 $K = [k_{ij}]_{e \times q}$ 是两个矩阵，其中 $p \leq e$ ， $q \leq e$ ，且 H 的秩是 p 。假定

$$HK = 0 \quad (3-3-13)$$

则 K 的秩不超过 $e - p$ 。

证明：不失一般性，设

$$H = [H_{11} \ U] \quad (3-3-14)$$

其中 U 是一个 p 阶单位阵。将 K 分块为

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{12} \end{bmatrix} \quad (3-3-15)$$

$$\text{我们有} \quad HK = H_{11}K_{11} + K_{12} = 0 \quad (3-3-16)$$

$$K_{12} = -H_{11}K_{11} \quad (3-3-17)$$

此式说明， K_{12} 的任一行可由 K_{11} 的行的线性组合得到。这个组合是由 $-H_{11}$ 的一行给出的，于是 K 的秩最多等于 K_{11} 的行数，因为 H_{11} 是 $p \times (e - p)$ 矩阵， K_{11} 必为 $(e - p) \times q$ 矩阵。故 K 的秩不可能大于 $e - p$ 。 (证毕)

设有一个由 ρ 个最大连通子图组成的线图， A 和 B_e 分别是它的关联矩阵和穷举回路矩阵。由定理3-3-1，我们知道：

$$AB_e^T = 0 \quad (3-3-18)$$

又由定理3-1-2， A 的秩是 $n_v - \rho$ 。故由西勒维斯特定理， B_e 的秩不能大于 $n_e - n_v + \rho$ 。然而，我们已经知道， B_e 的秩至少是 $n_e -$

$n_e + \rho$ 。因此有以下定理。

定理3-3-5 由 ρ 个最大连通子图组成的线图的穷举回路矩阵的秩是 $n_e - n_v + \rho$ ，其中 n_e 是线图的边数， n_v 是顶点数。

由于穷举回路矩阵 B_e 的秩是 $n_e - n_v + \rho$ ，所以 B_e 的一个秩为 $n_e - n_v + \rho$ 的子矩阵就能表出一个线图的所有回路。

定义3-3-5 设 B 是由穷举回路矩阵 B_e 中 $n_e - n_v + \rho$ 行组成的子矩阵，如果 B 的秩是 $n_e - n_v + \rho$ ，则称 B 是回路矩阵。

注意一个基本回路矩阵包含 $n_e - n_v + \rho$ 个线性无关的行，显然它是穷举回路矩阵 B_e 的一个子矩阵。并且线图中的所有边都由基本回路矩阵的列表示。因此，基本回路矩阵是线图的一个回路矩阵。另外，如果一个线图中，有 $n_e - n_v + \rho$ 个回路是线性无关的（见定义2-4-1），则穷举回路中代表这些回路的行所组成的子矩阵是回路矩阵。在第1—3节中，我们已经看到，存在一个生成元的集合，它能产生 $\{E\}$ 中的全部元素。这里 $\{E\}$ 是所有的回路、回路的无重边并和空集的集体。因为一个穷举回路矩阵的行代表 $\{E\}$ 中除空集外的所有元素，所以由一个回路矩阵的行所代表的回路，将组成一个生成元集合，它能产生 $\{E\}$ 中所有的元素。

设 B_{11} 是回路矩阵 B 的一个非奇异大子阵，则我们可以将 B 表为

$$B = [B_{11} B_{12}] \quad (3-3-19)$$

因为 B_{11} 是非奇异的，故存在逆矩阵。设 B_{11}^{-1} 是 B_{11} 的逆，则用 B_{11}^{-1} 左乘式 (3-3-19)，可得

$$B_{11}^{-1} B = [U \quad B_{11}^{-1} B_{12}] \quad (3-3-20)$$

由定义3-3-4，一个基本回路矩阵 B_f 是一个能表为

$$B_f = [U \quad B_{f12}] \quad (3-3-21)$$

的回路矩阵。故 $B_{11}^{-1} B$ 是一个基本回路矩阵。并且，对于我们所选取的任一非奇异大子阵，都可以用左乘此大子阵的逆的办法，使 B 变成基本回路矩阵。因此 B 的任一非奇异大子阵的列可以变

成基本回路矩阵中 U 的列。由定理3-3-2和3-3-3，我们知道，一个基本回路矩阵中 U 的列代表的边构成一个弦集。故与 B 的任何非奇异大子阵对应的边构成关于一个林的弦集。

这个结论反过来也是对的。这就是说，对于我们所选定的任一林，可以构成一个基本回路矩阵，其中单位矩阵的列代表关于此林的所有弦。因为一个穷举回路矩阵 B_c 的任一行，可以由基本回路矩阵诸行的线性组合得到，而回路矩阵 B 是 B_c 的一个子矩阵，所以在 B 中与有关林的弦相对应的那些列，必然要变成关于此林的基本回路矩阵中的单位矩阵。因此， B 中与关于任一林的弦相对应的那些列，就构成了一个非奇异大子阵。

定理3-3-6 回路矩阵的一个大子阵是非奇异的，当且仅当它的列都与关于一个林的所有弦相对应。当 $\rho = 1$ 时，回路矩阵的一个大子阵是非奇异的，当且仅当它的列都与关于一个树的所有弦相对应。

作为一个例子，表3-3-1表明了图3-2-1所示线图中 B 的非奇异大子阵及其对应的弦集。这里

$$B = \begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

为了方便，我们定义“枝”如下。

定义3-3-6 一个选定的树（或当 $\rho > 1$ 时一个选定的林）中的各边称为树枝（林枝），或简称枝。

因为定理3-3-1给出了关联矩阵和回路矩阵之间的关系，我们可以从一个关联矩阵得到回路矩阵。为此，假定 t 是线图 G 的一个林（当 $\rho = 1$ 时是树），我们调整 G 的关联矩阵 A 的列，就可以将 A 分块为：

表3-3-1 非奇异大子阵

非奇异大子阵		弦集
\bar{z}_1	$\begin{matrix} a & c \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$	
\bar{z}_2	$\begin{matrix} a & d \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$	
\bar{z}_3	$\begin{matrix} a & e \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$	
\bar{z}_4	$\begin{matrix} b & c \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$	
\bar{z}_5	$\begin{matrix} b & d \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$	
\bar{z}_6	$\begin{matrix} b & e \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$	
\bar{z}_7	$\begin{matrix} c & d \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$	
\bar{z}_8	$\begin{matrix} c & e \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$	

$$A = [A_{11} A_{12}] \quad (3-3-22)$$

其中 A_{11} 的列与关于 t 的弦相对应. 因此 A_{12} 的列代表 t 的所有枝. 我们再调整关于 t 的基本回路矩阵 B_t 的列, 使得对 $i = 1, 2, \dots, n_s$, A 和 B_t 的第 i 列都表示同一条边, 设此基本回路矩阵是

$$B_{t,12} = [U \ B_{t,12}] \quad (3-3-23)$$

因为

$$B_t A' = [U \ B_{t,12}] \begin{bmatrix} A_{11}' \\ A_{12}' \end{bmatrix} = 0 \quad (3-3-24)$$

所以有

$$A_{11}' + B_{t,12} A_{12}' = 0 \quad (3-3-25)$$

或

$$B_{t,12} = A_{11}' [A_{12}']^{-1} \quad (3-3-26)$$

注意 A_{12} 是由与林 (或树) t 的边对应的列组成的. 因此 A_{12} 是非奇异的. 于是 A_{12}' 有逆 $[A_{12}']^{-1}$.

由式 (3-2-26) 可以看出, 知道了一个关联矩阵则基本回路矩阵可由

$$B_t = [U \ A_{11}' [A_{12}']^{-1}] \quad (3-3-27)$$

得到. 例如, 在图 3-2-1 所示的线图中, 关于树 $t = (a, b, d)$ 的基本回路矩阵可以由一个关联矩阵得出如下.

$$A = [A_{11} \ A_{12}] = \begin{array}{c} \begin{matrix} & c & e & a & b & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

A_{12}' 是

$$A_{12}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

因此, $[A_{12}']^{-1}$ 是

$$[A_{12}']^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

现在 $A_{11}'[A_{12}']^{-1}$ 可简化为

$$A_{11}'[A_{12}']^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

于是

$$B_1 = \begin{array}{cc|ccc} & c & e & a & b & d \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

3-4 割集矩阵

考虑一个关联矩阵 A 。假定我们把 A 的一行加 (模 2) 到另一行上去, 一般地, 所得的行将不再表示一个关联集, 而是表示一个割集或割集的无重边并。因此, 把 A 的各行互加, 可以得到一种叫做“割集矩阵”的矩阵。事实上, 在一个割集矩阵中, 每一行代表一个割集, 或者割集的无重边并。

定义3-4-1 穷举割集矩阵记为 Q_c , 它的行表示一个线图中所有割集和割集的无重边并。 Q_c 的每一个元素 q_{ij} 是

$$q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若边 } j \text{ 在割集 (或割集的无重边并) } i \text{ 中} \\ 0 & \text{若边 } j \text{ 不在 } i \text{ 中} \end{cases} \quad (3-4-1)$$

因为一个关联集或为割集, 或为割集的无重边并, 所以关联矩阵是 Q_c 的一个子矩阵。因此 Q_c 的秩至少是 $n_v - \rho$ 。

由定理2-4-1, 我们知道, 任一割集可由关联集的环和得

到。并且，行与行的加法（模 2）与对应于这些行的集合的环和相同。

定理3-4-1 一个穷举割集矩阵 Q_e 的秩等于 $n_e - \rho$ 。

这一定理导出了下面的定义。

定义3-4-2 由穷举割集矩阵的 $n_e - \rho$ 行构成的一个子矩阵 Q ，如其秩为 $n_e - \rho$ ，则称 Q 为割集矩阵。

例如，图3-2-1所示线图的穷举割集矩阵 Q_e 是

$$Q_e = \begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ \begin{matrix} S(1) \\ S(2) \\ S(3) \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

其中割集 S_4, S_5, S_6, S_7 分别为

$$S_4 = S(1) \oplus S(2)$$

$$S_5 = S(1) \oplus S(3)$$

$$S_6 = S(2) \oplus S(3)$$

$$S_7 = S(1) \oplus S(2) \oplus S(3)$$

取出行4, 5, 7, 就得到

$$Q = \begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ \begin{matrix} S_4 \\ S_5 \\ S_7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

这是一个割集矩阵，因为 Q 的秩等于 Q_e 的秩。注意其中 S_5 是割集 S_4 的无重边并。

根据割集矩阵的定义，任一关联矩阵 A 是一个割集矩阵。因此任一割集矩阵 Q 可表示为

$$Q = DA \quad (3-4-2)$$

其中 D 是一个 $n_v - \rho$ 阶的非奇异矩阵。（当我们说一个矩阵的秩是 $n_v - \rho$ 时，我们总是把由 ρ 个最大连通子图构成的线图看作包括 $\rho = 1$ 的情况）。

由式 (3-3-7)，我们知道

$$AB'_c = 0 \quad (3-4-3)$$

左乘一个非奇异矩阵 D ，由式 (3-4-2)，有

$$DAB'_c = QB'_c = 0 \quad (3-4-4)$$

并且对任一割集矩阵，总存在一个非奇异矩阵 D ，使得 DA 等于这个割集矩阵。因此，式 (3-4-4) 可以写作

$$Q_c B'_c = 0 \quad (3-4-5)$$

当我们用割集矩阵 Q 和回路矩阵 B 来替换 Q_c 和 B_c 时，上式也成立。

定理3-4-2 设 Q 和 B 分别为一个线图的割集矩阵和回路矩阵，对于所有的 p ， Q 和 B 的列 p 对应同一条边，则

$$QB' = 0 \quad (3-4-6)$$

且

$$BQ' = 0 \quad (3-4-7)$$

可以证明，割集矩阵的非奇异主子阵的列对应林的枝。为此，我们考虑一个关于林 t 的基本回路矩阵（注意当 $\rho = 1$ 时， t 是树）。

$$B_t = [U \ B_{t,1}] \quad (3-4-8)$$

调整割集矩阵 Q 的列，使得对所有的 p ， Q 的第 p 列与 B_t 的第 p 列表示同一条边。将 Q 分块为

$$Q = [Q_{11} \ Q_{12}] \quad (3-4-9)$$

由式 (3-4-5)

$$QB'_j = [Q_{11} Q_{12}] \begin{bmatrix} U \\ B'_{j,12} \end{bmatrix} = Q_{11} + Q_{12}B'_{j,12} = 0 \quad (3-4-10)$$

因此

$$Q_{11} = -Q_{12}B'_{j,12} \quad (3-4-11)$$

或

$$Q = [Q_{12}B'_{j,12} \quad Q_{12}] = Q_{12}[B'_{j,12} \quad U] \quad (3-4-12)$$

因为 Q 的秩是 $n_v - \rho$, Q 的行数也是 $n_v - \rho$, 要使 Q 中存在非奇异的大子阵, Q_{12} 必为非奇异的。因为与 $B'_{j,12}$ 的列对应的边构成一个林, 故与 Q_{12} 的列对应的边必然也构成一个林。

定理3-4-3 如果割集矩阵的一个大子阵的列对应于一个林的枝, 则它是非奇异的。

考虑一个割集矩阵 Q , 将它分块为

$$Q = [Q_{11} Q_{12}] \quad (3-4-13)$$

假定 Q_{12} 是非奇异的, 上式左乘其逆 Q_{12}^{-1} 就变成

$$Q_{12}^{-1}Q = [Q_{12}^{-1}Q_{11} \quad U] \quad (3-4-14)$$

因为 Q_{12}^{-1} 是非奇异矩阵, 所以 $Q_{12}^{-1}Q$ 是另一个割集矩阵。设这个割集矩阵是 Q' , 也就是

$$Q' = Q_{12}^{-1}Q = [Q'_{11} \quad U] \quad (3-4-15)$$

将一个回路矩阵 B 分块为

$$B = [B_{11} \quad B_{12}] \quad (3-4-16)$$

其中, 对所有的 i , B 的第 i 列和 Q' 的第 i 列表示同一条边, 则

$$BQ'' = B_{11}Q'_{11} + B_{12} = 0 \quad (3-4-17)$$

因此

$$B_{12} = -B_{11}Q'_{11} \quad (3-4-18)$$

或

$$B = [B_{11} \quad -B_{11}Q'_{11}] = B_{11}[U \quad -Q'_{11}] \quad (3-4-19)$$

B 是一个回路矩阵, 故 B 的行数等于 B 的秩。这就意味着 B_{11} 必为

非奇异的。由定理3-3-6，与 $\overline{B_{11}}$ 的列对应的边，形成了关于一个林的弦集。因此，与 B_{12} 的列对应的边构成一个林。我们已经调整 B ，使 B_{12} 和 Q_{12} 的各列对应相同的边，故与 Q_{12} 的列对应的边构成一个林。由定理3-4-3，我们有以下定理。

定理3-4-4 一个割集矩阵 Q 的大子阵是非奇异的，当且仅当它的列对应于一个林的枝。当 $\rho = 1$ 时， Q 的大子阵是非奇异的，当且仅当大子阵的列对应于一个树的枝。

如同前面定义基本回路矩阵一样，我们来定义基本割集矩阵。

定义3-4-3 一个形为

$$Q_f = [Q_{f11} \ U] \quad (3-4-20)$$

的割集矩阵称为基本割集矩阵。

注意与 U 的列对应的边构成一个林（当 $\rho = 1$ 时是一个树）。

与基本割集矩阵的行对应的割集称为基本割集。

定义3-4-4 设 Q_f 是关于林 t （当 $\rho = 1$ 时是树）的基本割集矩阵。则由 Q_f 的行表示的割集集合，称为关于 t 的基本割集集合。

下面我们将导出一种方法，用这种方法，可以直接从线图来得到关于一个林的基本割集集合。设 t 是一个林，式(3-4-20)中的基本割集矩阵是由它得到的。又设

$$B_f = [U \ B_{f12}] \quad (3-4-21)$$

是关于同一个林 t 的基本回路矩阵，它的列经过调整，使得对 $i = 1, 2, \dots, n_c$ ， B_f 的第 i 列和式(3-4-20)中 Q_f 的第 i 列表示同一条边。则

$$Q_f B_f^t = Q_{f11} + B_{f12}^t = 0 \quad (3-4-22)$$

因此

$$Q_{f11} = B_{f12}^t \quad (3-4-23)$$

或

$$Q_f = [B_{f12}^t \ U] \quad (3-4-24)$$

设对 $i = 1, 2, \dots, n_c - n_v + \rho$, Q_i 的第 i 列表示边 e'_i , 而 Q_i 的第 $(n_c - n_v + \rho + p)$ 列表示边 e_p , $p = 1, 2, \dots, n_v - \rho$, 如下所示:

$$Q_i = \begin{bmatrix} e'_1 e'_2 \cdots e'_{n_c - n_v + \rho} & e_1 e_2 \cdots e_{n_v - \rho} \\ \vdots & \vdots \\ B'_{i,12} & \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (3-4-25)$$

因此弦集由 $e'_1, e'_2, \dots, e'_{n_c - n_v + \rho}$ 组成, 而 t 的枝是 $e_1, e_2, \dots, e_{n_v - \rho}$. 可以看出, 由 Q_i 的行 j 表示的割集 S_j 包含一个枝 e_j , 以及与 $B'_{i,12}$ 中在第 j 行为 1 的那些列所对应的弦. $B'_{i,12}$ 的行 j 是 B_i 中对应于枝 e_j 的列, 如下式所示:

$$B_i = \begin{bmatrix} e'_1 e'_2 \cdots e'_{n_c - n_v + \rho} & e_1 e_2 \cdots e_j \cdots e_{n_v - \rho} \\ \vdots & \vdots \\ \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} & B_{i,12} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (3-4-26)$$

假定 $B_{i,12}$ 的第 r 行在第 j 列为 1. 注意 $B_{i,12}$ 的列 j 对应枝 e_j , 而 1 在第 r 行说明, 在第 r 行所代表的基本回路 C_r 中, 含有枝 e_j . 我们把弦 e'_r 添加到林 t 中, 得到回路 C_r . 显然 C_r 包含弦 e'_r . 因此, 在 $B_{i,12}$ 的第 r 行和列 j 交叉处为 1, 说明基本回路 C_r 既包含 e'_r 又包含 e_j .

另一方面, $B_{i,12}$ 的第 r 行和列 j 的交叉处为 1, 说明 $B'_{i,12}$ 的第 r 列在行 j 处为 1. 于是由式 (3-4-25) 知, 行 j 所代表的基本割集 S_j 包含边 e'_r . 注意, 由于 Q_i 中有单位矩阵, 故基本割集 S_j 也包含边 e_j . 因此 e'_r 和 e_j 都在 S_j 中.

假定 $B'_{i,j}$ 的第 r 行在列 j 处是 0，则可看出， B_i 的第 r 行所代表的基本回路 C_r 不包含边 e_j 。另一方面，如果 $B'_{i,j}$ 的行 j 在第 r 列为 0，则 Q_i 的行 j 所代表的基本割集 S_j 不包含边 e'_r 。

定理3-4-5 弦 e'_r 在包含枝 e_j 的基本割集 S_j 中，当且仅当枝 e_j 是在包含弦 e'_r 的基本回路 C_r 中。

由这个定理，可以用以下方法求出基本割集集合。设 t 是线图中的一个树。又设 S_j 是关于 t 的一个基本割集。假定枝 e_j 在 S_j 中。为了得到 S_j 中所有的弦，我们把每一条弦 e'_r 一个一个地加到 t 中，构成线图 $(e'_r) \cup t$ 。如果 $(e'_r) \cup t$ 的回路中包含枝 e_j ，则 e'_r 在 S_j 中。否则弦 e'_r 不在 S_j 中。

例3-4-1 对于图3-3-1所示的线图，假定我们选取一个树 $t = (a, c, e, g)$ ，则基本割集 S_a, S_c, S_e, S_g 可以用以下方法得到。这里 $a \in S_a, c \in S_c, e \in S_e, g \in S_g$ 。

对于 S_a ，首先我们把边 b （一条弦）加到树 t 中，如图3-4-1所示。因为所得图的回路中包含枝 a 和弦 b ，所以弦 b 在 S_a 中。我们把弦 d 加到 t 中，如图3-4-2所示。所得图的回路不同时包含枝 a 和弦 d 。因此弦 d 不在 S_a 中。同样，我们把弦 f 加到 t 中，如图3-4-3所示，所得图中的回路不同时包含枝 a 和弦 f ，因此弦 f 不在 S_a 中。这样，我们可以断定，基本割集 S_a 是

$$S_a = (a, b)$$

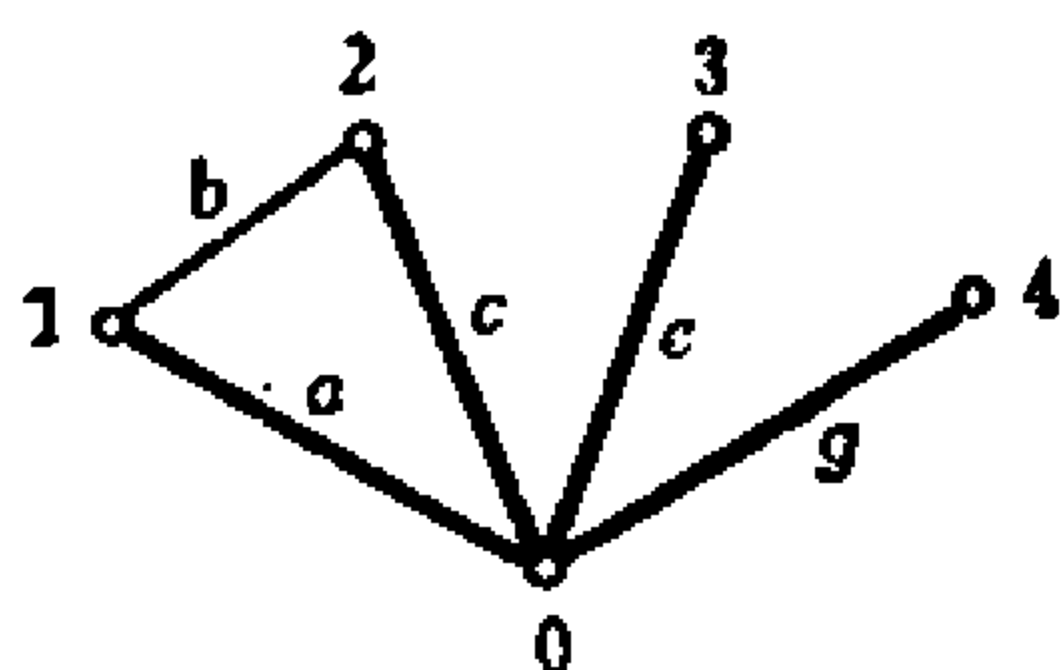


图3-4-1 树 t 和弦 b

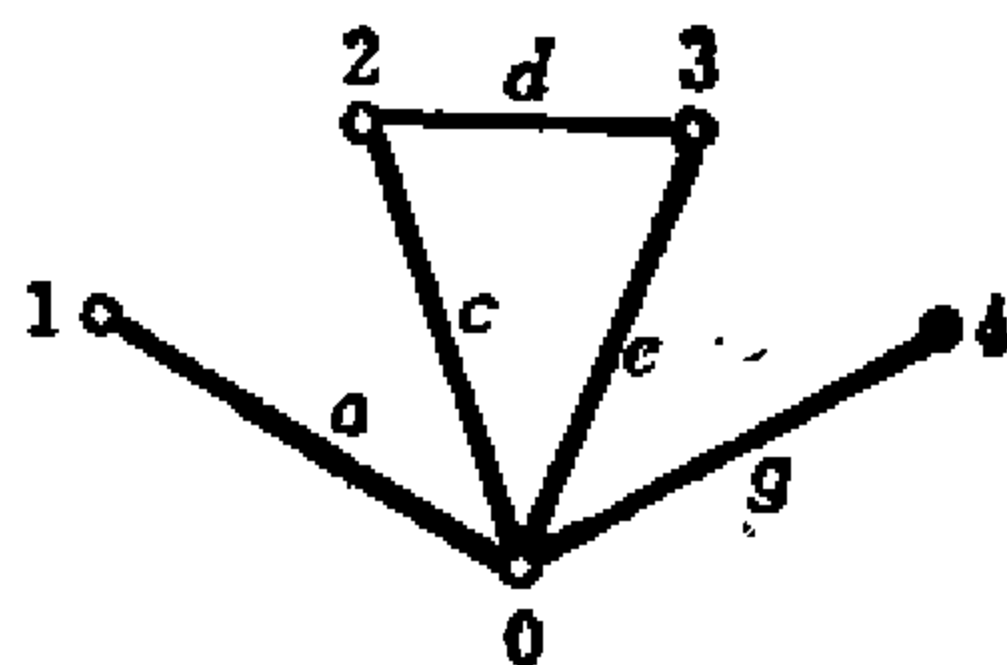


图3-4-2 树 t 和弦 d

对于 S_a ，在 t 中加入弦 b ，得到一个同时包含弦 b 和枝 c 的回路。因此弦 b 在 S_a 中。同样，弦 d 在 S_a 中但弦 f 不在 S_a 中，因为将弦 f 加到树 t 中不会产生一个同时包含弦 f 和枝 c 的回路。所以

$$S_a = (b, c, d)$$

类似地，我们有

$$S_c = (d, e, f)$$

和

$$S_g = (f, g)$$

于是

$$Q_f = \begin{matrix} & b & d & f & a & c & e & g \\ \begin{matrix} S_a \\ S_c \\ S_e \\ S_g \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

为了从基本割集矩阵 Q_f 得到基本回路矩阵，我们注意，由式(3-4-23)， $Q_{f,11}$ 就是 $B_{f,11}^T$ 。故由式(3-4-21)，基本回路矩阵 B_f 可以表示为

$$B_f = [U \quad Q_{f,11}^T] \tag{3-4-27}$$

例如，上例中的 $Q_{f,11}$ 是

$$Q_{f,11} = \begin{matrix} & b & d & f \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

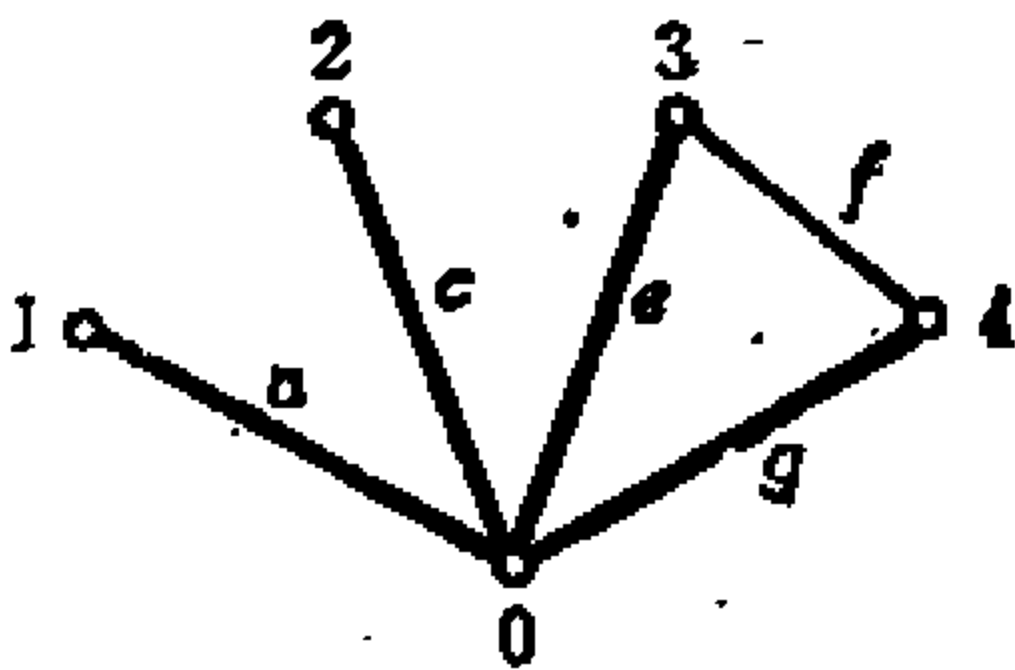


图3-4-3 树 t 和弦 f

因此, B_f 是

$$B_f = [U \ Q'_{f,11}] = \begin{bmatrix} & b & d & f & & a & c & e & g \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

这是与上例中的 Q_f 对应于同一个树

$$t = (a, c, e, g)$$

的基本回路矩阵。

3-5 割集矩阵的可实现性 (I)

我们已经知道, 回路矩阵和割集矩阵的元素是 0 和 1。这里我们将看到, 并非任何一个元素为 0 和 1 的矩阵都是某一个线图的割集矩阵或回路矩阵。换句话说, 要使一个矩阵成为一个线图的割集矩阵或回路矩阵, 应当满足一定的条件。为了方便, 我们采用下面的术语。

定义3-5-1 如果存在一个线图, 其割集 (回路) 矩阵是 R , 则说矩阵 R 是可实现为一割集 (回路) 矩阵的。

因为应用式(3-4-19), 我们可以由一个割集矩阵得到回路矩阵, 所以, 没有必要研究回路矩阵可实现的条件。并且, 一个割集矩阵总可以由一个基本割集矩阵表示出来。因此, 只要找出一个形为 $[R_{11} \ U]$ 的矩阵是基本割集矩阵的条件即可。

首先, 我们假定存在一个线图, 它的割集矩阵是 $[R_{11} \ U]$ 。在这样的假设下, 我们来研究矩阵 $[R_{11} \ U]$ 的一种特殊子阵的性质。这种特殊子阵称为 H 子阵。

定义3-5-2 设 R 形为 $[R_{11} \ U]$ 。对 R 作如下运算: (1) 删除在行 i 有非零元的各列; (2) 删除行 i 。则所得的子矩阵称为 R 关于行 i 的 H 子阵, 记为 $H_{(i)}$ 。

例如，假定 R 是

$$R = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} b \quad d \quad f \quad a \quad c \quad e \quad g \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

则我们先删除列 b, a ，再删除行 1，就得到关于行 1 的 H 子阵 $H_{(1)}$ ：

$$H_{(1)} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} d \quad f \quad c \quad e \quad g \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

类似地， $H_{(2)}$ 是

$$H_{(2)} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} f \quad a \quad e \quad g \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

基本割集矩阵 Q_i 关于行 i 的 H 子阵 $H_{(i)}$ 是一个特殊子图的割集矩阵。为了说明这一点，我们要研究从线图中删除一个割集对其余割集的影响。设在线图 G 的一个基本割集矩阵 Q_i 中， S_i 是行 i 所代表的基本割集，则删除所有在行 i 处为 1 的列，相当于从 G 中删除所有属于割集 S_i 的边。正如式 (2-2-5) 所示， S_i 可表示为

$$\mathcal{E}(\Omega \times \Omega) - S_i = \mathcal{E}(\Omega_i \times \Omega_i) \cup \mathcal{E}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i) \quad (3-5-1)$$

其中 Ω 是 G 中所有顶点的集合，而割集 $S_i = \mathcal{E}(\Omega_i \times \bar{\Omega}_i)$ 。于是，删除 S_i 的所有边，就得到两个子图 $\mathcal{E}(\Omega_i \times \Omega_i)$ 和 $\mathcal{E}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$ ，如图 3-5-1 所示。

设 S_i 和 S_j 是线图 G 的两个基本割集。当 S_i 中所有边被删除时，显然 S_j 不一定是所得的图 G_i 的基本割集。假定 S_i 和 S_j 的公共边是 e_1, e_2, \dots, e_k ，那么集合 $S_j - (e_1 e_2 \dots e_k)$ 是不是 G_i 的一个基本

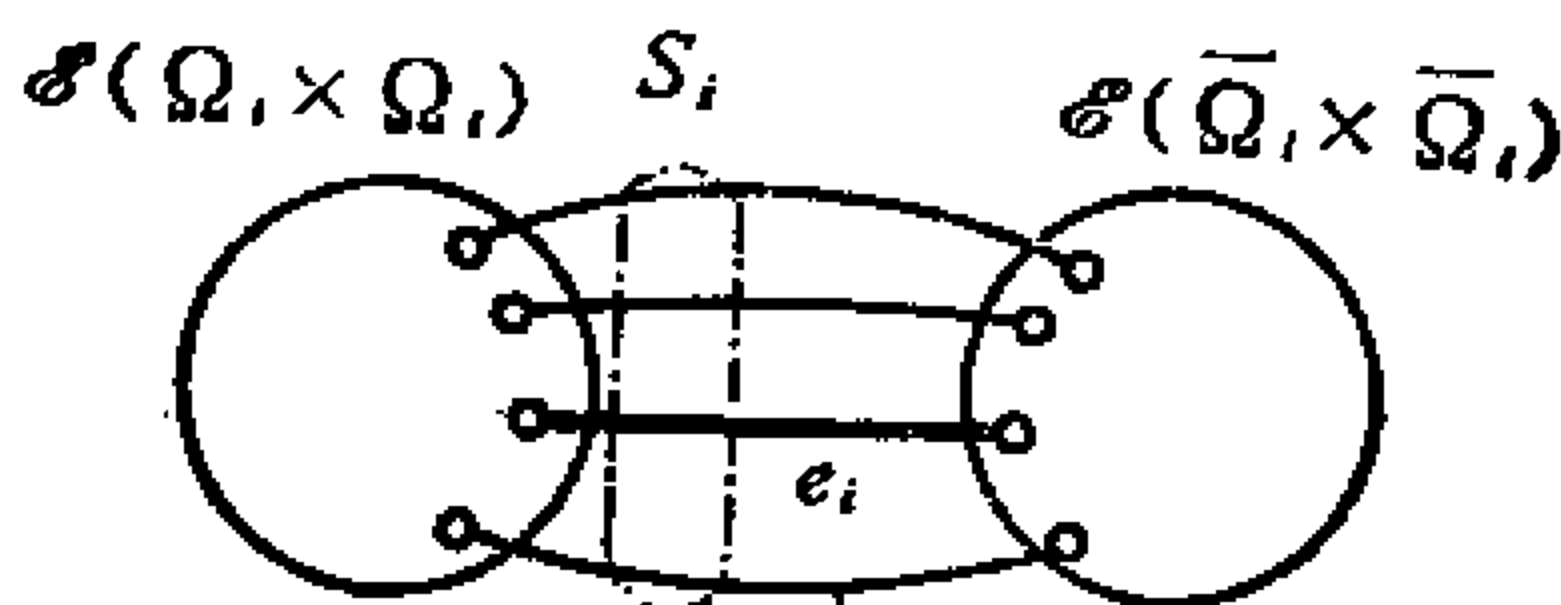


图3-5-1 线图G和两个子图

割集呢？注意， $H_{(i)}$ 的每一行就代表这样一个集合。这个问题的答案由以下定理给出。

定理3-5-1 设 $S_i = \mathcal{G}(\Omega_i \times \bar{\Omega}_i)$ 是线图 G 中关于树（或林） t 的一个基本割集，而枝 e_i 在 S_i 中。设 S_j 是关于 t 的另一个基本割集，枝 e_j 在 S_j 中。假定枝 e_j 在子图 $\mathcal{G}(\Omega_i \times \Omega_i)$ 里，则在包含枝 e_j 的线图 $\mathcal{G}(\Omega_i \times \Omega_i)$ 中，关于树 $t_1 = t \cap \mathcal{G}(\Omega_i \times \Omega_i)$ 的基本割集 S'_j 是

$$S'_j = S_j - S_i \quad (3-5-2)$$

注意，枝都是树中的边（见定义3-3-6），而 $t \cap \mathcal{G}(\Omega_i \times \Omega_i)$ 是树 t 在子图 $\mathcal{G}(\Omega_i \times \Omega_i)$ 中的部分。

证明：显然线图 $\mathcal{G}(\Omega_i \times \Omega_i) \cup \mathcal{G}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$ 是分离的。因此，添加子图 $\mathcal{G}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$ 的任一条弦到树 t 中，将产生一个仅由 $\mathcal{G}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$ 中的边组成的回路 C 。这就说明枝 e_i 不在回路 C 中。故割集 S_i 不包括 $\mathcal{G}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$ 的任一条弦。由基本割集的定义，显然 S_i 不包含 t 中任何属于 $\mathcal{G}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$ 的枝。因此， S_i 不包含 $\mathcal{G}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$ 的任一条边。

我们知道，当且仅当 $\mathcal{G}(\Omega_i \times \Omega_i)$ 中的弦 e_p 和树 t_1 产生一个包含枝 e_j 的回路时，弦 e_p 才在 S'_j 中。然而，弦 e_p 和树 t_1 产生的回路与弦 e_p 和树 t 产生的回路是相同的，因此，若弦 e_p 在 S'_j 中，则它也在 S_j 中，或者说 $S'_j \subset S_j$ 。

因为 S_i 不包含 $\mathcal{G}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$ 中的任一条边，故任何在 S_j 中但不在 S'_j 中的弦必为 S_i 中的弦。于是 $S'_j = S_j - S_i$ 。这一论证在 $\mathcal{G}(\bar{\Omega}_i \times$

$\bar{\Omega}_i$ 为空集时显然成立。

(证毕)

例3-5-1 考虑图3-5-2所示的线图。假定我们选取树 $t = \langle a, c, e, g \rangle$ ，基本割集 $S_i = \mathcal{S}(\Omega_i \times \bar{\Omega}_i) = \langle d, e, f \rangle$ ，其中 $\Omega_i = \langle 1, 2, 5 \rangle$ ， $\bar{\Omega}_i = \langle 3, 4 \rangle$ 。线图 $\mathcal{S}(\Omega_i \times \Omega_i) \cup \mathcal{S}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$ 是由 G 删除 S_i 中的所有边得到的，

如图3-5-3所示。我们可以看到， $t_1 = t \cap \mathcal{S}(\Omega_i \times \Omega_i) = \langle a, c \rangle$ 是子图 $\mathcal{S}(\Omega_i \times \Omega_i)$ 的树。

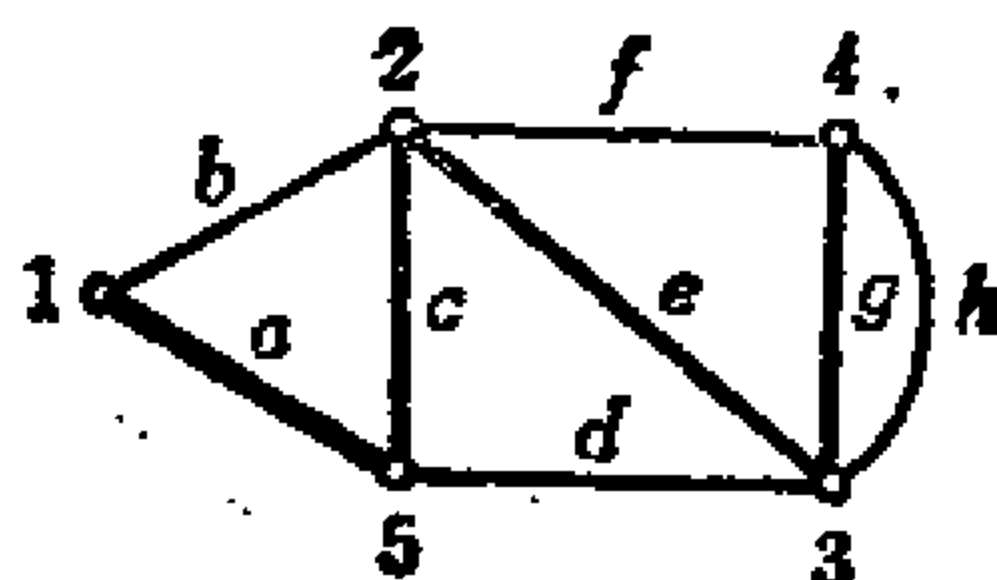


图3-5-2 线图 G

设 $S_i = \mathcal{S}(\Omega_i \times \bar{\Omega}_i) = \langle b, c, d \rangle$ ，这里 $\Omega_i = \langle 1, 5 \rangle$ ， $\bar{\Omega}_i = \langle 2, 3, 4 \rangle$ 。注意 t 的枝 c 在 S_i 里。在 $\mathcal{S}(\Omega_i \times \Omega_i)$ 中，关于树 t_1 的弦只有一条。这条弦 b 连同 t_1 ，将产生一个包含枝 c 的回路 $C = \langle a, b, c \rangle$ ，因此，在 $\mathcal{S}(\Omega_i \times \Omega_i)$ 中，关于树 t_1 且包含枝 c 的基本割集 $S'_i = \langle b, c \rangle$ ，可以看出 $S'_i = S_i - S_1$ 。现在容易证明， H 子阵 $H_{(i)}$ 是子图 $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\Omega_i \times \Omega_i) \cup \mathcal{S}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$ 的基本割集矩阵。

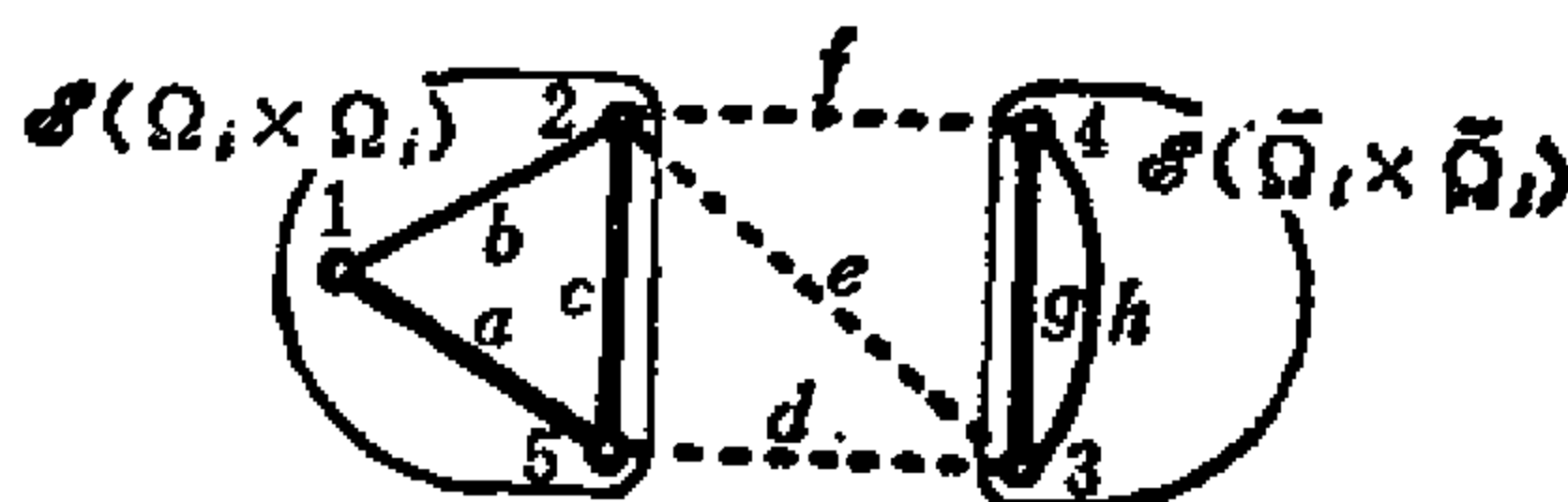


图3-5-3 线图 $\mathcal{S}(\Omega_i \times \Omega_i) \cup \mathcal{S}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$

定理3-5-2 设 Q_i 是线图 G 关于树 t 的基本割集矩阵。设 Q_i 的行 i 表示基本割集 $S_i = \mathcal{S}(\Omega_i \times \bar{\Omega}_i)$ 。则 Q_i 关于行 i 的 H 子阵 $H_{(i)}$ 是线图 $\mathcal{S}(\Omega_i \times \Omega_i) \cup \mathcal{S}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$ 关于林 $t_1 \cup t_2$ 的基本割集矩阵，其中 $t_1 = t \cap \mathcal{S}(\Omega_i \times \Omega_i)$ ， $t_2 = t \cap \mathcal{S}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$ 。

证明： 由定理3-5-1， $\mathcal{S}(\Omega_i \times \Omega_i)$ 中关于树 t_1 的每一个基本

割集 S'_i 可表示为 $S_i - S_i$ 。同样, $\mathcal{E}(\bar{Q}_i \times \bar{Q}_i)$ 中关于树 t_2 的每一个基本割集 S'_k 可写作 $S'_k = S_k - S_i$ 。 Q_i 关于行 i 的 H 子阵 $H_{(i)}$ 是由 Q_i 先删除对应于 S_i 中各边的列,再删除对应于 S_i 中枝的行 i 得到的,故 $H_{(i)}$ 的每一行表示 $S_k - S_i$,而 Q_i 除行 i 外的每一行都在 $H_{(i)}$ 中。
(证毕)

例3-5-2 图3-5-2所示线图 G 关于树 $t = (a, c, e, g)$ 的基本割集矩阵 Q_i 是

$$Q_i = \begin{matrix} & b & d & f & h & e & c & a & g \\ \begin{matrix} i \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Q_i 关于行 i 的 H 子阵 $H_{(i)}$ 是

$$H_{(i)} = \begin{matrix} & b & h & c & a & g \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

它是图3-5-3中线图 $\mathcal{E}(\Omega_i \times \Omega_i) \cup \mathcal{E}(\bar{Q}_i \times \bar{Q}_i)$ 关于林 $t_1 \cup t_2 = (c, a, g)$ 的基本割集矩阵。

假定 $\mathcal{E}(\Omega_i \times \Omega_i)$ 和 $\mathcal{E}(\bar{Q}_i \times \bar{Q}_i)$ 都不是空集,则因为线图 $\mathcal{E}(\Omega_i \times \Omega_i) \cup \mathcal{E}(\bar{Q}_i \times \bar{Q}_i)$ 是分离的,所以 $\mathcal{E}(\Omega_i \times \Omega_i) \cup \mathcal{E}(\bar{Q}_i \times \bar{Q}_i)$ 关于林 $t_1 \cup t_2$ 的基本割集可以分成两个集体,其中一个由关于 t_1 的全部基本割集组成,另一个由关于 t_2 的全部基本割集组成。可以看出,一个集体中的基本割集和另一个集体中的任一个基本割集之间没有公共边,于是 H 子阵 $H_{(i)}$ (它的行表示这些基本割集)可分块为

$$H_{(i)} = \left[\begin{array}{c|c} H_{(i)1} & 0 \\ \hline 0 & H_{(i)2} \end{array} \right] \quad (3-5-3)$$

其中 $H_{(1)}$ 代表线图 $\mathcal{G}(\Omega_i \times \Omega_i)$ 的基本割集矩阵, 而 $H_{(2)}$ 是线图 $\mathcal{G}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$ 中的基本割集矩阵. 当 $\mathcal{G}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$ 是空集时, $H_{(2)}$ 也是空的.

另一方面, 若把 $H_{(1)}$ 随意分划为式 (3-5-3) 的形式, 则不一定能使 $H_{(1)}$ 和 $H_{(2)}$ 这两部分, 分别表示子图 $\mathcal{G}(\Omega_i \times \Omega_i)$ 和 $\mathcal{G}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$ 的基本割集矩阵.

例3-5-3 图3-5-4所示线图 G 关于树 $t = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ 的基本割集矩阵 Q_t 是

$$Q_t = \begin{matrix} & a & b & c & d & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{matrix}$$

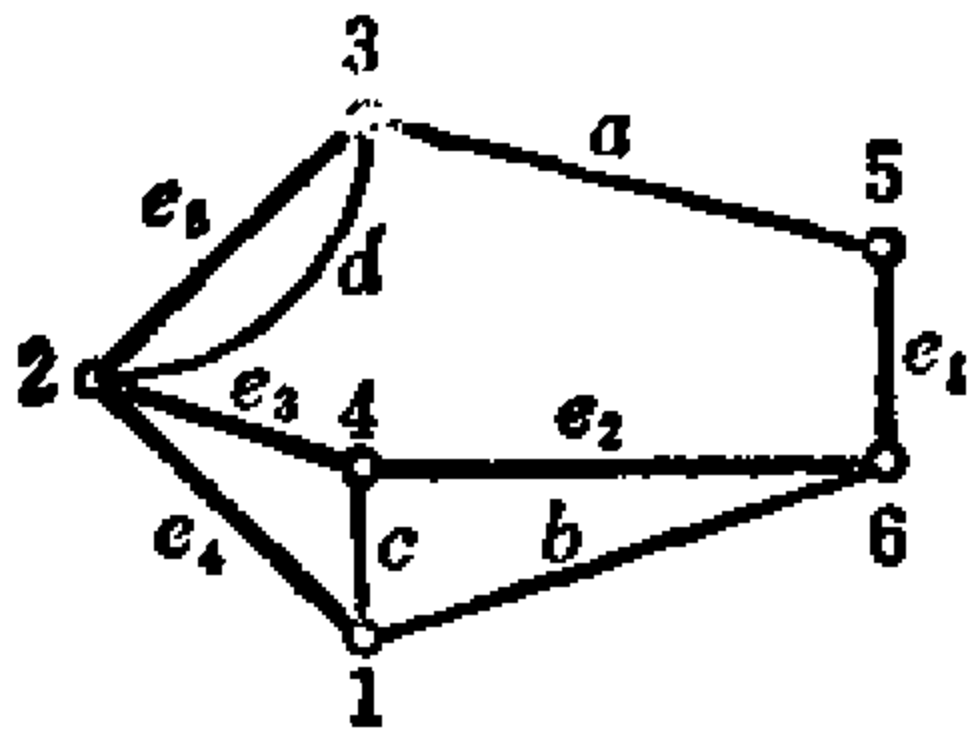


图3-5-4 一个线图

它的一个 H 子阵 $H_{(2)}$ 是

$$H_{(2)} = \begin{matrix} & c & d & e_1 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{matrix}$$

从 G 中删除基本割集 $S_2 = (a, b, e_2)$ 的全部边所得的线图 $\mathcal{G}(\Omega_2 \times \Omega_2) \cup \mathcal{G}(\bar{\Omega}_2 \times \bar{\Omega}_2)$, 如图3-5-5所示, 这里 $\Omega_2 = (1, 2, 3, 4)$, $\bar{\Omega}_2 = (5, 6)$ 。

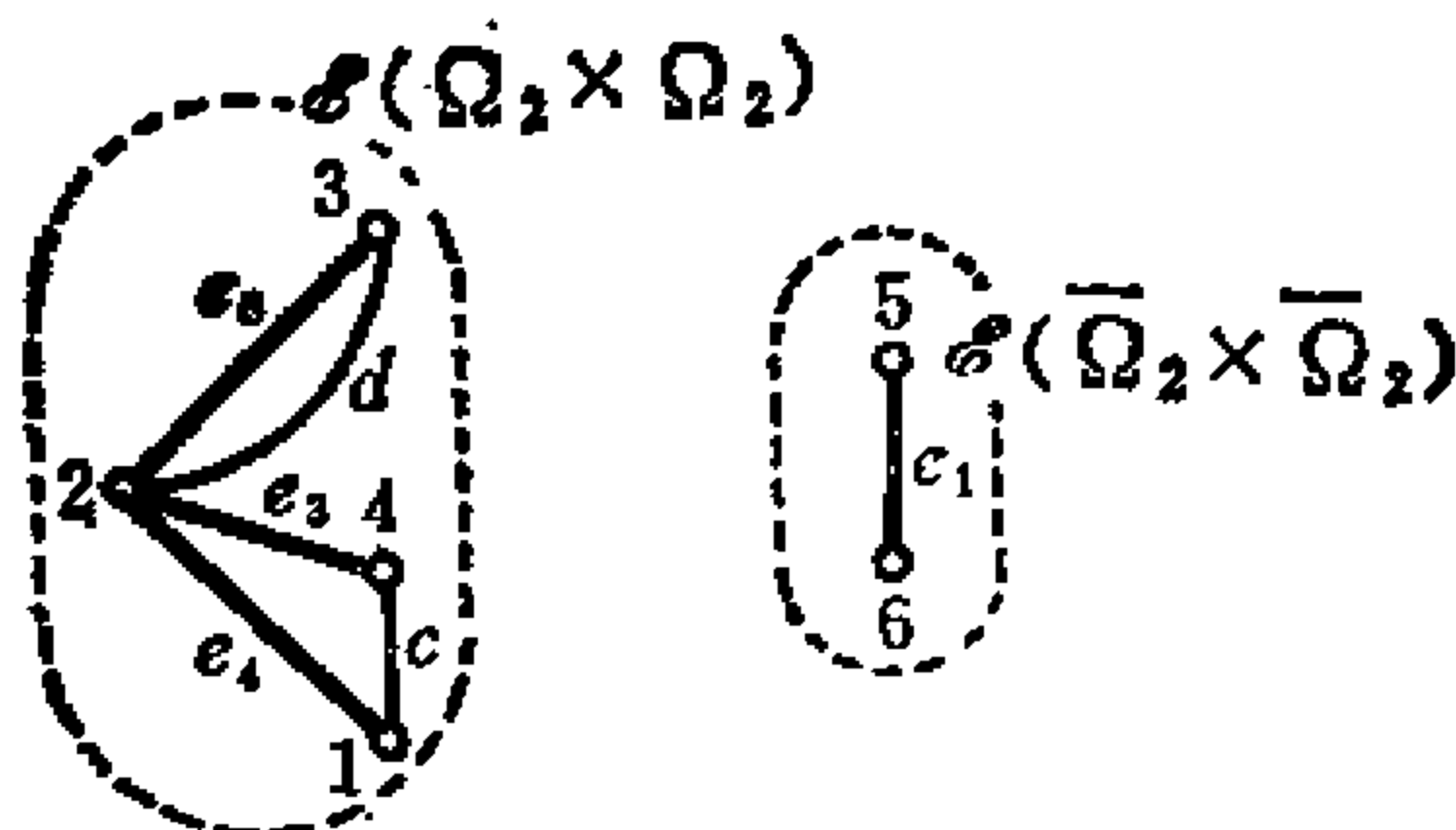


图3-5-5 子图 $\mathcal{G}(\Omega_2 \times \Omega_2) \cup \mathcal{G}(\bar{\Omega}_2 \times \bar{\Omega}_2)$

把 $H_{(2)}$ 分块为

$$H_{(2)} = \begin{matrix} & c & d & e_3 & e_4 & e_5 & e_1 \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & 0 & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} = \left[\begin{array}{c|c} H_{(2)1} & 0 \\ \hline 0 & H_{(2)2} \end{array} \right]$$

可以看出, $H_{(2)1}$ 是 $\mathcal{G}(\Omega_2 \times \Omega_2)$ 关于树 $t_1 = (e_3, e_4, e_5)$ 的基本割集矩阵, $H_{(2)2}$ 是 $\mathcal{G}(\bar{\Omega}_2 \times \bar{\Omega}_2)$ 关于树 $t_2 = (e_1)$ 的基本割集矩阵, 另一方面, 我们也可以将 $H_{(2)}$ 分块为

$$H_{(2)} = \begin{matrix} & d & e_6 & c & e_1 & e_3 & e_4 \\ \begin{matrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} = \left[\begin{array}{c|c} H_{(2)1} & 0 \\ \hline 0 & H_{(2)2} \end{array} \right]$$

但是在上述分块中, $H_{(2)1}$ 和 $H_{(2)2}$ 都不是 $\mathcal{G}(\Omega_2 \times \Omega_2)$ 关于树 $t_1 = (e_3, e_4, e_5)$ 的基本割集矩阵。

下面我们来考虑, 短路树 t 的一个枝, 对关于树 t 的基本割集矩阵有何影响。我们很快就会看到, 这一结果的推广以及 H 子阵的性质一起, 给出了一种判断矩阵可实现性的算法。

定理3-5-3 设 Q_i 是线图 G 关于树 t 的基本割集矩阵。设 S_i 是由 Q_i 的行 i 所代表的一个基本割集。 e_i 是 S_i 中的枝。又设 $Q(i)_i$ 是 Q_i 的一个子矩阵, 它是从 Q_i 中先删除行 i , 再删除所有的零列得到的。则 $Q(i)_i$ 是由 G 短路枝 e_i 得到的图 $G(e_i)$ 的基本割集矩阵。

证明: 显然 $t - (e_i)$ 是 $G(e_i)$ 的树。设 e_j 是 t 中异于 e_i 的一个枝。假定添加一条弦到 t 中, 产生一个包含 e_i 的回路 C 。当我们短路 e_i 时, 这个回路仍然是一个包含 e_j 的回路。因此在短路 e_i 时, 除 S_i 外, G 中所有关于树 t 的基本割集也都是关于树 $t - (e_i)$ 的基本割集。 (证毕)

图3-5-6所示线图 G' , 是由 $\mathcal{G}(\Omega_i \times \Omega_i)$ 图3-5-1中的 G 将子图 $\mathcal{G}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$ 的所有顶点合并得到的。假定我们打算求出 G' 的一个基本割集矩阵 M 。前面说过, 从线图 G 中删除关于树 t 的一个基本割集 $S_i = \mathcal{G}(\Omega_i \times \bar{\Omega}_i)$ 的所有边, 得到两个最大连通子图。 $\mathcal{G}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$ 是这两个最大连通子图之一。我们还知道, $t_2 = t \cap \mathcal{G}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$ 是线图 $(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$ 的树。因为 t_2 包含 $\mathcal{G}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$ 的所有顶点, 故短路 t_2 的所有枝就可以把 $\mathcal{G}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$ 的所有顶点合并在一起。因此据定理3-5-3, 线图 G' 关于树 $t - t_2$ 的基本割集矩阵 M , 可以用这样的方法来得到: 从基本割集矩阵 Q_i 中, 先删除所有那些代表包含 t_2 的枝的基本割集的行, 然后删除所有的零列。

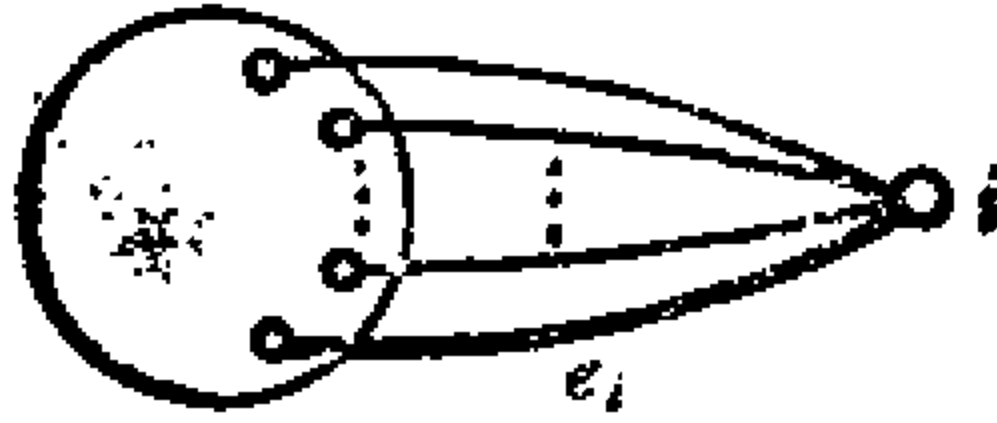


图3-5-6 线图 G'

例3-5-4 考虑图3-5-7所示的线图 G 。这个线图关于树 $t =$

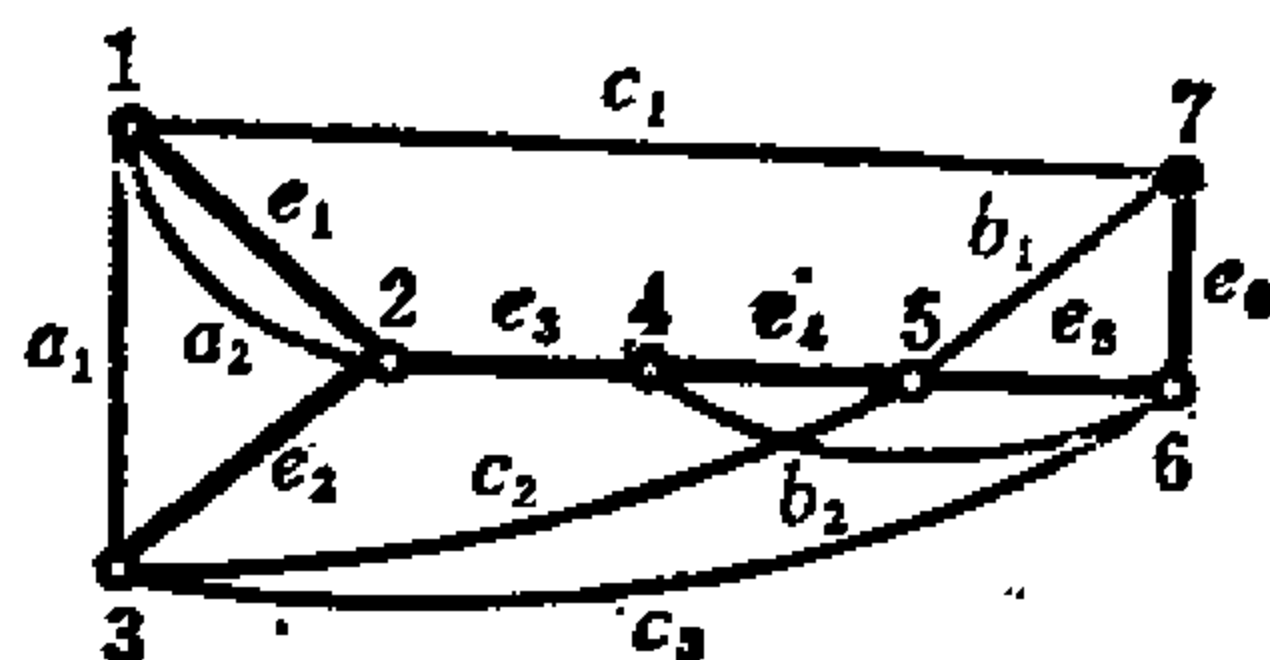


图3-5-7 线图G

$(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$ 的基本割集矩阵 Q_1 是

$$Q_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & c_1 & c_2 & c_3 & b_1 & b_2 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Q_1 的行代表关于树 t 的基本割集 $S_{e_1}, S_{e_2}, S_{e_3}, S_{e_4}, S_{e_5}, S_{e_6}$ 的集合。

设 S_i 是 $S_{e_i} = \mathcal{S}(\Omega_i \times \bar{\Omega}_i) = (c_1, c_2, c_3, e_3)$, 则 $\Omega_i = (1, 2, 3)$, $\bar{\Omega}_i = (4, 5, 6, 7)$. 与 S_{e_i} 对应的子图 $\mathcal{S}(\Omega_i \times \Omega_i)$ 和 $\mathcal{S}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$ 如图 3-5-8 所示. 由此子图可以看出, $t_1 = (e_1, e_2)$ 是 $\mathcal{S}(\Omega_i \times \Omega_i)$ 的树, $t_2 = (e_4, e_5, e_6)$ 是 $\mathcal{S}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$ 的树.

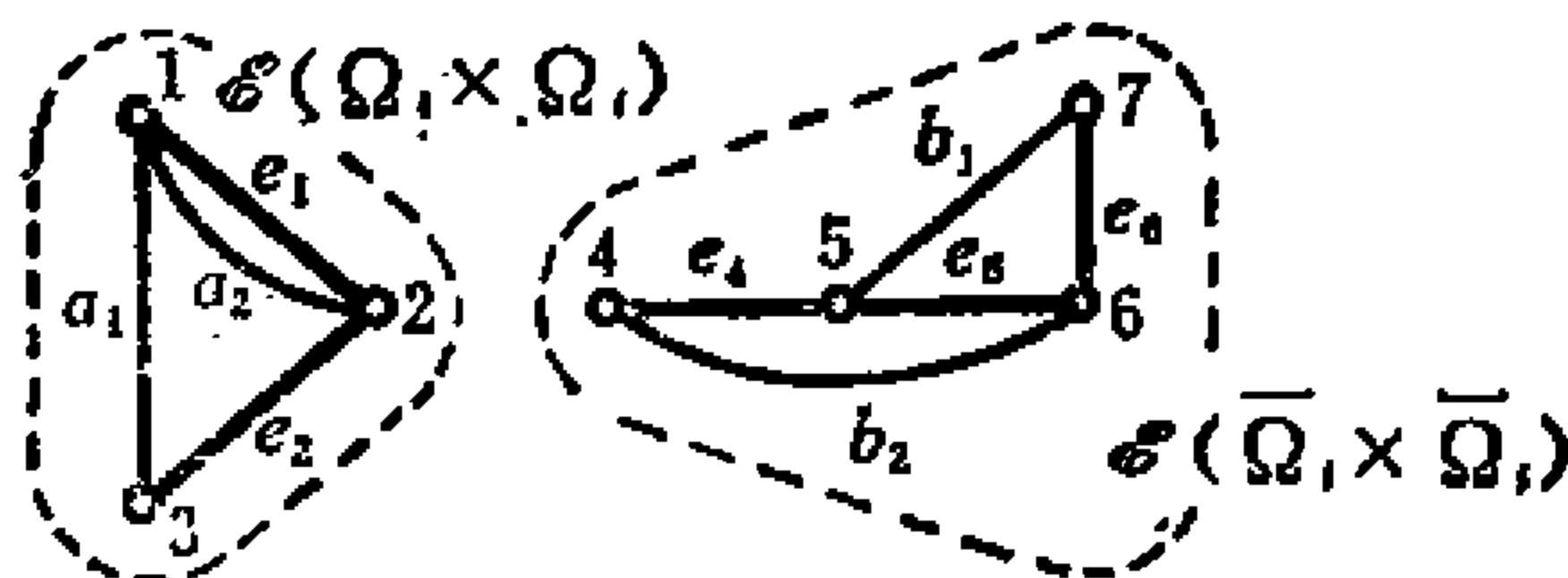


图3-5-8 子图 $\mathcal{S}(\Omega_i \times \Omega_i)$ 和 $\mathcal{S}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$

在线图 G 中, 把 $\mathcal{E}(\bar{Q}_i \times \bar{Q}_i)$ 的所有顶点合并, 得到线图 G' , 如图3-5-9所示. 可以看出, $t-t_2 = (e_1, e_2, e_3)$ 是 G' 的树, 而关于树 $t-t_2$ 的基本割集是 S_{e_1}, S_{e_2} 和 S_{e_3} .

为了从 Q_i 得到 G' 关于树 $t-t_2$ 的基本割集矩阵 M , 我们首先删除对应于基本割集 S_{e_4}, S_{e_5} 和 S_{e_6} 的行. 所得的矩阵是

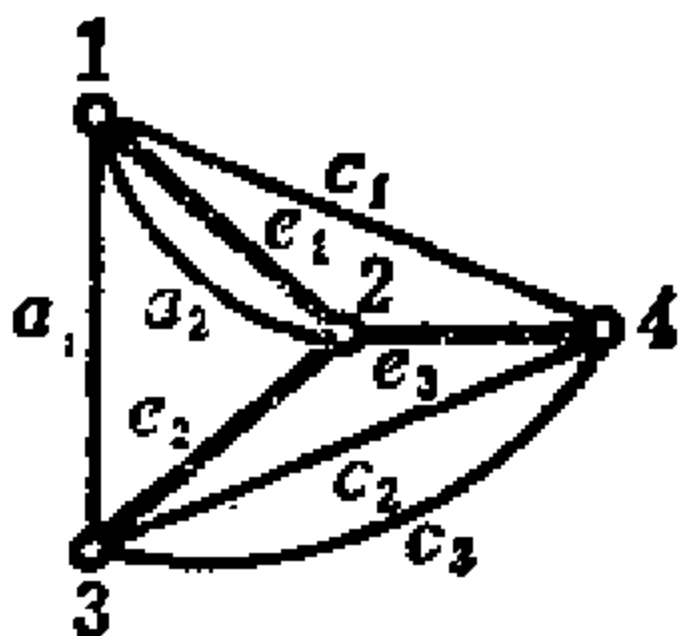


图3-5-9 线图 G'

$$\begin{array}{c}
 a_1 \ a_2 \ c_1 \ c_2 \ c_3 \ b_1 \ b_2 \ e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4 \ e_5 \ e_6 \\
 \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \left[\begin{array}{cccccccccccccc}
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

从这个矩阵中删去所有的零列, 就得到 G' 关于 $t-t_2$ 的基本割集矩阵 M :

$$M = \begin{array}{c}
 a_1 \ a_2 \ c_1 \ c_2 \ c_3 \ e_1 \ e_2 \ e_3 \\
 \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \left[\begin{array}{cccccc|ccc}
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

由例3-5-4, 显然可以用下面的方法得到 G' 的基本割集矩阵 M : (1) 先删除所有对应于基本割集 $S_{e'_1}, S_{e'_2}, \dots, S_{e'_k}$ 的行, 其中 e'_1, e'_2, \dots, e'_k 是子图 $\mathcal{E}(\bar{Q}_i \times \bar{Q}_i)$ 的树 $t_2 = t \cap \mathcal{E}(\bar{Q}_i \times \bar{Q}_i)$ 的枝; (2) 然后删除所有的零列. 因此, 我们只需要知道 Q_i 的哪些行对应于割集 $S_{e'_1}, S_{e'_2}, \dots, S_{e'_k}$ 即可. 现在, 我们可以应用 H 子阵的性质了. 前面说过, $\mathcal{E}(\bar{Q}_i \times \bar{Q}_i)$ 的基本割集矩阵, 就是式(3-5-3)所示分块中的 $H_{(n)}$. 如果有几种不同的分块方法, 都能使 $H_{(n)}$ 成为式(3-5-3)的形式, 则其中必有一种分块, 将给出与 $\mathcal{E}(\bar{Q}_i \times \bar{Q}_i)$

的基本割集矩阵对应的 $H_{(i)2}$ 。这样，为得到 G' 的基本割集矩阵所要删除的行，就是 $H_{(i)2}$ 的各行。由于删除这些行而产生的零列，显然对应于 $\mathcal{E}(\Omega_i \times \Omega_i)$ 的边。于是，我们可以说， G' 的基本割集矩阵 M ，可以由 Q_i 删除 $H_{(i)2}$ 的所有行和列得到。

类似地，在图3-5-1的线图 G 中，合并 $\mathcal{E}(\Omega_i \times \Omega_i)$ 的所有顶点，得到如图3-5-10所示的线图 G'' 。 G'' 关于树 $t-t_1$ 的基本割集矩阵，可以由 Q_i 删除 $H_{(i)1}$ 的行和列得到。 G' 和 G'' 的这两个基本割集矩阵，叫做 M 子阵对。

定义3-5-3 设矩阵 R 形如 $[R_{11} \ U]$ 。如式(3-5-3)所示， R 是关于行 i 的 H 子阵 $H(i)$ 的一个固定的分块，设 $M(i)_1$ 是从 R 中删除 $H_{(i)2}$ 的所有行和列得到的子阵， $M(i)_2$ 是从 R 中删除属于 $H_{(i)1}$ 的所有行和列得到的子阵，则称这一对子阵 $M(i)_1$ 和 $M(i)_2$ 是 R 的 M 子阵对(pair of M -submatrices)。

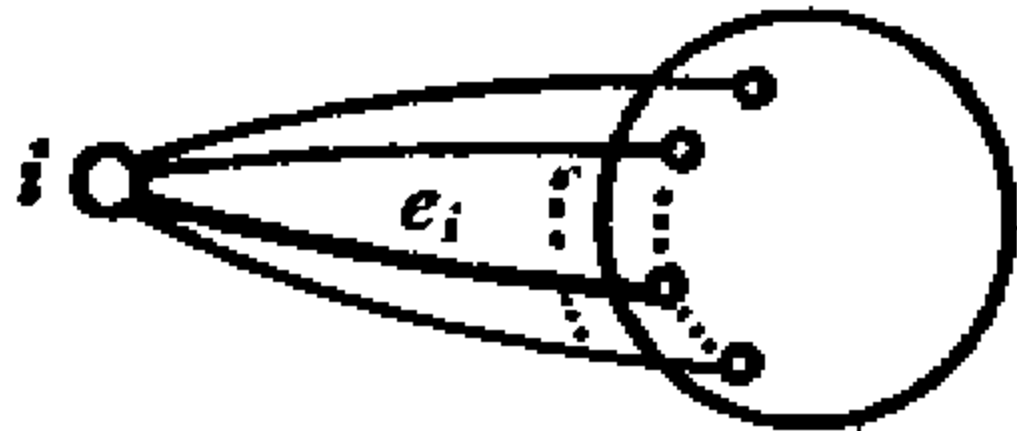


图3-5-10 线图 G''

注意，当 $H_{(i)1}$ 是空的时， $M(i)_2$ 就等于 R 。同样，若 $H_{(i)2}$ 是空的，则 $M(i)_1 = R$ 。

例3-5-5 在例3-5-3中，可以求得 $H_{(2)1}$ 和 $H_{(2)2}$ 分别为

$$H_{(2)1} = \begin{matrix} & c & d & e_3 & e_4 & e_5 \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

和

$$H_{(2)2} = \overset{e_1}{1[1]}$$

Q_i 关于行2的 M 子阵对 $M(2)_1$ 和 $M(2)_2$ ，可以由下面的步骤得

到。为了求得 $M(2)_1$ ，我们从 Q_1 中删除行1和列 e_1 （即 $H_{(2)}_1$ 对应的行和列），得到

$$M(2)_1 = \begin{matrix} & a & b & c & d & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

由于 $H_{(2)}_1$ 是由行3,4,5和列 c,d,e_3,e_4,e_5 组成的，删除这些行和列就得到 $M(2)_2$ ：

$$M(2)_2 = \begin{matrix} & a & b & e_1 & e_2 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

在这个例子里，

$$Q_1 = \begin{matrix} & a & b & c & d & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

子图 G' 和 G'' 如图3-5-11所示。

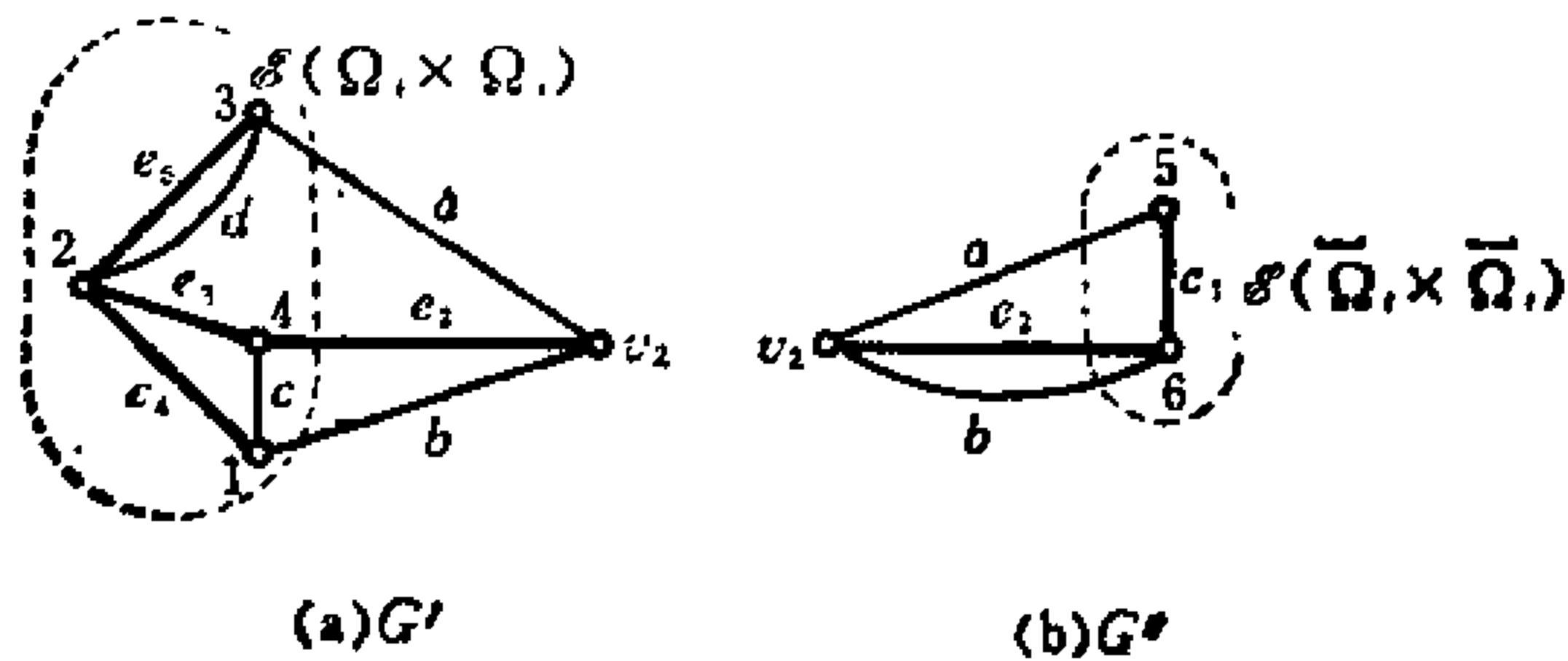


图3-5-11 子图 G' 和 G''

我们可以看出，基本割集矩阵 Q_i 关于行 i 的 M 子阵对 $M(i)_1$ 和 $M(i)_2$ 具有以下性质：

1. $M(i)_1$ 和 $M(i)_2$ 分别为某个线图的基本割集矩阵。

2. Q_i 中除行 i 外的任何一行或者在 $M(i)_1$ 中，或者在 $M(i)_2$ 中，但不同时在 $M(i)_1$ 和 $M(i)_2$ 中。 Q_i 的行 i 既在 $M(i)_1$ 中，又在 $M(i)_2$ 中。

3. Q_i 中除行 i 处为1的那些列外，其他列或者在 $M(i)_1$ 中，或者在 $M(i)_2$ 中，但不同时在 $M(i)_1$ 和 $M(i)_2$ 中。 Q_i 在行 i 处为1的所有列既在 $M(i)_1$ 中，又在 $M(i)_2$ 中。

4. 在线图 G' 〔它是合并 $\mathcal{S}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$ 中的顶点得到的，其基本割集矩阵是 $M(i)_1$ 〕中， $M(i)_1$ 的行 i 所代表的基本割集是一个关联集。同样，在线图 G'' 〔由合并 $\mathcal{S}(\Omega_i \times \Omega_i)$ 的全部顶点得到〕中， $M(i)_2$ 的行 i 代表的基本割集是一个关联集。

性质1, 2, 3可直接从由基本割集矩阵 Q_i 形成 $M(i)_1$ 和 $M(i)_2$ 的步骤中得到。至于性质4，由于我们前面说过， G' 是合并 $\mathcal{S}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$ 中所有顶点得到的，因此 Q_i 的行 i 代表的基本割集变成 G' 的一个关联集。类似地， G'' 是合并 $\mathcal{S}(\Omega_i \times \Omega_i)$ 的所有顶点得到的，因此 Q_i 的行 i 代表的基本割集变成 G'' 的一个关联集。

我们通过上面叙述的步骤，总可以由 Q_i 和对应的线图 G' ， G'' 得到一个 M 子阵对，于是有定理3-5-4。

定理3-5-4 如果 Q_i 是一个基本割集矩阵，则存在 Q_i 关于行 i 的一个 M 子阵对 $M(i)_1$ 和 $M(i)_2$ ，它们具有以下两个性质：

1. $M(i)_1$ 是一个线图的基本割集矩阵。并且 $M(i)_1$ 的行 i 所代表的基本割集是此线图的一个关联集。

2. $M(i)_2$ 是一个线图的基本割集矩阵。在此线图中， $M(i)_2$ 的行 i 所代表的基本割集是一个关联集。

考虑图3-5-1所示的线图 G ，其中基本割集 S_i 由边 e'_1, e'_2, \dots, e'_r 组成。假定我们在 S_i 的每一条边的中间插入一个顶点，如图

3-5-12所示。插入顶点以后，假定我们把这些顶点又合并成一个顶点 i ，如图3-5-13所示。注意顶点 i 是所得线图的一个割点。现在我们把顶点 i 切割成两个，使所得的线图分离开，如图3-5-14

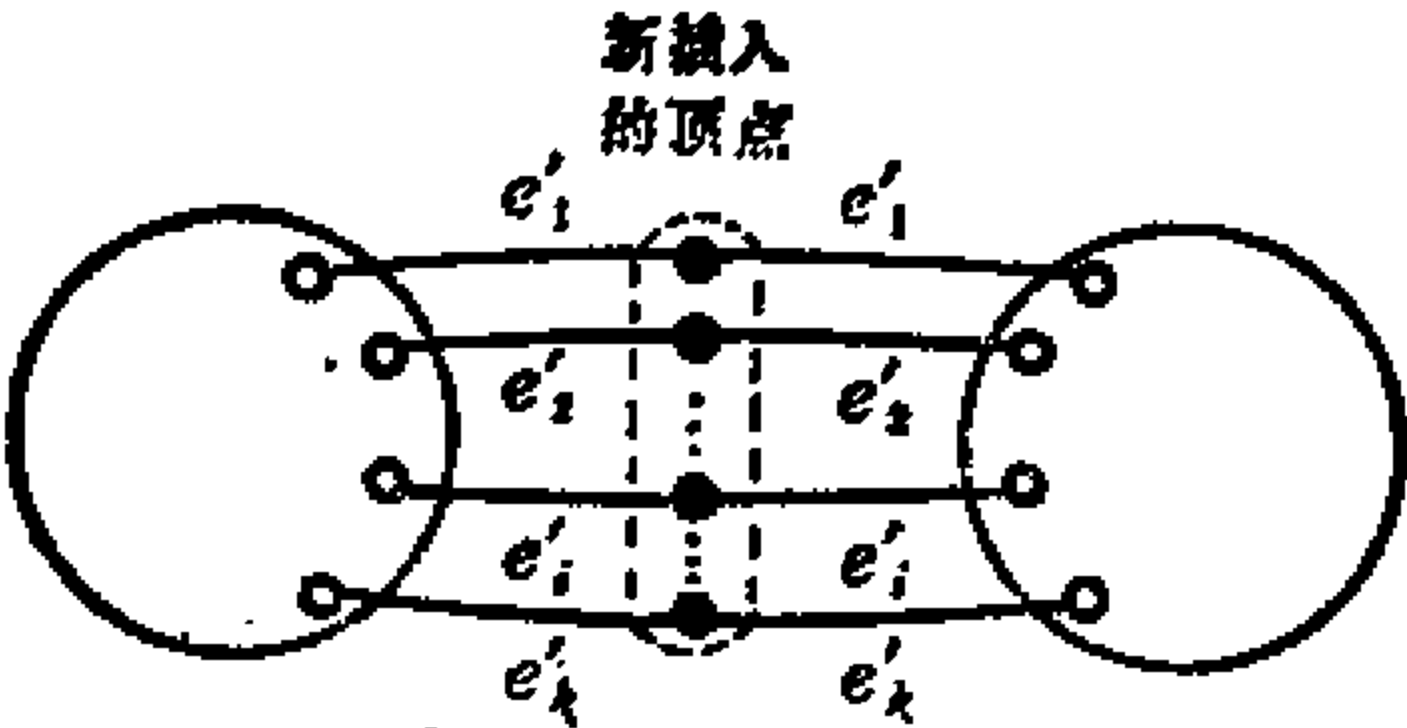


图3-5-12 顶点的插入

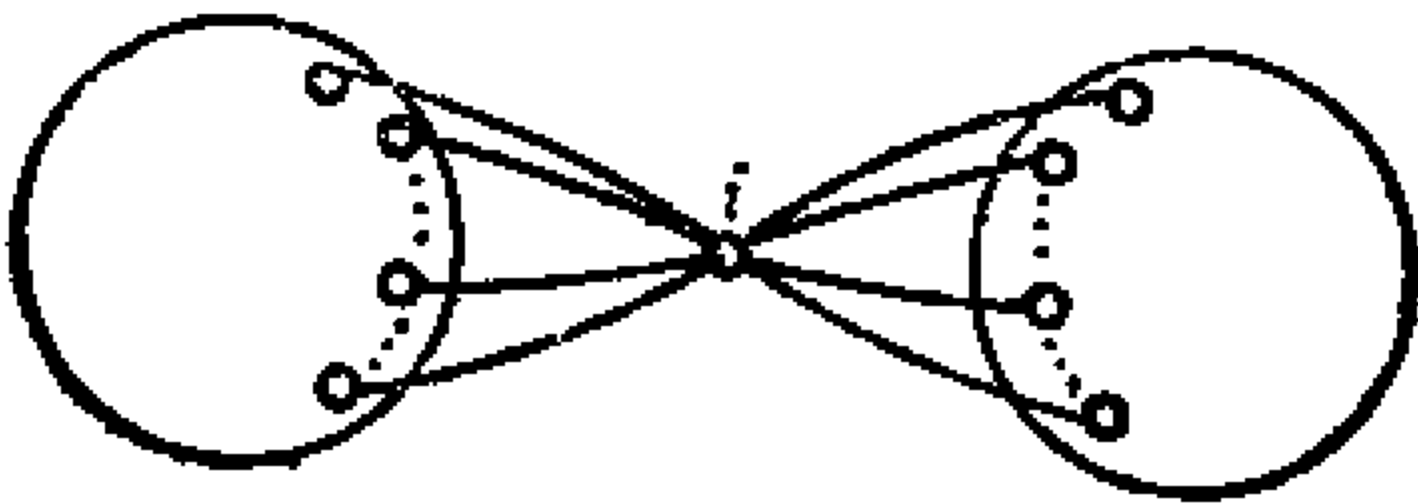


图3-5-13 割点 i

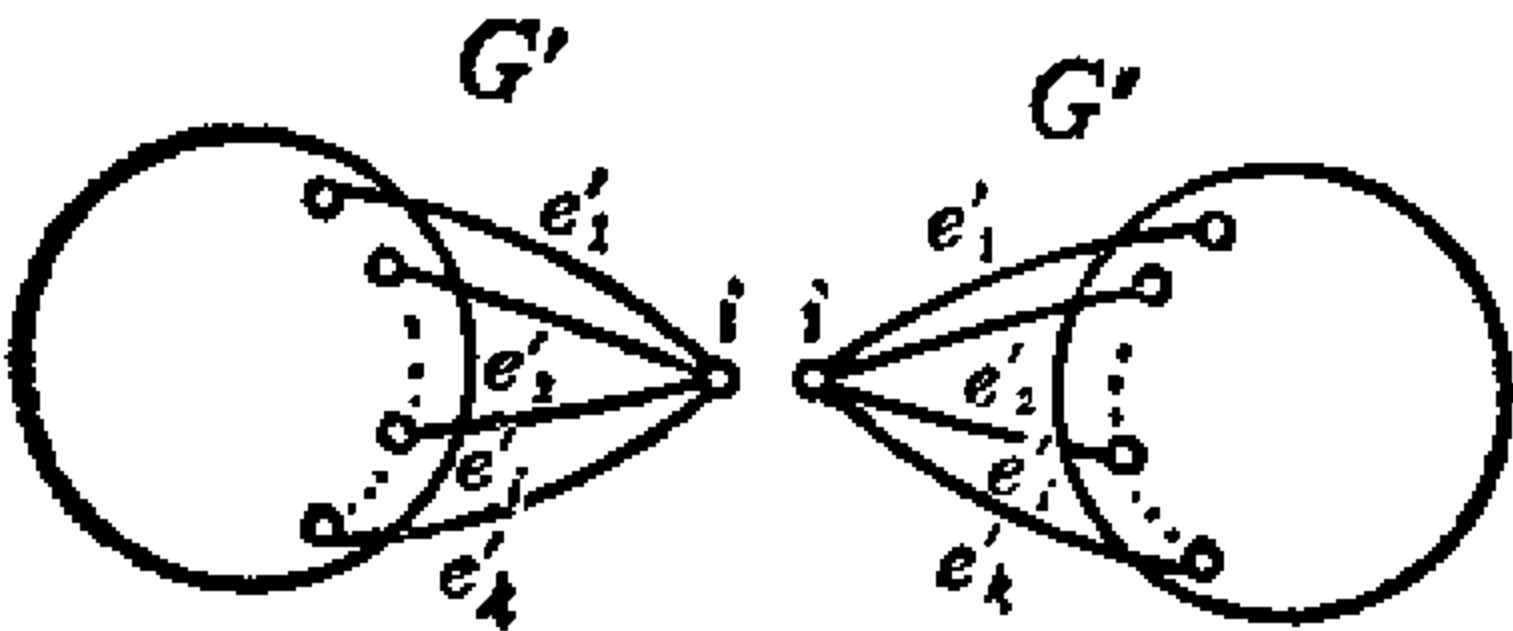


图3-5-14 割开顶点 i 形成 G' 和 G''

所示。可以看出，这两个图 G' 和 G'' 分别是合并 $\mathcal{G}(\bar{\Omega}_i \times \bar{\Omega}_i)$ 和 $\mathcal{G}(\Omega_i \times \Omega_i)$ 的全部顶点得到的。

假定图3-5-14中的 G' 和 G'' 是具有以下性质的任意线图：(1)

$M(i)_1$ 和 $M(i)_2$ 分别是 G' 和 G'' 的基本割集矩阵；(2) 在 G' 中， $M(i)_1$ 的行 i 代表的基本割集是一个关联集，在 G'' 中， $M(i)_2$ 的行 i 代表的基本割集是一个关联集。注意在这些条件下，那些既在 G' 中，又在 G'' 中的边与同一个顶点相联，这个顶点对应于 $M(i)_1$ 和 $M(i)_2$ 中的行 i 所代表的关联集。设这个顶点是顶点 i 。也就是说，在 G' 中，顶点 i 是与 $M(i)_1$ 的行 i 所代表的关联集对应的顶点，在 G'' 中，顶点 i 是与 $M(i)_2$ 的行 i 所代表的关联集对应的顶点。设在 G' 和 G'' 中，与顶点 i 连接的边为 e'_1, e'_2, \dots, e'_k 。又设顶点 v_{1p} 是边 e'_p 在 G' 中的另一个端点，顶点 v_{2p} 是边 e'_p 在 G'' 中的另一个端点， $p = 1, 2, \dots, k$ ，如图3-5-15所示。则对所有的 $p = 1,$

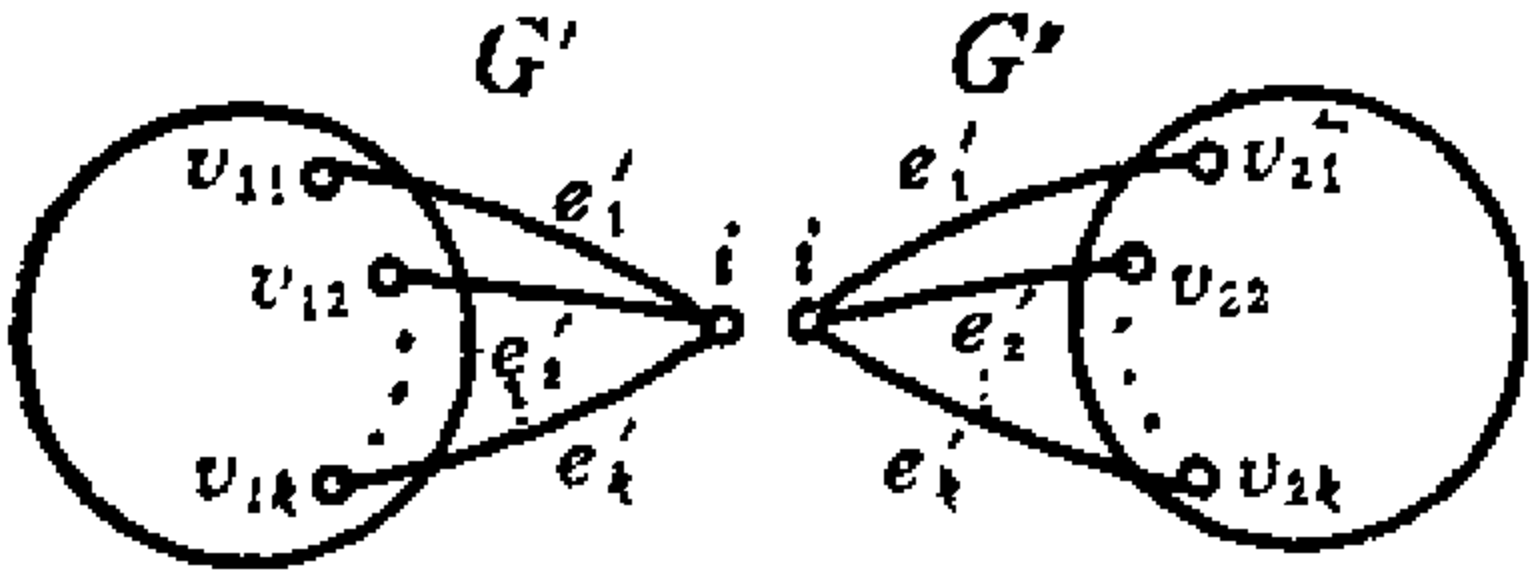


图3-5-15 两个线图 G' 和 G''

$2, \dots, k$ ，用一条连接顶点 v_{1p} 和 v_{2p} 的边来代替 G' 和 G'' 中的两条 e'_p ，就得到一个线图 G ，如图3-5-16所示。可以看出，这个线图的基本割集矩阵是 Q_1 。因此，由定理3-5-3，我们得到定理3-5-5。

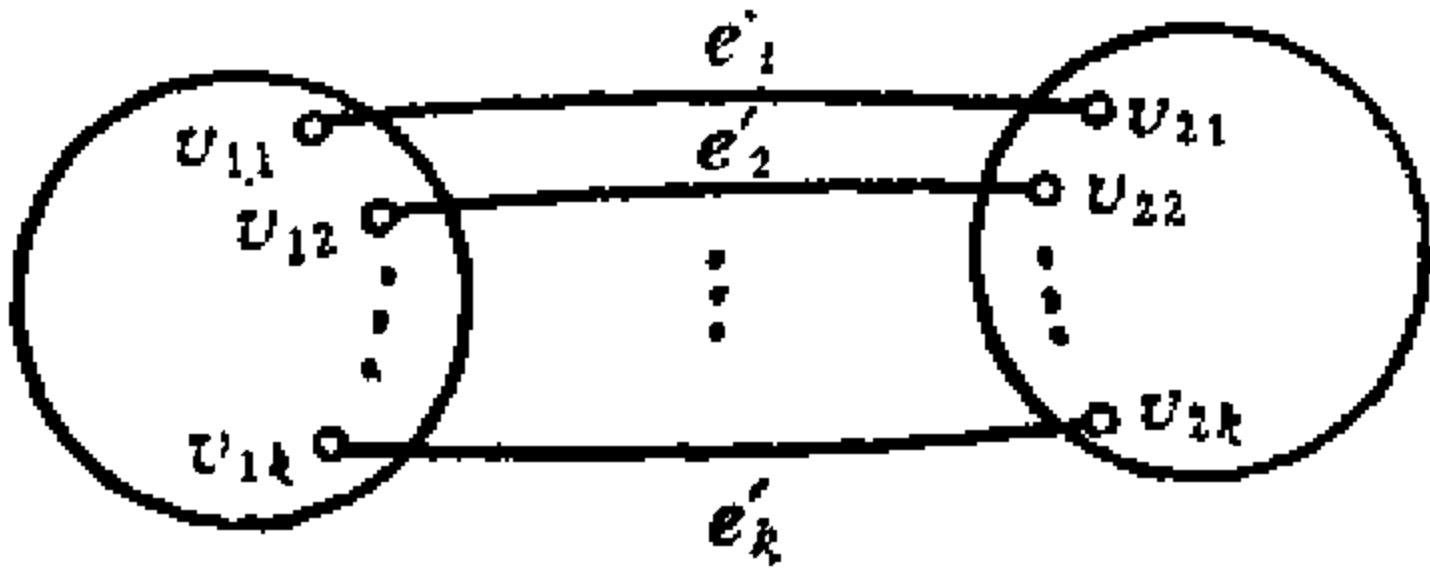


图3-5-16 由 G' 和 G'' 得到的线图

定理3-5-5 矩阵 Q_i 可以实现为一个线图的基本割集矩阵,当且仅当 Q_i 关于行 i 的 M 子阵对 $M(i)_1$ 和 $M(i)_2$ 可以实现为线图 G' 和 G'' 的基本割集矩阵,并且 $M(i)_1$ 的行 i 和 $M(i)_2$ 的行 i 分别代表 G' 和 G'' 的关联集。

特别要注意的一点是 H 子阵和 M 子阵的行、列的名称,就是与所给矩阵 Q_i 的行、列对应的行和列的名称。例如, $M(i)_1$ 的行 i 就是由 Q_i 的行 i 得到的行。

正如我们通过检验矩阵 Q_i 的 M 子阵对 $M(i)_1$ 和 $M(i)_2$,判断 Q_i 是否基本割集矩阵一样,我们也可以通过检验 $M(i)_1$ 的 M 子阵对,来判断 $M(i)_1$ 是不是一个限定其行 i 代表一个关联集的基本割集矩阵。接下去,我们又可以取这一对矩阵中的一个,作为给定的矩阵,而形成另外一对 M 子阵,来判断它是不是以一个特定的行代表关联矩阵的基本割集矩阵。如此类推。为了便于过程中书写,我们用以下方法来表示那些代表关联集的行。

定义3-5-4 形如 $M(j_1 j_2 \cdots j_k)$ 的 M 子阵,其圆括号内的元素所表示的行 j_1, j_2, \cdots, j_k 代表关联集。

如上所述,在我们由两个线图 G' 和 G'' [其基本割集矩阵分别为 $M(i)_1$ 和 $M(i)_2$]出发来求出线图 G 的整个过程中,只替换了与顶点 i 相连的边 $e'_p (p=1, 2, \cdots, k)$,这些边组成行 i 所代表的关联集。因此,除行 i 外, $M(i)_1$ 或 $M(i)_2$ 中其他任何一行所代表的关联集仍将保持原状。因此,我们有以下定理。

定理3-5-6 设 $M(j_1 \cdots j_k i)$ 和 $M(j'_1 \cdots j'_m i)$ 是矩阵 Q_i 的一个 M 子阵对,其中 $j_1 \neq \cdots \neq j_k \neq j'_1 \neq \cdots \neq j'_m \neq i$ [注意,只有 i 既在 $M(j_1 \cdots j_k i)$ 中,又在 $M(j'_1 \cdots j'_m i)$ 中]。当且仅当 $M(j_1 \cdots j_k i)$ 和 $M(j'_1 \cdots j'_m i)$ 可以实现为 G' 和 G'' 的基本割集矩阵,并且使得:
(1) G' 中由行 $j_1 \cdots j_k$ 和 i 所代表的基本割集是关联集;(2) G'' 中由行 $j'_1 \cdots j'_m$ 和 i 所代表的基本割集是关联集时, Q_i 可以实现为线图的基本割集矩阵,并且其中由行 $j_1, \cdots, j_k, j'_1, \cdots, j'_m$ 所代表的

基本割集是关联集。

设 $M(i_1)$ 是一个基本割集矩阵关于行 i_1 的 M 子阵对中的一个，而 $i_2 (\neq i_1)$ 是 $M(i_1)$ 中的一行。考虑 $M(i_1)$ 关于行 i_2 的 M 子阵对。 $M(i_1)$ 关于行 i_2 的这两个 M 子阵具有这样的性质：其中一个包含行 i_1 和行 i_2 ，另一个只包含行 i_2 而不包含行 i_1 。既包含行 i_1 又包含行 i_2 的一个用 $M(i_1 i_2)$ 表示，而只包含行 i_2 不包含行 i_1 的那一个用 $M(i_2)$ 表示。

一般说来，我们可以得到 $M(i_1 i_2 \cdots i_k)$ 关于行 i_{k+1} （它不是 i_1, i_2, \cdots, i_k 中的一个）的 M 子阵对。设这两个子阵之一包含行 $i_1, i_2, \cdots, i_m (m \leq k)$ 当然还包含行 i_{k+1} 。我们用符号 $M(i_1 i_2 \cdots i_m i_{k+1})$ 来表示这个子阵，则另一个子阵是 $M(i_{m+1} \cdots i_k i_{k+1})$ 。于是，由定理 3-5-6，当且仅当 $M(i_1 \cdots i_m i_{k+1})$ 和 $M(i_{m+1} \cdots i_k i_{k+1})$ 都可以实现为基本割集矩阵，并且限定其行 $i_1, i_2, \cdots, i_m, i_{m+1}, \cdots, i_k$ 和 i_{k+1} 代表关联集时，矩阵 $M(i_1 i_2 \cdots i_m \cdots i_k)$ 可以实现为基本割集矩阵，并且其行 $i_1, i_2, \cdots, i_m, \cdots, i_k$ 表示关联集。

只要一个 M 子阵 $M(i_1 \cdots i_n)$ 中还有一行 p 不在圆括号内，我们就可以继续构成 $M(i_1 \cdots i_n)$ 关于行 p 的 M 子阵对。当一个 M 子阵 $M(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 仅由行 i_1, i_2, \cdots, i_n 组成时，称此 M 子阵为最小 M 子阵。

定义3-5-5 一个 M 子阵 $M(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 是最小 M 子阵，如果 $M(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 仅由行 i_1, i_2, \cdots, i_n 组成。

因为最小 M 子阵的每一行都在圆括号内，所以它的每一行必表示一个关联集。因此最小 M 子阵必为一个关联矩阵。

因为对于矩阵的每一行，我们都可以构成一个 M 子阵对，所以，从一个由 n_v 个顶点组成的连通线图的基本割集矩阵 Q_f 出发，我们可以得到 n_v 个最小 M 子阵。（注意， Q_f 包含 $n_v - 1$ 行）。这 n_v 个最小 M 子阵组成一个集合，称为矩阵 Q_f 的最小 M 子阵集。

定理3-5-7 对于一个基本割集矩阵 Q_f ，存在 Q_f 的一个最小

子阵集，其中每一个最小 M 子阵是一个关联矩阵。

如果一个 H 子阵可分块为

$$H = \begin{bmatrix} H_1 & & & \\ & H_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & H_p \end{bmatrix} \quad (3-5-4)$$

则有许多方法可构成 M 子阵对。因此，一个基本割集矩阵 Q_f 的最小 M 子阵集合可能不唯一。这就导出了以下定理。

定理3-5-8 当且仅当一个矩阵 $R = [R_{11} \ U]$ 存在最小 M 子阵集合，使得集合中的每一个最小 M 子阵是一个关联矩阵时，矩阵 R 可以实现为线图的基本割集矩阵。

回顾过去所学，要判断一个矩阵是否为一个关联矩阵是很容易的，因为一个关联矩阵的每一列最多有两个1。如果一个矩阵的每一列最多有两个1，我们就可以构造一个线图，使此矩阵成为这个线图的关联矩阵。

例3-5-6 假定矩阵 R 为

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g & h & i \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

移去每一个在行1处为1的列，然后移去行1，得到 H 子阵 $H_{(1)}$ ，它可以分块为

$$\begin{array}{c} g \quad d \quad e \quad h \quad i \\ 2 \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

因此关于行 1 的 M 子阵对是

$$M(1)_1 = \begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad f \quad g \\ 1 \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ 2 \end{array}$$

和

$$M(1)_2 = \begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \quad h \quad i \\ 1 \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

$M(1)_1$ 的 H 子阵 $H_{(2)}$ 是

$$\begin{array}{c} b \quad f \\ 1 \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

于是, 取 $H_{(2),1} = 1 \left[\begin{array}{cc} b & f \\ 1 & 1 \end{array} \right]$, $H_{(2),2} = \phi$, 则 M 子阵 $M(12)$ 可由 $M(1)_1$ 不删去任何行和列得到, 或者说

$$M(12) = M(1)_1 \text{ (最小 } M \text{ 子阵)}$$

而 M 子阵 $M(2)$ 由 $M(1)_1$ 删除行 1 和列 b, f 得到, 即

$$M(2) = 2 \left[\begin{array}{ccc} a & c & g \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \text{ (最小 } M \text{ 子阵)}$$

注意 $M(12) = M(1)_1$ 意思是说矩阵 $M(12)$ 的每一个元素与矩阵 $M(1)_1$ 的对应元素相等。符号 $M(12)$ 和 $M(1)_1$ 指出不同的限制, 即 $M(12)$ 的行 1 和行 2 都必须代表关联集, 但在 $M(1)_1$ 中, 只求行 1 代表关联集。

$M(1)_2$ 的 H 子阵 $H_{(3)}$ 是

$$\begin{array}{cccc} a & b & f & i \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

它不能象式 (3-5-4) 那样分块而使两个子阵都不空。因此，取 $H(3)_2 = \phi$ ，我们有

$$M(13) = M(1)_2$$

和

$$\begin{array}{cccc} c & d & e & h \\ M(3) = 3 \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \text{ (最小 } M \text{ 子阵)} \end{array}$$

最后，由 $M(13)$ 删除在行 4 为 1 的所有列并移去行 4 所得到的 H 子阵 $H_{(4)}$ 可分块为

$$\begin{array}{cccc} a & f & d & h \\ 1 \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ 3 \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

故 $M(13)$ 关于行 4 的 M 子阵是

$$\begin{array}{cccccc} a & b & c & e & f & i \\ M(14) = \begin{array}{l} 1 \\ 4 \end{array} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \text{ (最小 } M \text{ 子阵)} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} b & c & d & e & h & i \\ M(34) = \begin{array}{l} 3 \\ 4 \end{array} \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \text{ (最小 } M \text{ 子阵)} \end{array}$$

因为最小 M 子阵 $M(12)$, $M(2)$, $M(3)$, $M(14)$ 和 $M(34)$ 的集合满足定理 3-5-8，故所给的矩阵 R 是一个线图的基本割集矩阵。

按照下面的步骤，我们可以构成一个以 Q_i 为基本割集矩阵的线图：

1. 从关联矩阵分别为 $M(14)$ 和 $M(34)$ 的两个线图 [图 3-5-17

(a)和(b)] 出发, 构成一个基本割集矩阵为 $M(13)$ 的线图, 如图3-5-18所示.

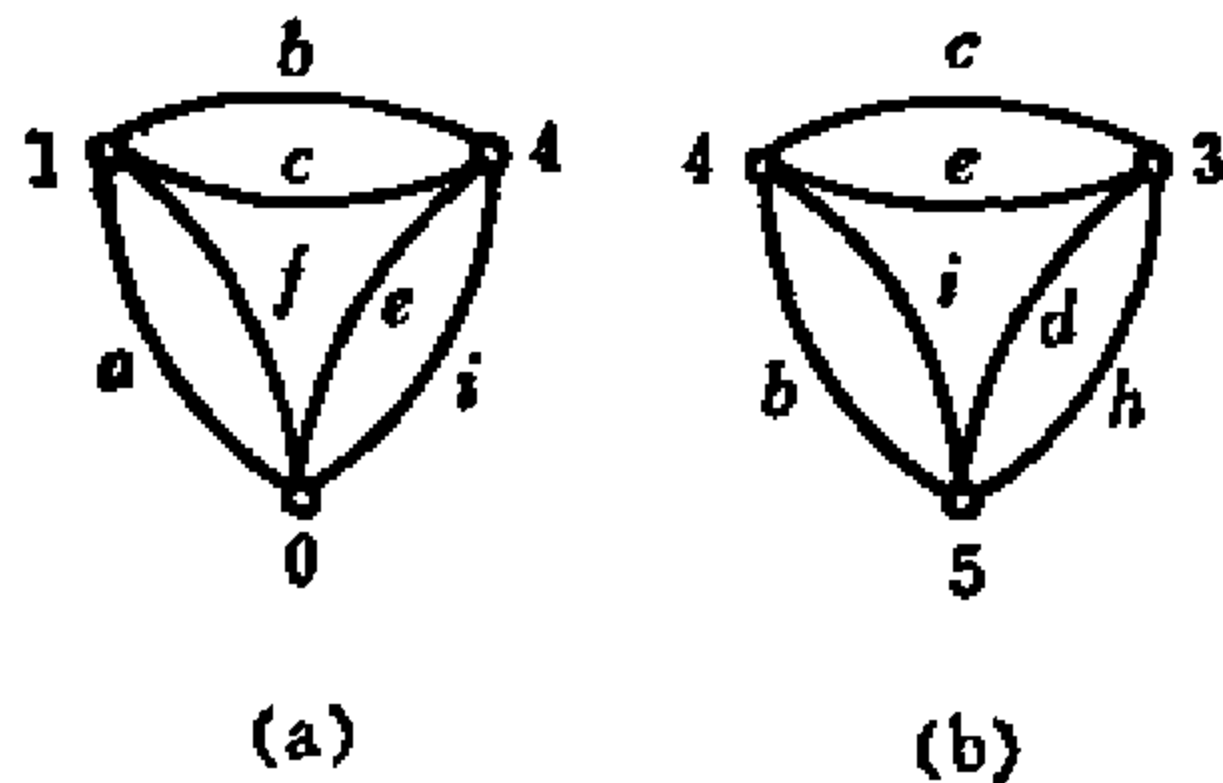


图3-5-17 线图

(a)对应于 $M(14)$ 的 G' , (b)对应于 $M(34)$ 的 G''

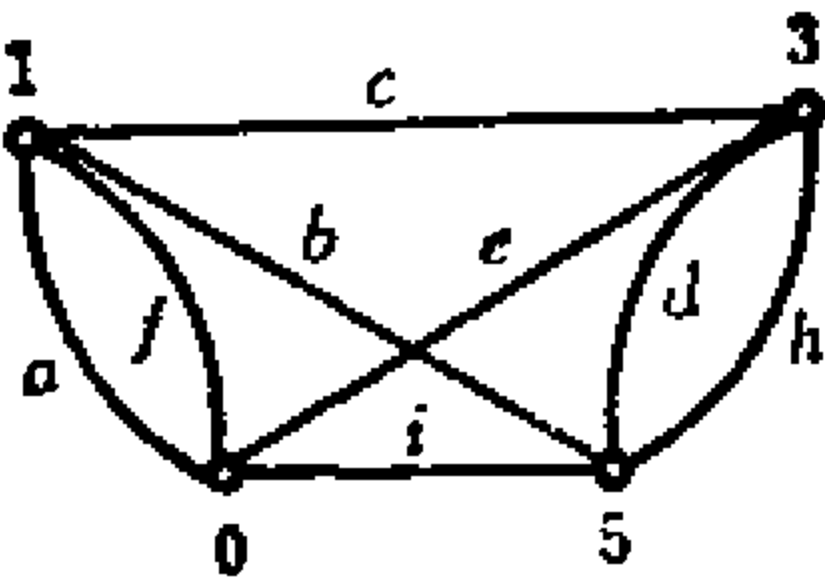


图3-5-18 对应于 $M(13)$ 的线图

2.从两个线图出发, 其中一个是由步骤 1 得到的, 另一个如图3-5-19所示, 其关联矩阵是 $M(12)$, 来构成以 Q_f 为基本割集矩阵的线图. 所得的图如图3-5-20所示.

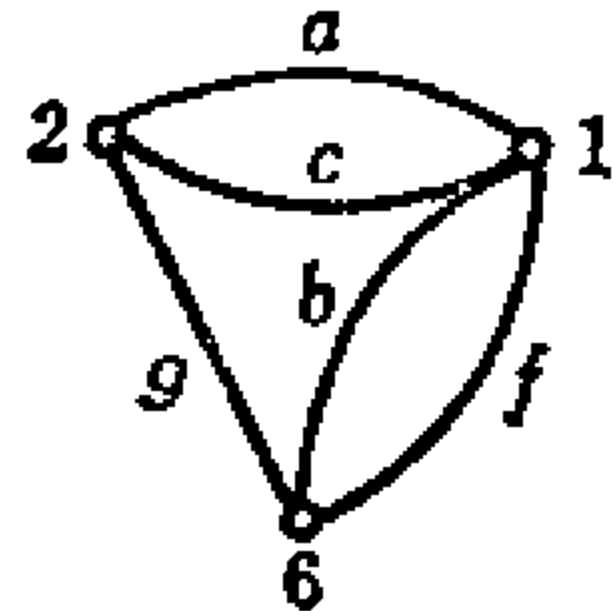


图3-5-19 对应于 $M(12)$ 的线图

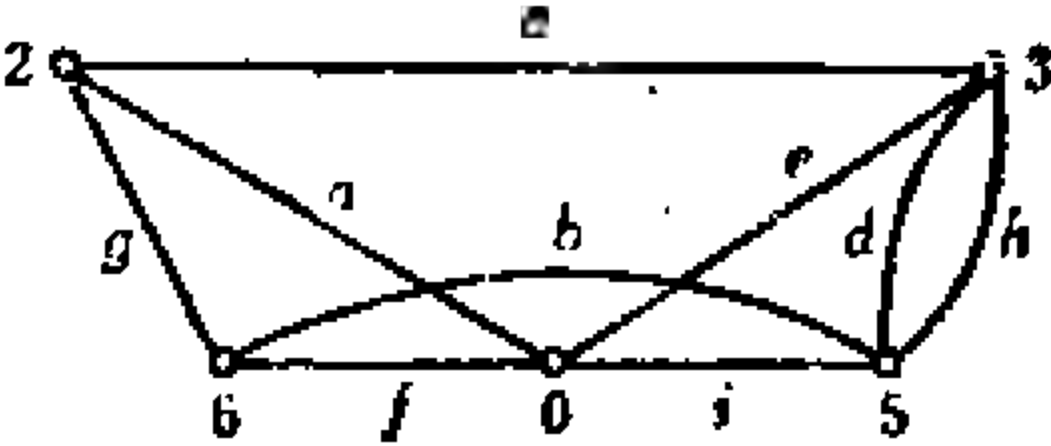


图3-5-20 对应于 Q_f 的线图

注意在用这些步骤来得到最终的线图时, 不需要用到任何一个关联矩阵只有一行的线图. 还必须注意, 定理3-5-8对分离线图也适用.

在许多情况下, 在得到一个最小 M 子阵集之前, 就能获知所给的线图是不可能实现为一个基本割集矩阵的. 以下定理给出这样一种情况.

定理3-5-9 设 $M(i_1 i_2 \cdots i_p)$ 是一个 M 子阵。如果其中存在一个列，它在行 i_1, i_2, \cdots, i_p 处至少有三个1，则 $M(i_1 i_2 \cdots i_p)$ 不可能实现为一个基本割集矩阵，而以其行 i_1, i_2, \cdots, i_p 代表关联集。

证明：假定 $M(i_1 i_2 \cdots i_p)$ 中除 i_1, i_2, \cdots, i_p 外没有其它的行，则 $M(i_1 i_2 \cdots i_p)$ 显然不可能是一个关联矩阵。现在我们假设，对于所有形如 $M(\cdots)$ 的矩阵，当它所包含的行中至多有 k 行 j_1, j_2, \cdots, j_k 不在圆括号内时，定理为真。注意所有在圆括号内的行一定表示关联集。然后，我们要证明，对于矩阵 $M(i_1 \cdots i_p)$ ，当它有 $k+1$ 行 $j_1, j_2, \cdots, j_k, j_{k+1}$ 不在圆括号中时，定理为真。

不失一般性，假定 $M(i_1 \cdots i_p)$ 的列 p 具有的三个1，是在行 i_1, i_2 和 i_3 处。

情形 1 假定行 j_1 在列 p 处为0，又假定我们用行 j_1 来构成 $M(i_1 \cdots i_p)$ 的 H 子阵。则当此 H 子阵如式(3-5-3)那样分块时，行 i_1, i_2 和 i_3 将一起在 H_1 中或在 H_2 中。于是关于行 j_1 的 M 子阵对之一将包含行 i_1, i_2 和 i_3 。所以它在列 p 与行 i_1, i_2, i_3 交叉处共有三个1。因为行 i_1, i_2 和 i_3 在圆括号内，又因为这个所得的矩阵最多有 k 行不在圆括号中，故定理在这个情形下为真。

情形 2 假定行 j_1 在列 p 处为1，我们用行 j_1 来构成 $M(i_1 \cdots i_p)$ 的 H 子阵。则因为在构成 H 子阵时列 p 将被删除，在按式(3-5-3)将 H 子阵分块后，行 i_1, i_2, i_3 不一定都在 H_1 中。如果行 i_1, i_2 和 i_3 一起都在 H_1 或 H_2 中，则证明与情形1完全相同。假定行 i_1 在 H_1 中，行 i_2 和 i_3 在 H_2 中，则在这种分划下，关于行 j_1 的 M 子阵对中，有一个包含行 i_2, i_3 和 j_1 ，它们在列 p 处都是1。因为在此 M 子阵中，最多有 k 行不在圆括号里，故由假设，定理为真。

(证毕)

上述定理可以用另一种方式来表达。

定理3-5-10 如果 $M(i_1 i_2 \cdots i_p)$ 中由行 i_1, i_2, \cdots, i_p 组成的子矩阵不是一个关联矩阵，则 $M(i_1 i_2 \cdots i_p)$ 不可能实现为基本割集矩

阵，而其行 i_1, i_2, \dots, i_p 表示关联集。

例3-5-7 考虑下面的矩阵

$$R = \begin{matrix} & a & b & c & d & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{matrix}$$

对于行 1，它的 H 子阵 $H_{(1)}$ 是

$$\begin{matrix} & b & e_2 & e_3 & e_4 \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{matrix}$$

于是， M 子阵对 $M_1(1)$ 和 $M_2(1)$ 是

$$M_1(1) = R$$

和

$$M_2(1) = 1 \begin{bmatrix} a & c & d & e_1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

对于 $M_1(1)$ 的行 2，其 H 子阵是

$$\begin{matrix} & c & e_1 & e_3 & e_4 \\ \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{matrix}$$

于是， $M_1(1)$ 关于行 2 的 M 子阵对是

$$M_1(12) = R$$

和

$$M_1(2) = 2 \begin{bmatrix} a & b & d & e_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

类似地， $M_1(12)$ 关于行 3 的 M 子阵对是

$$M_1(123) = R$$

和

$$M_1(3) = 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

因为 $M_1(123)$ 包含子阵

$$\begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \quad e_1 \quad e_2 \quad e_3 \\ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

其中每一行都在圆括号中（也就是说，每一行一定表示一个关联集），这个子矩阵应当是一个关联矩阵。然而，列 a 包含三个 1。因此这个子矩阵不可能是一个关联矩阵。于是，由定理 3-5-10，在这个 M 子阵集合下， R 不可能是一个基本割集矩阵。又因为用行 1, 2, 3 得不到其他的 M 子阵集合，所以我们可以断定， R 不是一个基本割集矩阵。

以下定理对于排除不可实现矩阵是很重要的。

定理 3-5-11 对于一个给定的矩阵 $R = [R_{11} \ U]$ ，如果存在一个子矩阵 $R' = [R'_{11} \ U']$ ，它不可能实现为基本割集矩阵。则矩阵 R 亦不可能实现为基本割集矩阵。这里 U' 是一个单位矩阵。

证明： 假定 $R = [R_{11} \ U]$ 是关于树 t 的基本割集矩阵。因为删除一些行相当于把 t 中一些枝短路，我们可以删除一些行，使剩余的矩阵 R_s 恰与 R' 有相同的行。注意 $R_s = [R_{s,11} \ U_s]$ 是一个线图的基本割集矩阵，这里 U_s 是单位矩阵。可以看出，删除 $R_{s,11}$ 的列等价于删除与这些列对应的弦。因此，我们用删除 $R_{s,11}$ 中不在 R'_{11} 内的列的办法，可以得到一个线图的基本割集矩阵 R' 。这与 R' 不是可实现的假设矛盾。所以 R 不是基本割集矩阵。（证毕）

例 3-5-8 因为矩阵

$$\begin{array}{ccccccc}
 & a & b & c & d & e_1 & e_2 & e_3 \\
 \left[\begin{array}{ccccccc}
 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

不可实现为基本割集矩阵（见例3-5-7），所以任何一个包含这个矩阵为其子矩阵而形如 $[R, U]$ 的矩阵 R ，是不可实现为基本割集矩阵的。

3-6 从割集矩阵到关联矩阵的变换

我们已经知道，一个线图的关联矩阵 A 是由穷举割集矩阵 Q_c 中的一些行组成的。一个基本割集矩阵 Q_f 也是由穷举割集矩阵 Q_c 的一些行组成的。并且，关联矩阵 A 的秩和基本割集矩阵 Q_f 的秩都等于穷举割集矩阵 Q_c 的秩。因此，存在一个非奇异矩阵 D ，使得

$$A = DQ_f \quad (3-6-1)$$

现在我们必须解决的问题，是怎样来得到满足式（3-6-1）的矩阵 D 。

设 $\{M_j; j=1, 2, \dots, n_v - \rho + 1\}$ 是我们在前面研究过的，矩阵 Q_f 的最小 M 子阵集合。又设 $\{g_j; j=1, 2, \dots, n_v - \rho + 1\}$ 是线图的集合，其中线图 g_j 的关联矩阵是 $M_j, j=1, 2, \dots, n_v - \rho + 1$ 。显然 g_j 有一个参考点 v_j ，它不对应关联矩阵 M_j 的任一行。注意，在 $\{M_j; j=1, 2, \dots, n_v - \rho + 1\}$ 中，矩阵 M_j 的行所表示的每一个顶点恰在 $\{g_j; j=1, 2, \dots, n_v - \rho + 1\}$ 中的两个线图里出现。并且，当我们把 $\{g_j; j=1, 2, \dots, n_v - \rho + 1\}$ 中的所有线图合在一起，得到一个以所给矩阵 Q_f 为基本割集矩阵的线图 G 时，所有由 $\{M_j; j=1, 2, \dots, n_v - \rho + 1\}$ 中任一 M_j 的行所表示的顶点都将被移去。换句话说，线图 G 不包含由 $M_j \in \{M_j; j=1, 2, \dots,$

$n_v - \rho + 1$ 的行所表示的顶点。又显然在从 $g_j \in \{g_j; j = 1, 2, \dots, n_v - \rho + 1\}$ 形成 G 的过程中，不会产生任何新的顶点。因此 G 仅由 g_j 的参考点组成。

例3-6-1 考虑一个基本割集矩阵 Q_1 ：

$$Q_1 = \begin{matrix} & a & b & c & d & e & f & g & h & i \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{matrix}$$

它与例3-5-6中的 R 相同。由例3-5-6的结果， Q_1 的一个最小 M 子阵集合为

$$\{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5\}$$

其中 $M_1 = M(12)$, $M_2 = M(2)$, $M_3 = M(3)$, $M_4 = M(14)$, $M_5 = M(34)$ 。线图 $\{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}$ 的集合如图3-6-1所示。注意 g_j 的

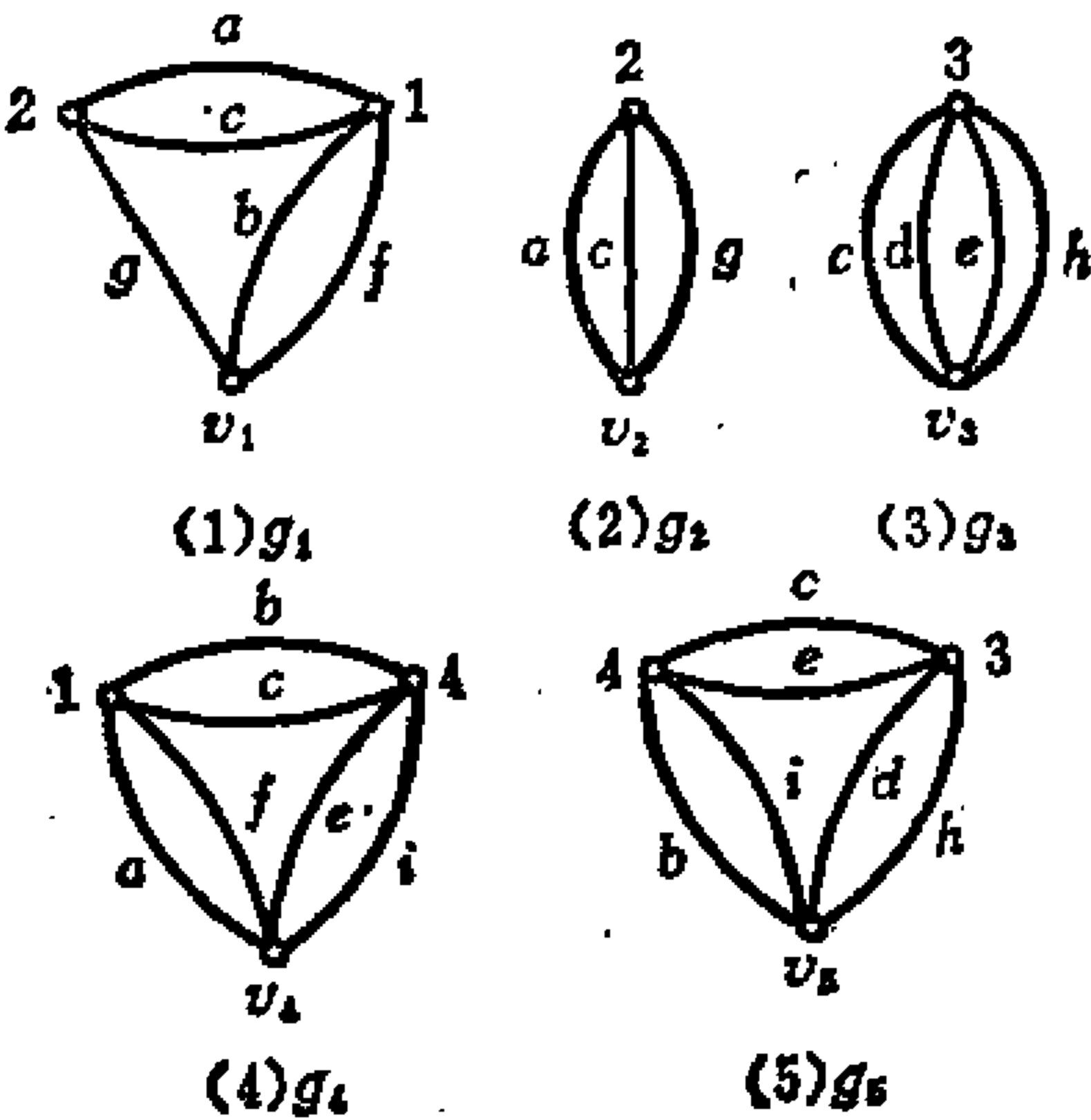


图3-6-1 集合 $\{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}$ 中的线图

参考点用符号 v_i 表示。把这些线图全部合到一起,就得到图3-6-2所示的线图 G , 它的基本割集矩阵是 Q_1 。注意 G 的顶点是 g_1, g_2, g_3, g_4 和 g_5 的参考点。

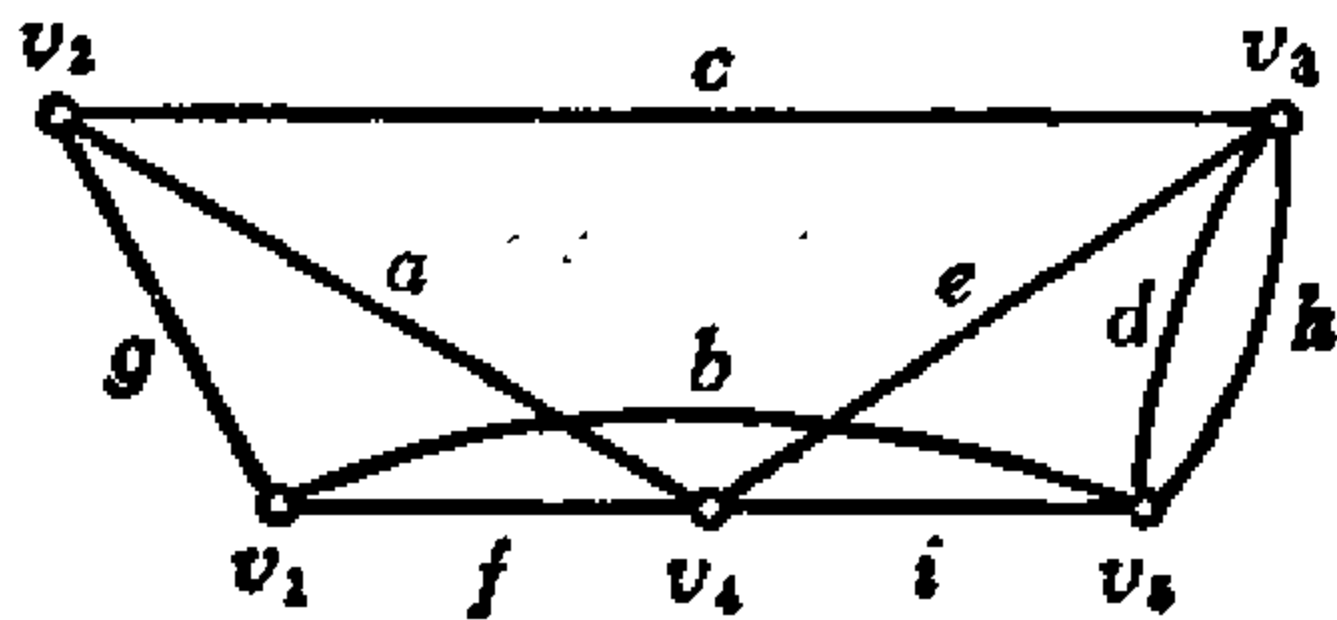


图3-6-2 线图 G

我们知道, 对应于 g_i 中参考点 v_i 的关联集等于与 M_i 中各行对应的全体关联集的环和。换句话说, 在线图 G 的关联矩阵 A 中, 对应于 g_i 的参考点 v_i 的行 j , 可以由 M_i 的所有行作环和得到。因而非奇异矩阵 D 的第 j 行必须求得那些属于 M_i 的各行之和。由 DQ_1 可看出, D 的第 i 列与 Q_1 的第 i 行对应。也就是说, 使 Q_1 的第 j_1, j_2, \dots, j_k 行乘上 D 的行 i 后求和, 就必须令 D 的元 $(i, j_1), (i, j_2), \dots, (i, j_k)$ 为 1。

定理3-6-1 设 Q_1 是由 ρ 个最大连通子图构成的线图的基本割集矩阵。任一矩阵 D 若满足以下两个条件:

1. D 的 $n_v - \rho$ 行对应 Q_1 的 $n_v - \rho$ 个最小 M 子阵。
2. $D = [d_{ij}]$ 的元素 d_{ij} 是

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若对应 } D \text{ 的第 } i \text{ 行的最小 } M \text{ 子阵包含 } Q_1 \text{ 的第 } j \text{ 行} \\ 0 & \text{若 } M \text{ 不包含 } Q_1 \text{ 的第 } j \text{ 行} \end{cases}$$

则 DQ_1 是线图 G 的一个关联矩阵。

假定存在一个非奇异矩阵 \underline{D} , 使得 $\underline{D}Q_1$ 是一个线图 G 的关联矩阵, 从这个线图连同 Q_1 给出的已知基本割集, 我们可以得到与 Q_1 的最小 M 子阵集合 $\{M_j; j = 1, 2, \dots, n_v - \rho + 1\}$ 对应的线图集

合 $\{g_i; i = 1, 2, \dots, n_v - \rho + 1\}$ 。于是由定理3-6-1, 我们可以得到一个非奇异矩阵 D , 使得 DQ_f 是 G 的关联矩阵, 其中 DQ_f 的行 i 和 \underline{DQ}_f 的行 i 表示 G 的同一顶点。因此

$$\underline{DQ}_f = DQ_f \quad (3-6-2)$$

因为 \underline{D} 是非奇异的, 故我们可以断定

$$\underline{D} = D \quad (3-6-3)$$

定理3-6-2 设 Q_f 是一个线图 G 的基本割集矩阵。对于任何一个非奇异矩阵 D , 如果 DQ_f 是一个关联矩阵, 则存在 Q_f 的一个最小 M 子阵集合, 使得 D 满足定理3-6-1的条件。

例3-6-2 考虑例3-5-6给出的基本割集矩阵 Q_f 。假定我们选取 $\{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5\}$ 中的 M_1, M_2, M_3 和 M_4 , 则由定理3-6-1, 可以得到一个非奇异矩阵 D 为

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

并且我们有

$$\begin{aligned} DQ_f &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

它显然是一个关联矩阵。

习 题

1. 写出图 P-3-1 所示线图关于树 t 的基本回路矩阵和基本割集矩阵。(a) 树 $t = (a, b, c, d, e)$; (b) 树 $t = (e, f, g, h, i)$.

2. 假定一个连通线图 g 由 n_v 个顶点组成. 证明: (a) 若 g 包含 $n_v - 1$ 条边, 则 g 是树; (b) 若 g 不包含回路, 则 g 是树.

3. 证明一个连通线图的任一边都可以在一个树中.

4. 证明或否定这样的说法: “对于一个连通图中任一条路径, 存在一个包含此路径的树.”

5. 证明在一个完全图中, 关于任一个树的弦集构成一个连通子图.

6. 假定树 t 中一个顶点 v 的度 $d(v) = k$, 证明 t 中至少有 k 个度为 1 的顶点.

7. 证明如果 G 是一个至少包含五个顶点的完全图, 则关于 G 的任一个树的全体弦组成的子图至少包含一个回路.

8. 证明任一个树和任一个割集至少有一条公共边.

9. 证明定理 3-2-3.

10. 证明定理 3-3-3.

11. 设 t 是线图 G 中的一个树. 设 b 是一条弦. 假定 $t \cup (b)$ 中的回路由边 b, e_1, e_2, \dots, e_k 组成, 证明对 $1 \leq p \leq k$, $t \cup (b) - (e_p)$ 是一个树. 注意 $t \cup (b) - (e_p)$ 由边 b 和 t 中除 e_p 外的所有边组成.

12. 设 e 是树 t 中的一条边. 又设 $S = (e, a_1, a_2, \dots, a_k)$ 是关于 t 的一个基本割集. (因此边 a_1, a_2, \dots, a_k 都不在 t 中.) 证明对 $1 \leq p \leq k$, $t \cup (a_p) - (e)$ 是一个树. 注意 $t \cup (a_p) - (e)$ 由边 a_p 和 t 中除边 e 外的所有边组成.

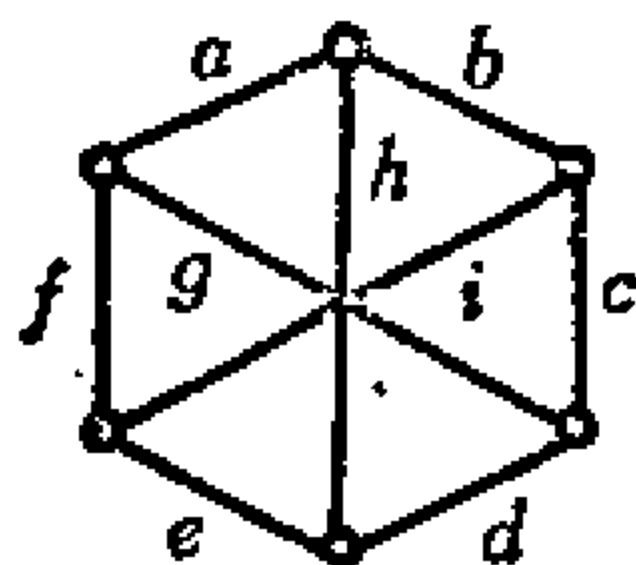


图 P-3-1

13. 判断以下矩阵是否可以实现为一个基本割集矩阵。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

14. 是否存在由 1 和 0 组成，既非割集矩阵又非回路矩阵的矩阵？如有这样的矩阵，请指出一个来。

15. 画出一个线图，其基本割集矩阵是

$$\begin{array}{cccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

16. 是否存在这样一个线图，其基本回路矩阵为习题 13 中的矩阵？

17. 画出一个线图，其基本回路矩阵是

$$\begin{array}{cccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

18. 画出一个线图，其基本回路矩阵是

$$\begin{array}{cccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

第四章 平面图

4-1 2-同构图

现在，我们转而讨论一种特殊类型的线图——平面图的性质，这不仅是由于四色问题引起了对平面图的研究，而且，更重要的是因为现代技术，如电子工业领域对平面性研究的日益增长的需要。本章的重点是惠特尼(Whitney)的对偶性理论，库拉托斯基(Kuratowski)的平面图理论，以及平面图的性质在证明托特(Tutte)的割集(回路)矩阵可实现性条件中的应用。首先，我们要研究线图的两种等价关系。

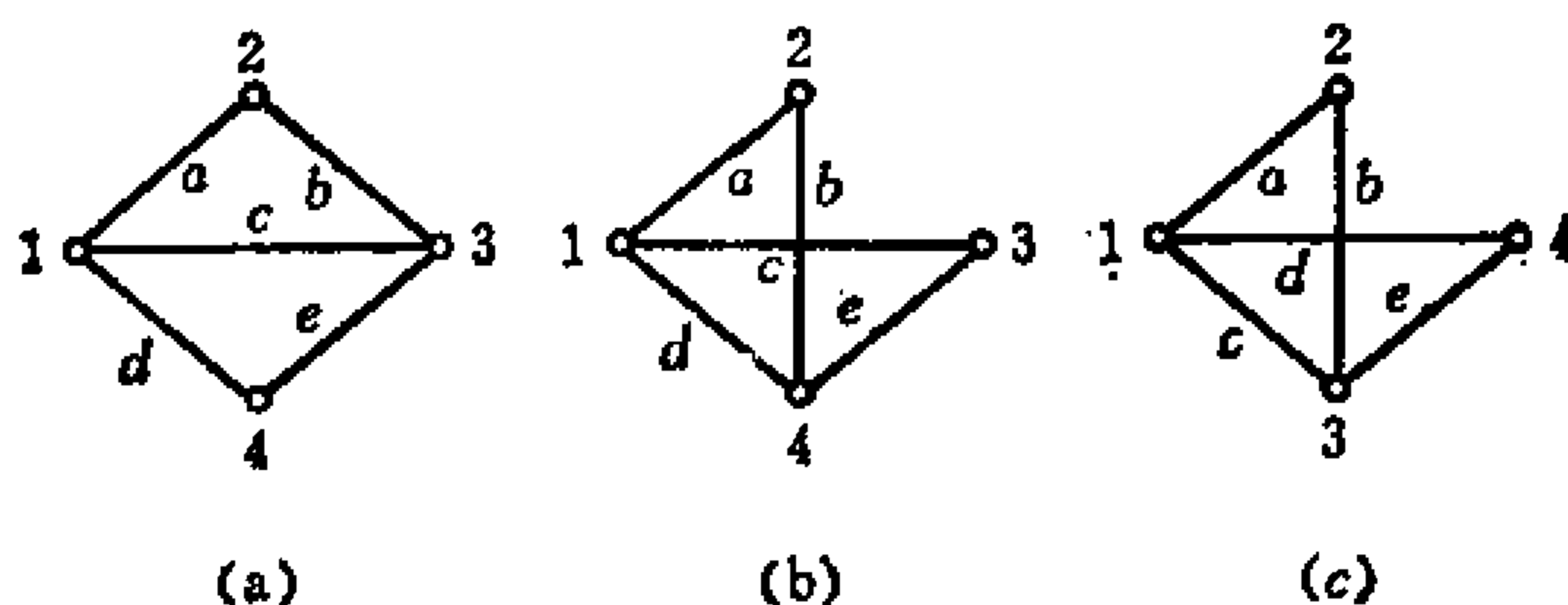


图4-1-1 同构图

(a)线图 G ；(b)线图 G' ；(c) G' 顶点和边的重新命名

考虑图4-1-1(a)和(b)所示的线图 G 和 G' 。比较边 b 的两个端点即可看出， G 和 G' 是不同的线图。但是，如果我们重新命名 G' 的顶点和边，如图4-1-1(c)所示（将顶点3改为4，顶点4改为3，边 c 改为 d ，边 d 改为 c ），所得的线图就变得和 G 一

致了。因此我们可以说， G 和 G' 是相似的。我们称这两个线图互为同构。

定义4-1-1 如果在线图 G 和 G' 的边之间存在着一个1:1对应，使得关联关系得到保持，则 G 和 G' 是互为同构的。

如果这个1:1对应不是保持两个线图的关联关系，而是保持 G 和 G' 回路之间的对应，则称这两个线图互为2-同构。

定义4-1-2 如果在线图 G 和 G' 的边之间存在着一个1:1对应，使得回路关系得到保持，则称 G 和 G' 互为2-同构。

例如，图4-1-2(a)和(b)中的线图 G 和 G' 是2-同构的，因为在 G 和 G' 的各边之间取一个1:1对应，如表4-1-1所示，则 G 中的回路对应于 G' 中的回路，如表4-1-2所示。

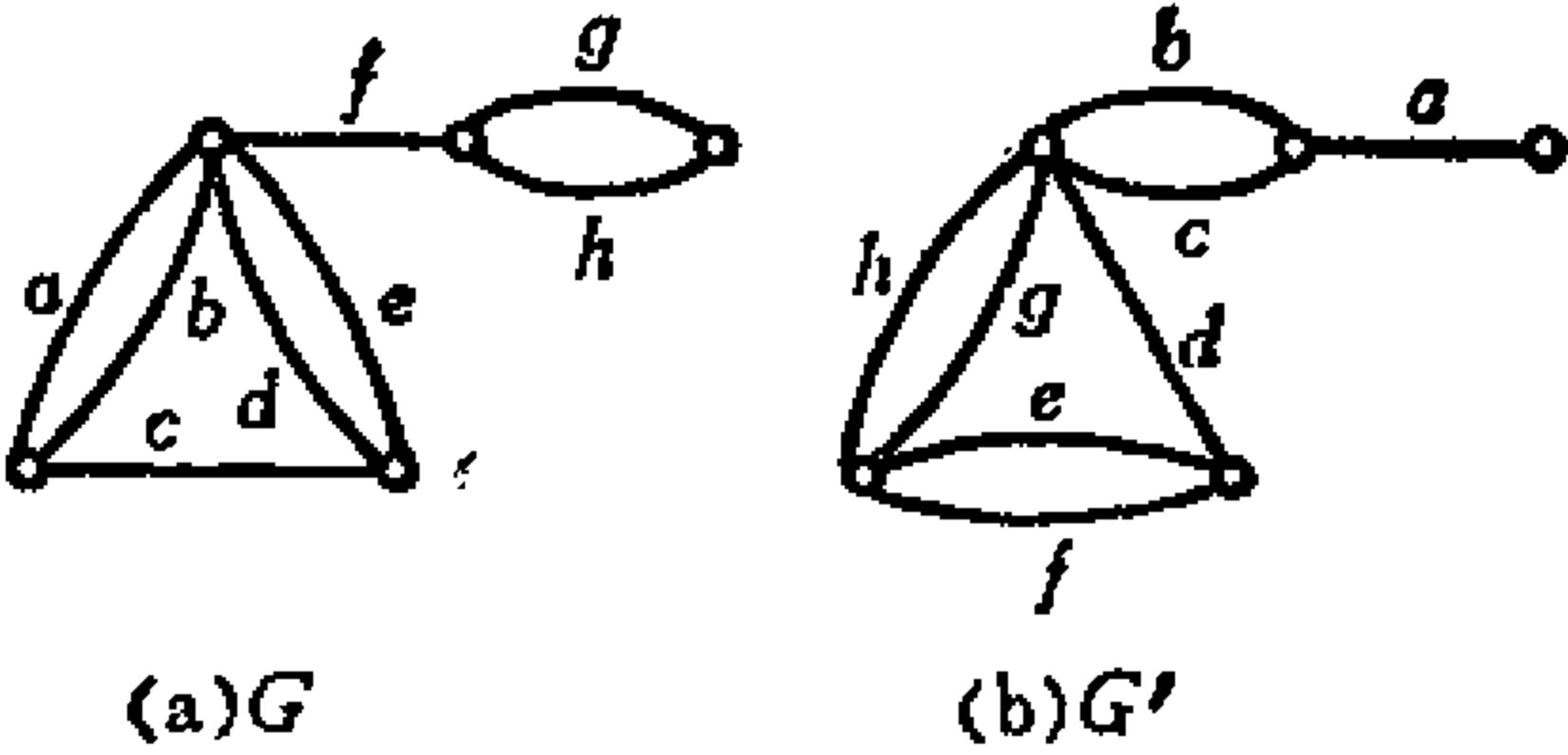


图4-1-2 2-同构图 G 和 G'

表4-1-1 G 和 G' 的各边之间的一一对应

G 中的 边	G' 中的 边
a	h
b	g
c	d
d	f
e	e
f	a
g	b
h	c

表4-1-2 G和G'的回路之间的一一对应

G 中的回路	G' 中的回路
<i>ab</i>	<i>hg</i>
<i>de</i>	<i>ef</i>
<i>gh</i>	<i>bc</i>
<i>acd</i>	<i>hdf</i>
<i>ace</i>	<i>hde</i>
<i>bcd</i>	<i>gdf</i>
<i>bce</i>	<i>gde</i>

从同构的定义可以看出，如果线图G和G'是同构的，则交换G的穷举关联矩阵 A_c 的行和列（如果有必要的话），就变成G'的穷举关联矩阵 A_c 。例如，图4-1-1(a)中G的穷举关联矩阵是

$$A_c = \begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

交换第3、第4行，得到

$$\begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

再交换第3、第4列，得到

$$\begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

这就是图4-1-1(b)中的 G' 的穷举关联矩阵 A' 。

另一方面，如果线图 G 和 G' 是2-同构的，则用交换行和列的办法（如有必要的话），可将 G 的穷举回路矩阵 B_c 变成 G' 的穷举回路矩阵。例如，在图4-1-2(a)和(b)中，以下两个矩阵分别为 G 和 G' 的回路矩阵

$$B = \begin{matrix} & a & b & c & d & e & f & g & h \\ \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$B' = \begin{matrix} & a & b & c & d & e & f & g & h \\ \begin{matrix} C'_1 \\ C'_2 \\ C'_3 \\ C'_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

则 G 的穷举回路矩阵 B_c 是

$$B_c = \begin{matrix} & a & b & c & d & e & f & g & h \\ \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_1 \oplus C_2 \\ C_1 \oplus C_3 \\ C_1 \oplus C_4 \\ C_2 \oplus C_3 \\ C_2 \oplus C_4 \\ C_3 \oplus C_4 \\ C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 \\ C_1 \oplus C_2 \oplus C_4 \\ C_1 \oplus C_3 \oplus C_4 \\ C_2 \oplus C_3 \oplus C_4 \\ C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus C_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

交换 B_c 的列，使列的次序变成 f, g, h, c, a, b, d, e ，

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 & f & g & h & c & a & b & d & e \\
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{array} \\
 B_c =
 \end{array}$$

那么， B' 的 C'_1 等于 B_c 的第二行， C'_2 是第一行， C'_3 是第三行，而 C'_4 是第九行。于是，交换行的次序，这个矩阵就变得与 G' 的穷举回路矩阵 B'_c 相同。注意，即使 G 和 G' 是互为2-同构的，回路矩阵 B 和 B' 中的回路也不一定互相对应。这就是我们在这个例子中采用穷举回路矩阵 B_c 的原因。

因为一个穷举回路矩阵的所有行可由一个基本回路矩阵生成，所以，如果一个线图的基本回路矩阵也是另一个线图的基本回路矩阵，则这两个线图是互为2-同构的。

定理4-1-1 两个线图是互为2-同构的，当且仅当它们具有相同的基本回路矩阵。

利用式(3-4-24)，我们可以修改这个定理。

定理4-1-2 两个线图是互为2-同构的，当且仅当它们具有相同的基本割集矩阵。

这两个定理对于判断两个线图是否是互为2-同构的，可能并不实用，然而，它们是相当重要的。例如，我们可以说，满足了给定的基本割集矩阵的所有线图都是互为2-同构的，这对于我们在以后各章设计线图时有很大的帮助。

下一个判断2-同构的方法是一种几何方法，它是由惠特尼介绍的。如果线图 G 和 G' 是互为2-同构的，则在连续施行以下一种或两种运算下，它们变成同构的。

1.如果存在一个割点，则将它切割成两个，使最大连通子图的个数增加1。

2.如果一个线图由两个子图 H 和 \bar{H} 组成，它们只有两个公共顶点，譬如说 p 和 q ，则交换 H 中这两个顶点 p 和 q 的名称。这一运算在几何上相当于把子图 H 绕这两个顶点旋转。

例如，图4-1-3(a)和(b)中的线图 G 和 G' 是2-同构的，这是因为经过以下步骤， G 变成与 G' 同构。

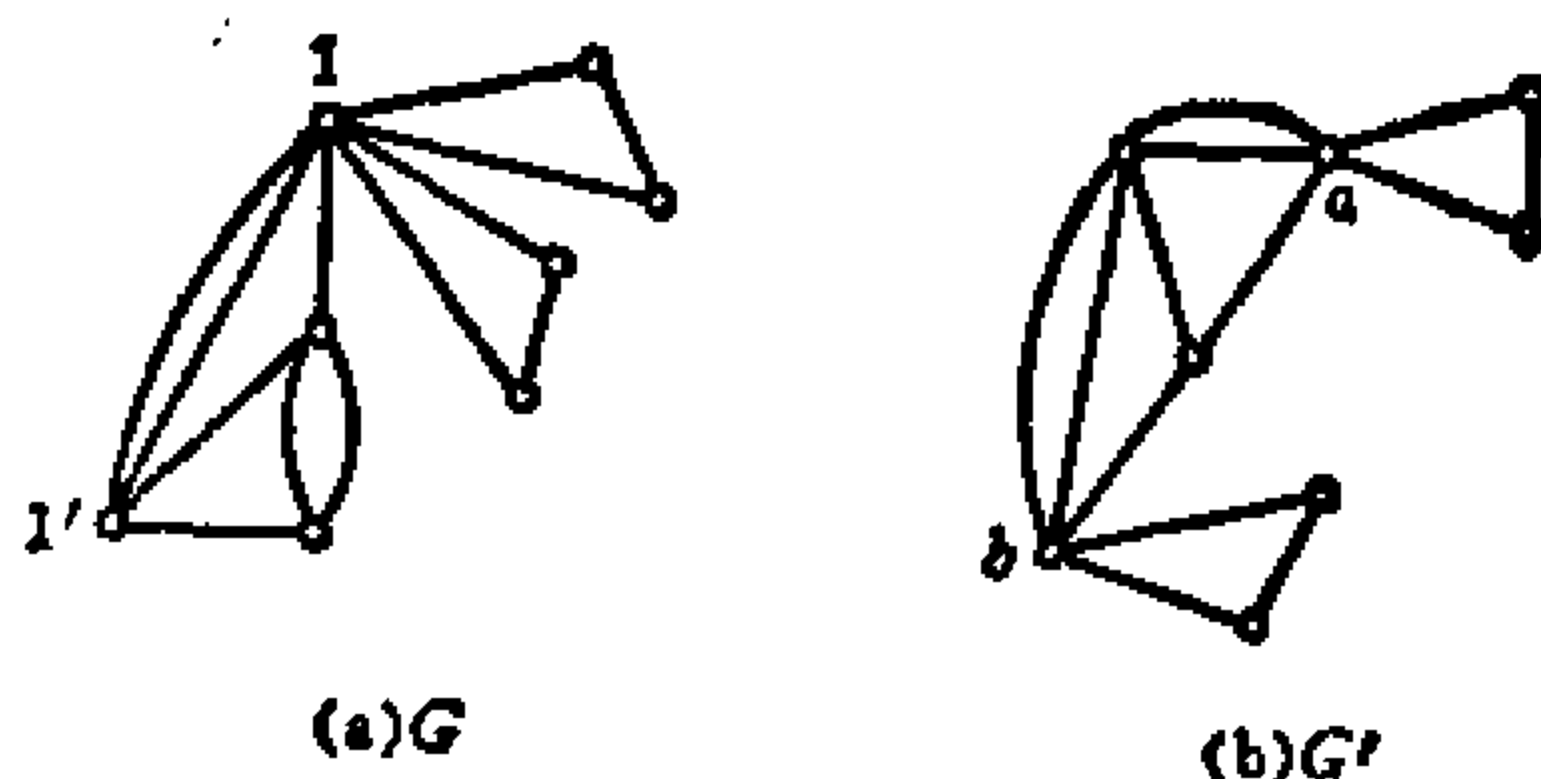


图4-1-3 2-同构图 G 和 G'

步骤1 对 G 的割点1运用运算1两次，我们得到图4-1-4(a)所示的线图 G_1 。类似地，对 G' 的割点 a ， b ，分别运用运算1，

就得到图4-1-4(b)所示的线图 G'_s 。

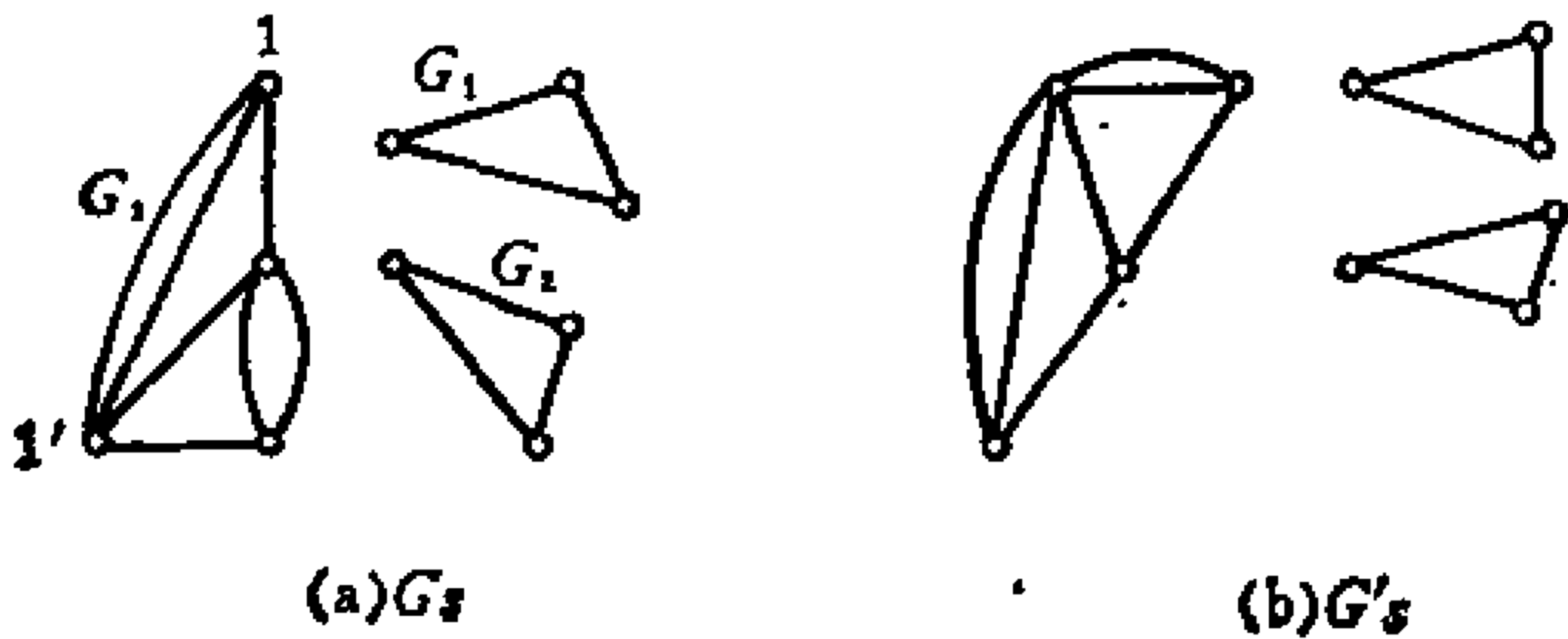


图4-1-4 2-同构图 G_s 和 G'_s

步骤 2 因为图4-1-4(a)中 G_s 的 G_3 由图4-1-5所示的两个子图 H 和 \bar{H} 组成，它们由两个顶点1和1'连接，我们可以运用运算2，得到图4-1-6所示的线图 G_{s1} 。

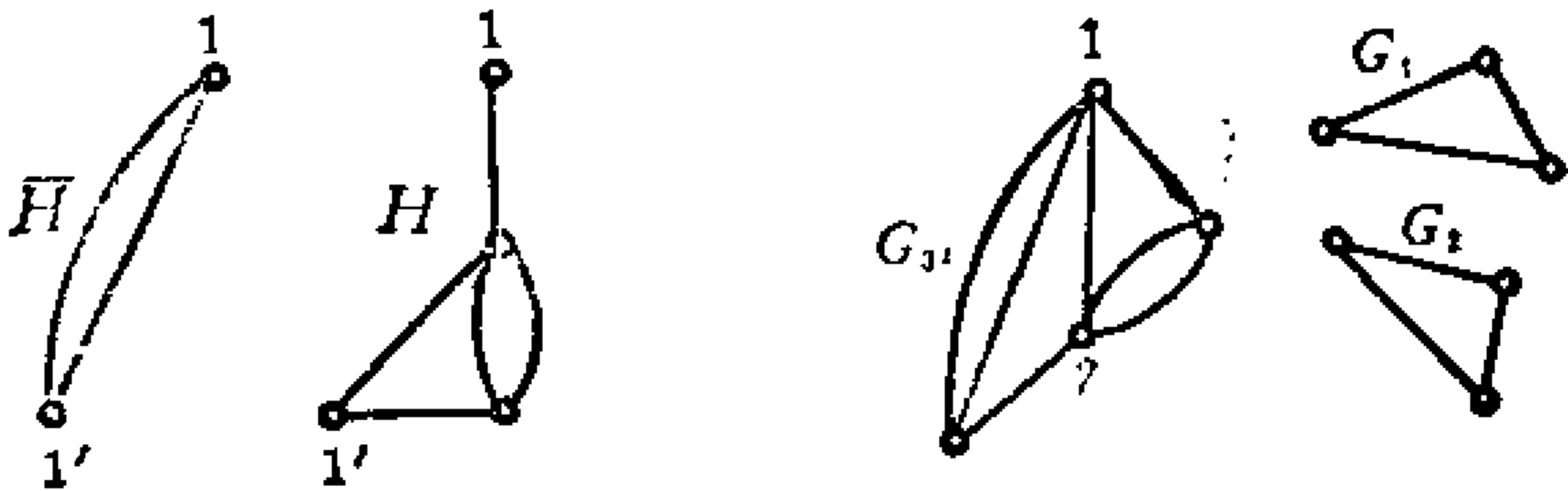


图4-1-5 子图 H 和 \bar{H}

图4-1-6 线图 G_{s1}

步骤 3 类似地， G_{s1} 的 G_3 由两个子图组成，它们恰有两个顶点1和2是公共的。因此，我们可以运用运算2来得到一个线图，它与图4-1-4(b)中的线图是同构的。于是， G 和 G' 是2-同构的。

容易看出，在这两种运算下，回路是不变的。只要所给的线图边数不多，就可以用这种方法来判断2-同构。

判断2-同构的另一种方法，是利用一个线图的回路矩阵和另一个线图的割集矩阵。

设 $B_1 = [B_{1,1} B_{1,2}]$ (4-1-1)

是线图 G_1 的回路矩阵，其中 $B_{1,1}$ 是非奇异的。又设

$$Q_2 = [Q_{2,1} Q_{2,2}] \quad (4-1-2)$$

是线图 G_2 的割集矩阵，其中 $Q_{2,2}$ 是非奇异的。假定

$$B_1 Q_2' = 0 \quad (4-1-3)$$

则 $B_{1,1} Q_{2,1}' + B_{1,2} Q_{2,2}' = 0 \quad (4-1-4)$

因为 $Q_{2,2}$ 是非奇异的，故

$$B_{1,2} = B_{1,1} Q_{2,1}' Q_{2,2}'^{-1} \quad (4-1-5)$$

因此 $B_1 = [B_{1,1} B_{1,1} Q_{2,1}' Q_{2,2}'^{-1}]$
 $= B_{1,1} [U Q_{2,1}' Q_{2,2}'^{-1}] \quad (4-1-6)$

另一方面，利用 G_2 的基本回路矩阵 $B_2 = [U B_{2,2}]$ ，我们总可以得到

$$B_2 Q_2' = 0 \quad (4-1-7)$$

或 $Q_{2,1}' + B_{2,2} Q_{2,2}' = 0 \quad (4-1-8)$

因此 $B_{2,2} = Q_{2,1}' Q_{2,2}'^{-1} \quad (4-1-9)$

或 $B_2 = [U Q_{2,1}' Q_{2,2}'^{-1}] \quad (4-1-10)$

因为 B_2 是 G_2 的一个回路矩阵，对式 (4-1-10) 左乘以任一个元素为 1 或 0 的非奇异矩阵，所得的矩阵仍为 G_2 的回路矩阵。因为 $B_{1,1}$ 是非奇异矩阵，我们利用它来得到 G_2 的另一个回路矩阵：

$$B_{1,1} B_2 = B_2' = B_{1,1} [U Q_{2,1}' Q_{2,2}'^{-1}] \quad (4-1-11)$$

然而这个回路矩阵恰与式 (4-1-6) 给出的 G_1 的回路矩阵相同。于是，由定理 4-1-1 知， G_1 和 G_2 是 2-同构的。

定理 4-1-3 设 B_1 是线图 G_1 的回路矩阵， Q_2' 是线图 G_2 的割集矩阵。则 G_1 和 G_2 是 2-同构的，当且仅当存在由交换 Q_2' 的列得到的 Q_2 ，满足

$$Q_2 B_1' = 0 \quad (4-1-12)$$

例4-1-1 设 B 是图4-1-2(a)中 G 的一个回路矩阵, 这里

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g & h \end{matrix} \\ \begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \end{matrix}$$

又设 Q'_1 是图4-1-2(b)中 G' 的一个割集矩阵, 这里

$$Q'_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g & h \end{matrix} \\ \begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \end{matrix}$$

交换 Q'_1 的列, 我们有

$$Q_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} e & f & d & g & h & a & b & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \end{matrix}$$

使得

$$Q_1 B' = 0$$

故, 图4-1-2(a)和(b)所示的 G 和 G' 是2-同构的.

4-2 平面图

平面图是一种特殊的线图, 它不仅在理论上, 而且在工业上具有重要意义. 但是, 目前对于平面图, 只有少数几种性质为人们所知. 首先我们要研究的, 是库拉托斯基发现的一个性质.

定义4-2-1 一个线图 G 称为平面的, 如果它可以被画在一个平面上, 使得 G 中任何两条边除了在端点外互不相交.

例如, 图4-2-1中线图 G 可以被重新画成图4-2-2的样子,

其中没有边相交。因此，线图 G 是平面的。而图 4-2-3 中的线图不是平面的。

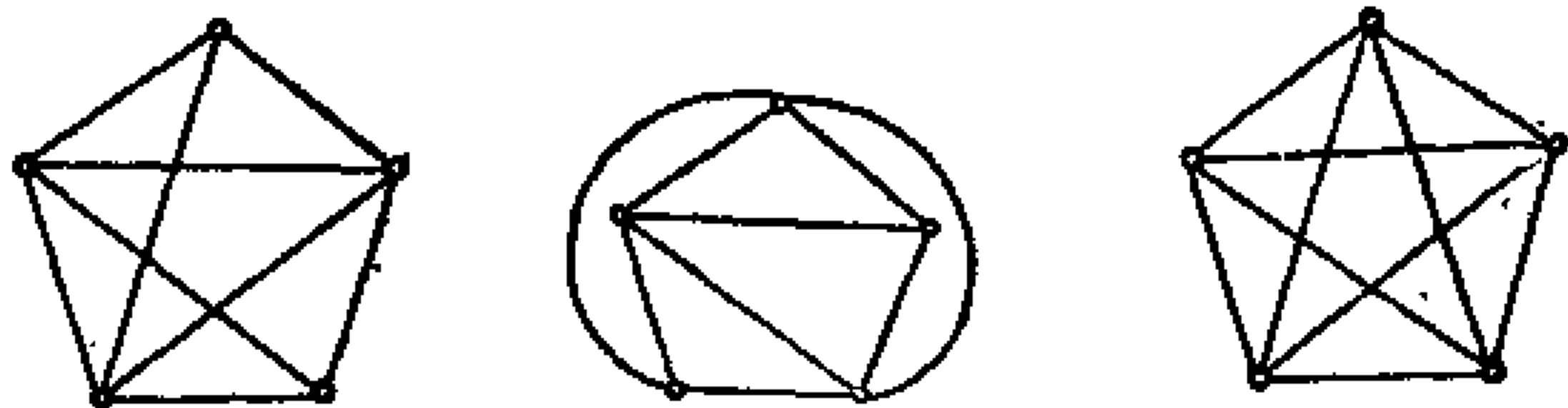


图4-2-1 线图 G 图4-2-2 平面图 G 图4-2-3 非平面线图

考虑放在平面 Z 上的球面 S ，如图 4-2-4 所示。设 N 是球面的最高点。穿过 N 和球面 S 上一点 p 的直线与平面 Z 交于点 p' 。称点 p' 为点 p 的对应点。我们可以看到，球面 S 上除 N 外的每一点都对应且仅对应平面 Z 上的一点。因此，对于球面 S 上的一条线段 q ，只要它不通过点 N ，就可以得到平面 Z 上的对应线段 q' 。

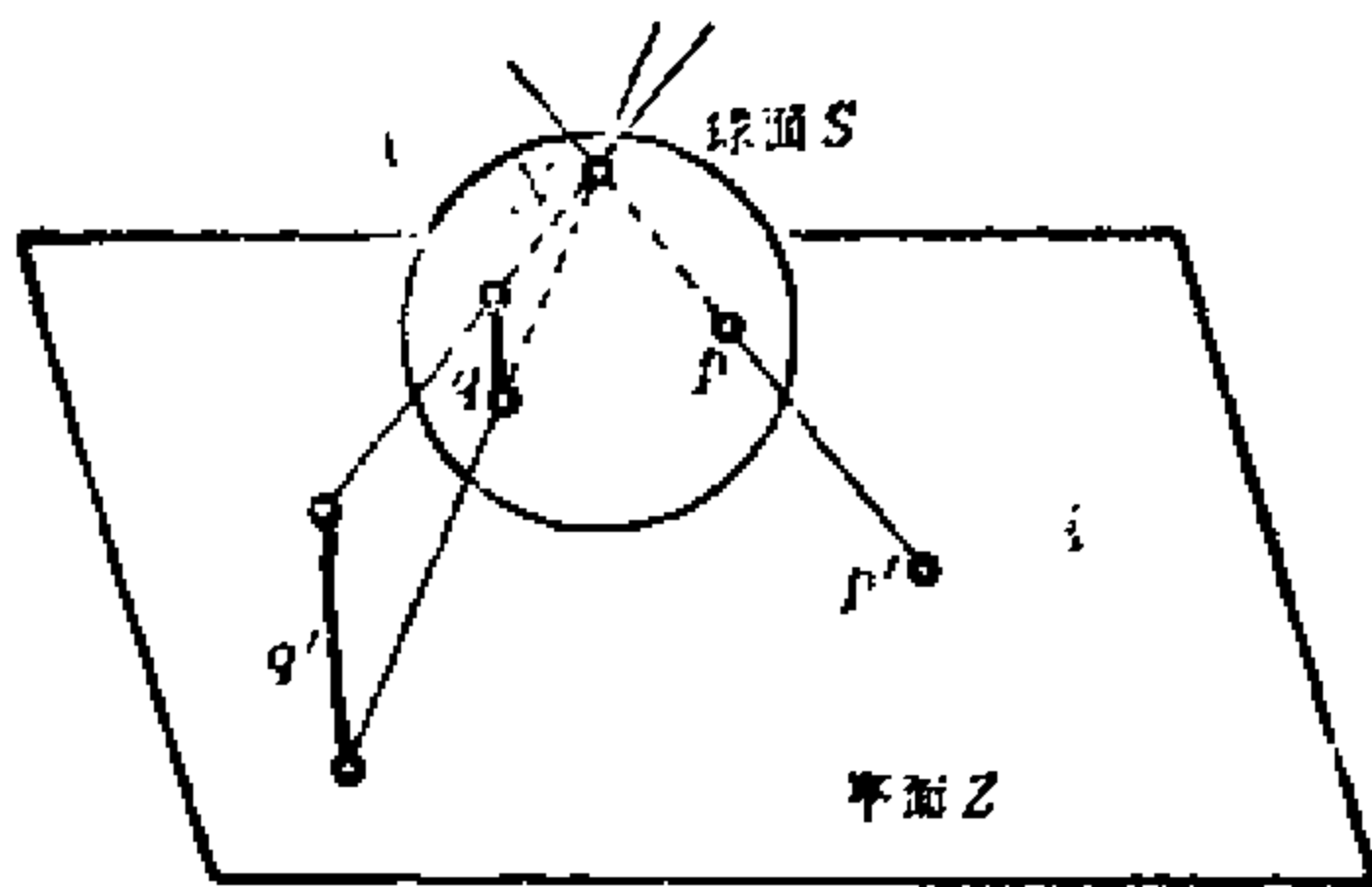


图4-2-4 球面 S 和平面 Z

假定有一个画在球面 S 上的线图。把球面 S 放在平面 Z 上，使这个线图的所有边和顶点都不在球面 S 的最高点 N 上，于是我们得到一个画在平面 Z 上的对应线图。相反，一个画在平面上的线图也可以画到球面 S 上。

假定我们把一个线图 G 画到平面 Z 上, 使得任两条边都不相交. 又假定 G 至少包含一个回路, 则我们可以认为 G 的边把平面 Z 划分成若干区域. 例如,

在图4-2-5中, 线图 G 把平面划分成五个区域 R_0, R_1, R_2, R_3 和 R_4 . 称 R_0 为外区域. 也就是说, 无界区域是外区域. 其他的区域叫做内区域. 注意一个线图不一定给出唯一的区域集合. 例如,

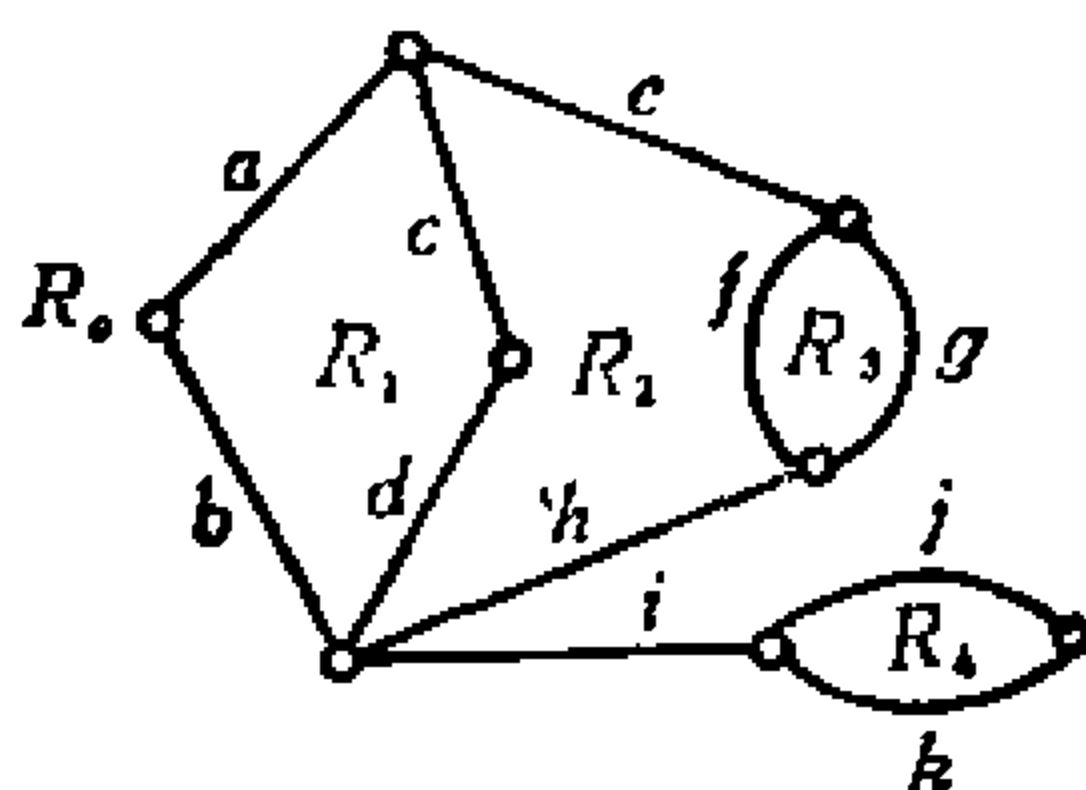


图4-2-5 平面图和区域

如果我们将同一个线图 G 画成如图 4-2-6 的样子, 就得到区域 R'_0, R'_1, R'_2, R'_3 和 R'_4 , 它们的边界 (形成这些区域边界的边) 与 R_0, R_1, R_2, R_3 和 R_4 的边界不同.

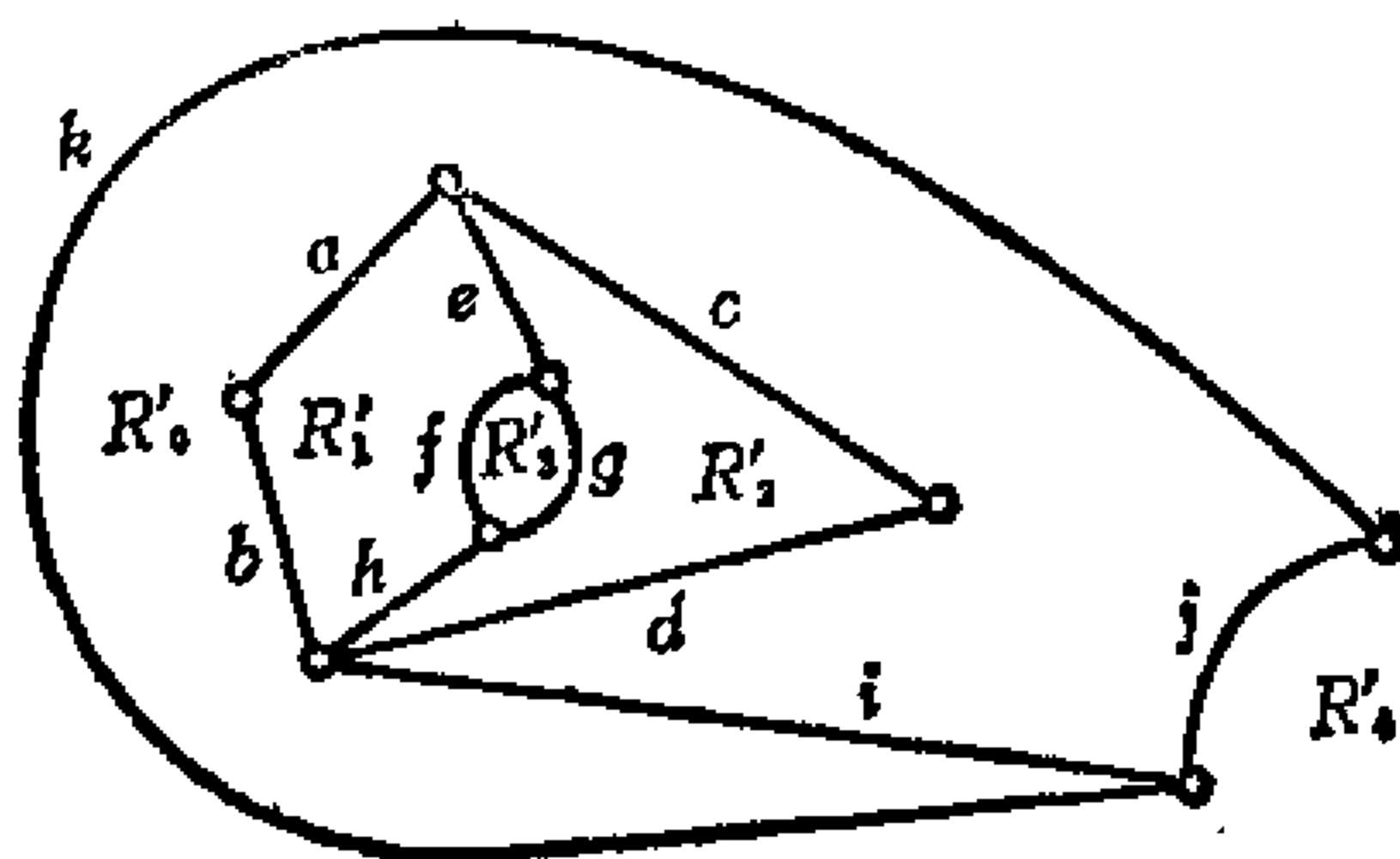


图4-2-6 平面图 G 和区域

平面图有一个值得注意的性质: 把平面图 G 画在一个平面上, 其中任何一个区域, 通过用下面的方法重画 G , 可以变成外区域. 我们可以先任意选取一个区域 R , 来说明这种方法. 注意, 假设我们已经给出了一个线图的一种特定图形. 现在, 我们

用前面讨论的方法，把这一图形画到球面上去，然后转动球面 S ，使其最高点 N 在区域 R 内，再把球面上的图形重新画到平面上。显然在所得的线图中， R 是外区域。

定义4-2-2 设边 e_1 的端点是 u_1 和 u_2 ，边 e_2 的端点是 v_1 和 v_2 。其中 $u_1 \neq u_2$ ， $v_1 \neq v_2$ 。如果 $u_2 = v_1$ ，并且没有其他的边以 u_2 作为顶点，则称 e_1 和 e_2 是串联的。如果 e_1 和 e_2 是串联的，则将 e_1, e_2 叫做串联边。

例如，在图4-2-7所示的线图中，边 e_1 和 e_2 是串联的，或者说 e_1 和 e_2 是串联边。

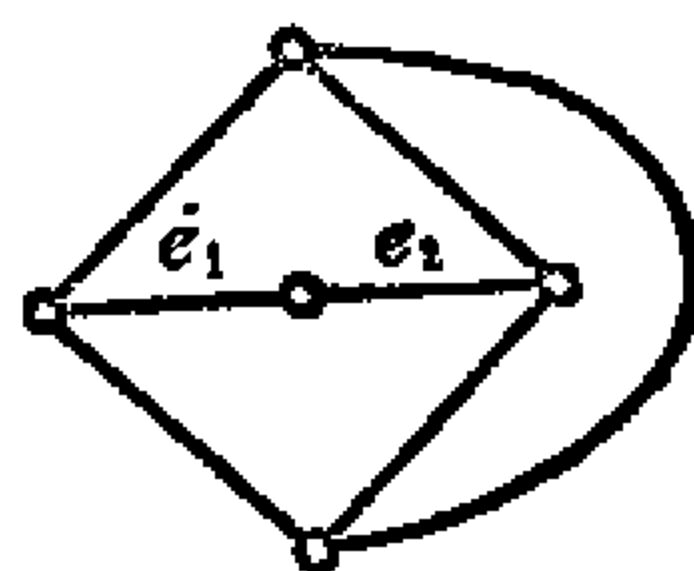


图4-2-7 串联边 e_1 和 e_2

考虑图4-2-8中的两个线图 G 和 G' 。它们显然是不同的线图。但是，当我们用串联边 e_1 和 e_2 来替换 G 的边 e 时，所得的线图便与 G' 同构。我们说这样的两个线图是同胚的。

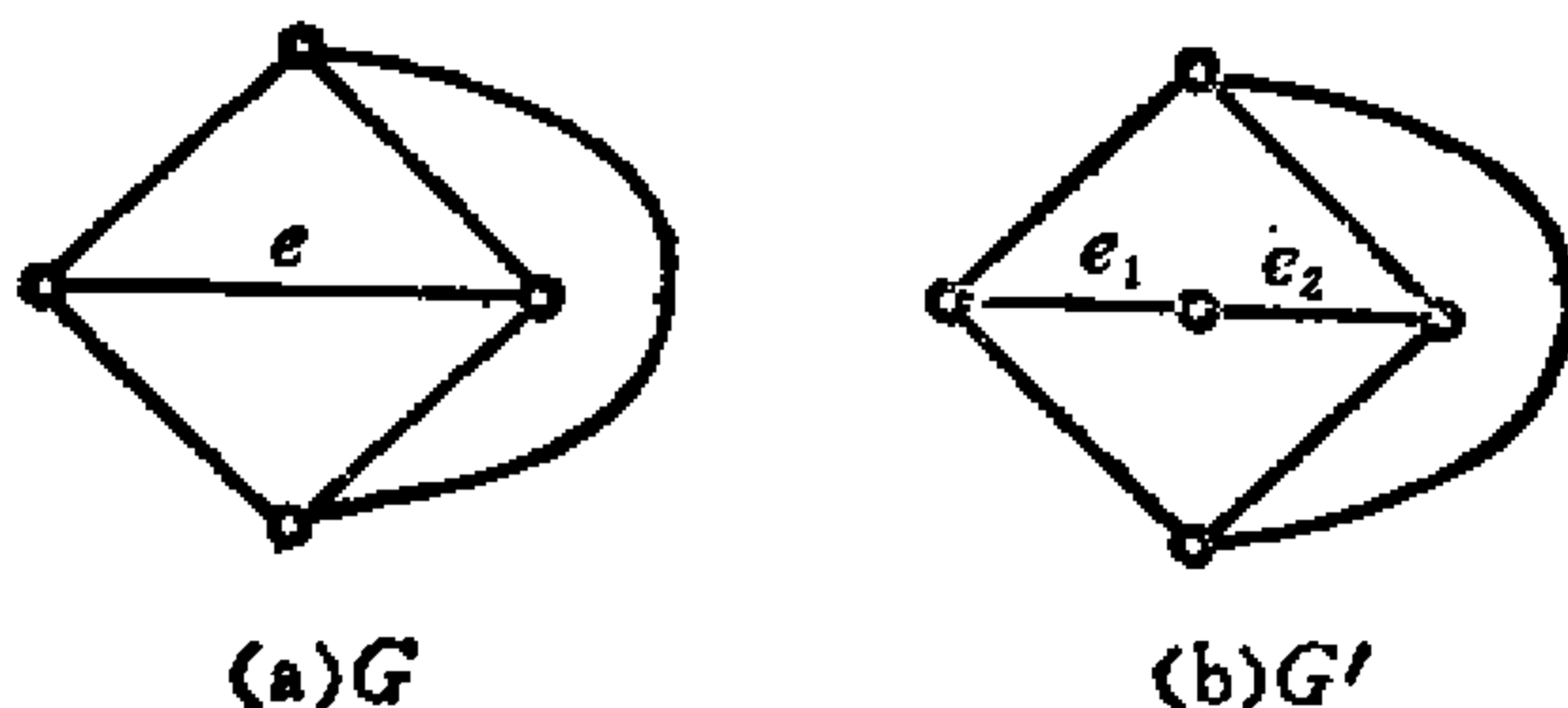


图4-2-8

(a) 线图 G , (b) 线图 G'

定义4-2-3 两个线图 G 和 G' 是同胚的，当且仅当存在一个线图 G'' ，使得 G 和 G' 通过用串联边代换的方法，都能变得与 G'' 同构。

例如，图4-2-9中线图 G_1 和 G_2 是同胚的。

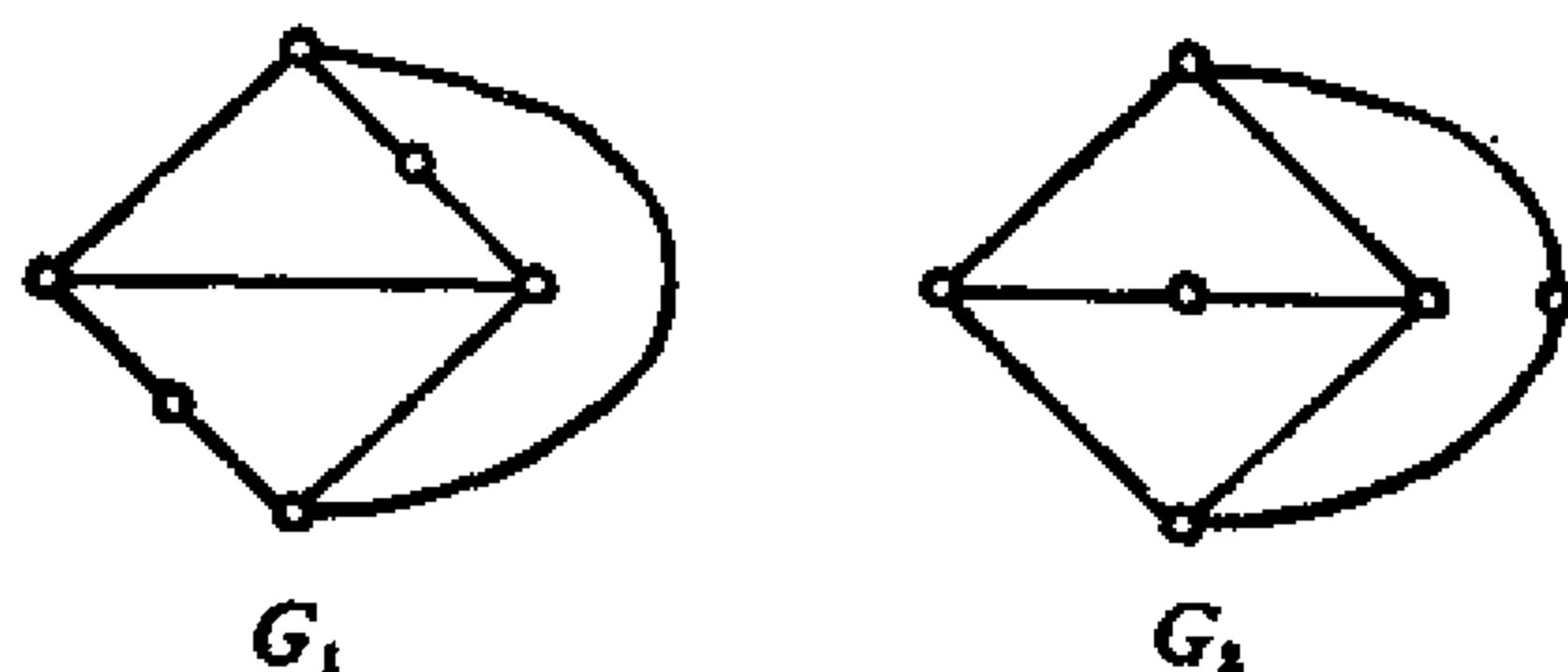


图4-2-9 同胚图

现在我们为研究一个重要的性质作好了准备，这个性质清楚地表明了平面图与非平面图的区别。

定理4-2-1(库拉托斯基) 一个有限线图不是平面的，当且仅当它包含与图4-2-10所示的两种基本非平面图中的任何一个同胚的子图。

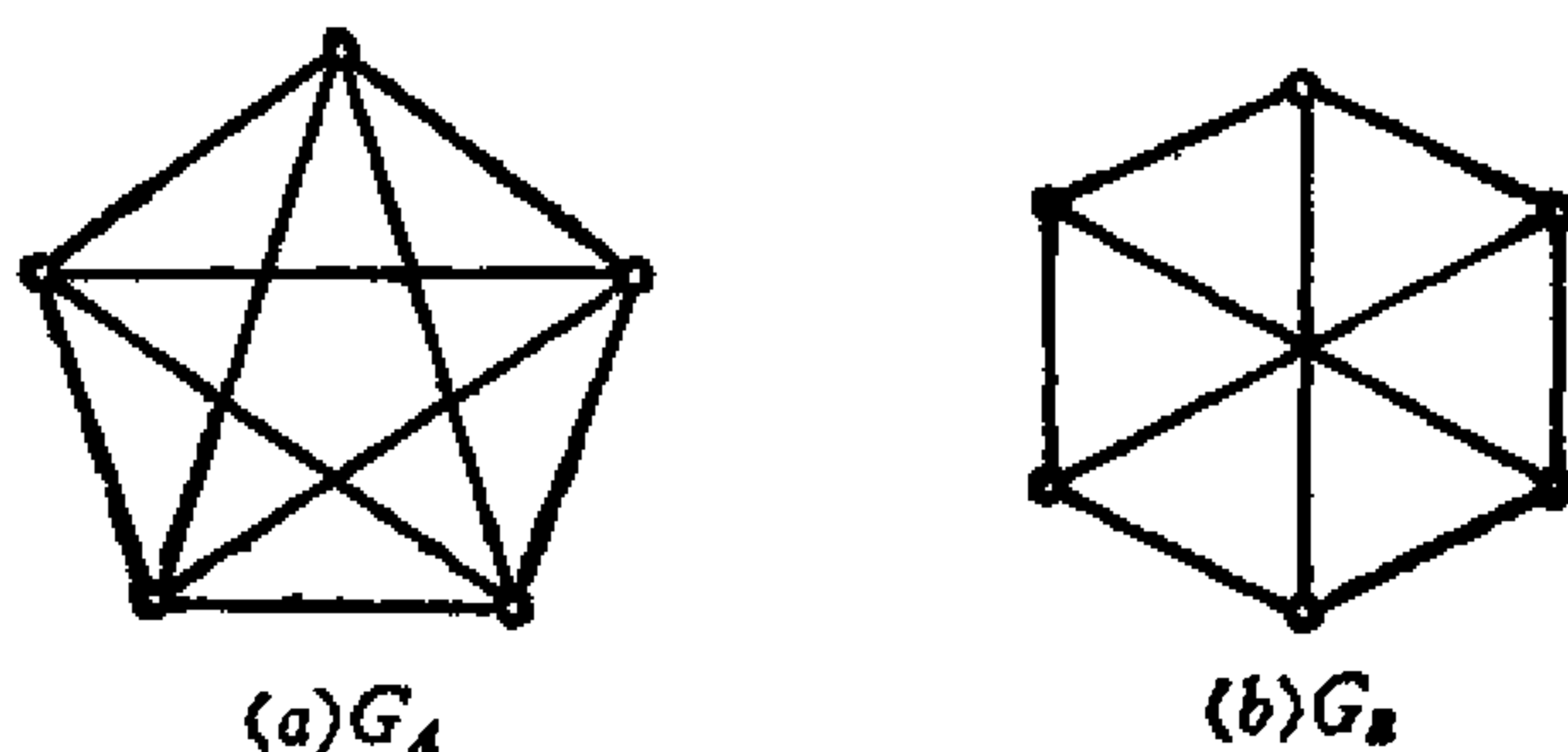


图4-2-10 基本非平面图 G_A 和 G_B

注意，有限线图是包含有限条边的线图。

例4-2-1 图4-2-11(a)中的线图是非平面的，因为它包含一个图4-2-11(b)所示的子图，这个子图与基本非平面图 G_B 同胚。

证明：根据定义，如果一个线图是平面的，则可将此线图画在一个平面上，其中没有相交的边。把这个平面图形的一些边移

去，就得到这个线图的一个子图在平面上的图形，其中也没有相交的边。因此，如果一个线图是平面的，则此线图的任一子图也是平面的。于是，一个平面线图不可能包含与基本非平面图同胚的子图。这就证明了定理的前一部分。

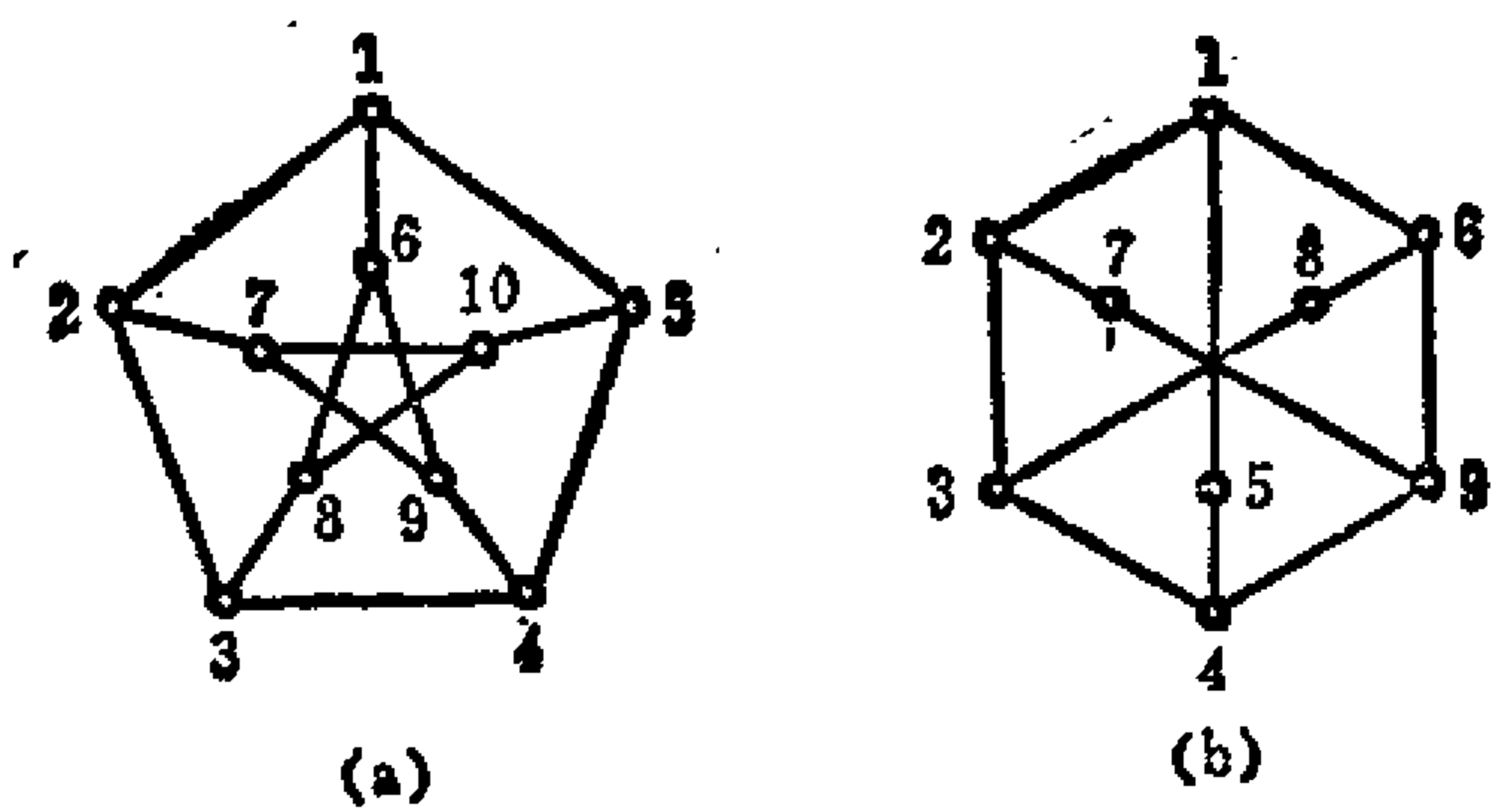


图4-2-11
(a) 非平面图G；(b) G的子图

下面证明，一个非平面图 G' 一定要包含与两个基本非平面图之一同胚的子图。考虑非平面图 G' 的这样一个不可分子图 G'' ，它也是非平面图，但从 G'' 中删除任一条边，都能使它成为平面的。容易看出，这样的子图在任何一个非平面图中总可以找到。现在，我们取一个线图 G ，它与 G'' 同胚，并且其中没有串联边。显然，如果在 G 中包含一个与基本非平面图之一同胚的子图，那么 G'' 和 G' 一定也包含和这个基本非平面图同胚的子图。因此，我们在证明定理 4-2-1 的第二部分时，只需要考虑一个不可分线图 G 即可。

考虑线图 $G(\bar{e})$ ，它是由 G 删除边 e 得到的一个子图。因为 $G(\bar{e})$ 是平面的，所以 $G(\bar{e})$ 可画在一个平面上，其中没有交叉边。设边 e 的端点是 u 和 v 。在这个平面图形中，存在包含顶点 u ，

v 的最大回路 C ，使得其他任何包含 u, v 的回路都在 C 的内部。回路 C 把 $G(\bar{e})$ 分成 G_0 和 G_1 两部分，其中 G_0 由所有画在 C 外边的边组成， G_1 由所有画在 C 内部的边组成，如图 4-2-12 所示。因此 $G(\bar{e}) = G_0 \cup G_1 \cup C$ ，其中 G_0, G_1 和 C 无重边。

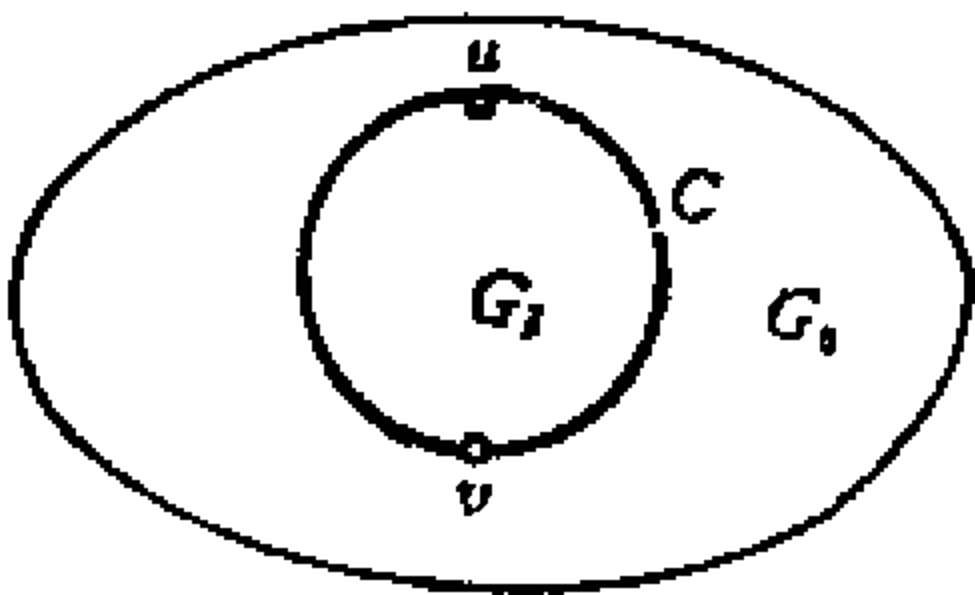


图 4-2-12 回路 C 和子图 G_0, G_1

假定我们从顶点 p 开始，按顺时针方向画回路 C 时，经过顶点的顺序为 $p, r_1, r_2, \dots, r_k, q, r_{k+1}, \dots, r_n$ ，再回到 p 。我们把这些顶点分成三部分，一部分由顶点 r_1, r_2, \dots, r_k 组成，另一部分由 r_{k+1}, \dots, r_n 组成，第三部分为顶点 p 和 q 。为了方便，用记号 $[p, q]$ 来表示第一部分顶点的集合，即 $[p, q] = (r_1, r_2, \dots, r_k)$ 。类似地， $[q, p] = (r_{k+1}, \dots, r_n)$ 。注意， (p, q) 表示由 p 和 q 这两个顶点组成的集合。采用这些记号后， C 中所有的顶点可以表示为 $[p, q] \cup [q, p] \cup (p, q)$ ，并且，在集合 $[p, q], [q, p]$ 和 (p, q) 中，任意两个集合无公共顶点。

由于 G 是非平面图，所以在图 4-2-12 所示 $G(\bar{e})$ 的平面图形中，我们不可能在 C 的外部再加一条以 u, v 为端点的边 e ，而不与其他边相交。因此，在 G_0 中必然有一条由 $[v, u]$ 中顶点 a 到 $[u, v]$ 中顶点 b 的路径 P_0 。同样，在 G_1 中必然有一条由 $[v, u]$ 中顶点 c 到 $[u, v]$ 中顶点 d 的路径 P_1 ，如图 4-2-13 所示。根据顶点 c 和 d 的不同位置，可能出现以下几种情形。

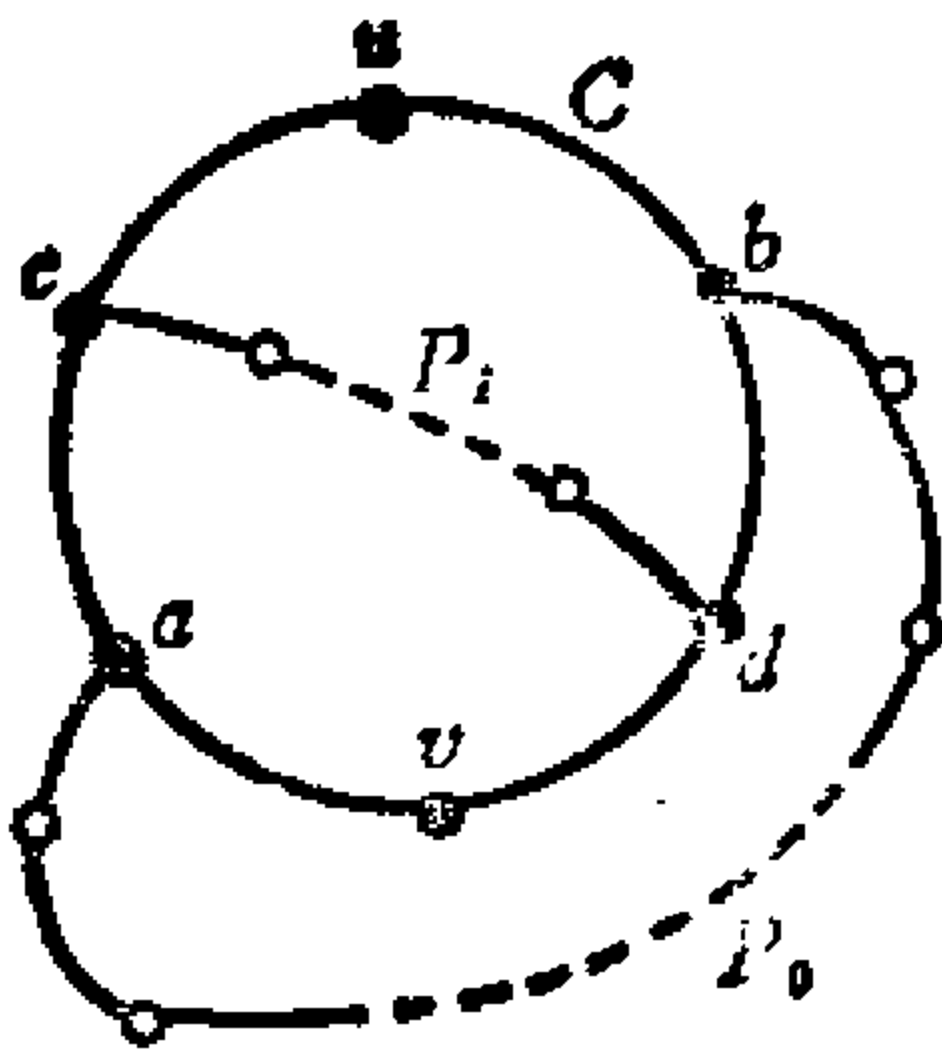


图 4-2-13 路径 P_0 和 P_1

情形 1 假定 $c \in [a, u], d \in [b,$

$v]$, 如图4-2-13所示, 显然由 C , P_0 , P_i 和边 e 组成的子图与基本非平面图 G_1 同胚. 当 $c \in [v, a]$, $d \in [u, b]$ 时, 这个结论也成立.

情形 2 假定 $c \in [a, u]$, $d \in [u, b]$, 如图4-2-14所示. 为了防止出现 $G(\bar{e})$ 的一种新的画法, 其中 P_i 和 P_0 都在 C 的外部而无相交的边, 必然有如图4-2-15(a)所示的一条路径 P_1 . 注意, P_1 是从 $[b, a]$ 中的一个顶点 e , 到 P_i 中异于 c, d 的顶点 f 的路径.

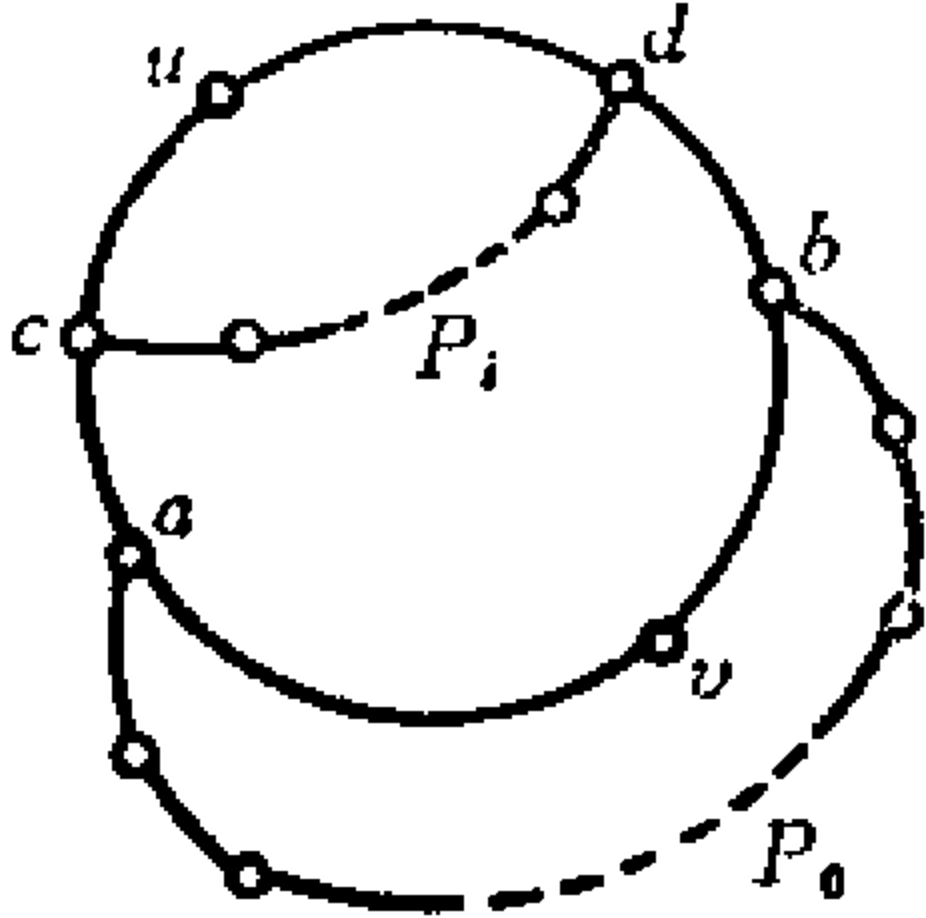


图4-2-14 情形 2 中的 $G(\bar{e})$

当然我们也可以添加图4-2-15(b)所示的路径 P_1 , 来得到同样的结果, 但所得的图中有一个回路 C' , 它包含顶点 u, v , 并且在回路 C 的外部, 这与每一个包含顶点 u, v 的回路都在回路 C 内部的假设矛盾. 因此, 在这种情形下, 只需要考虑图4-2-15(a)所示的结构.

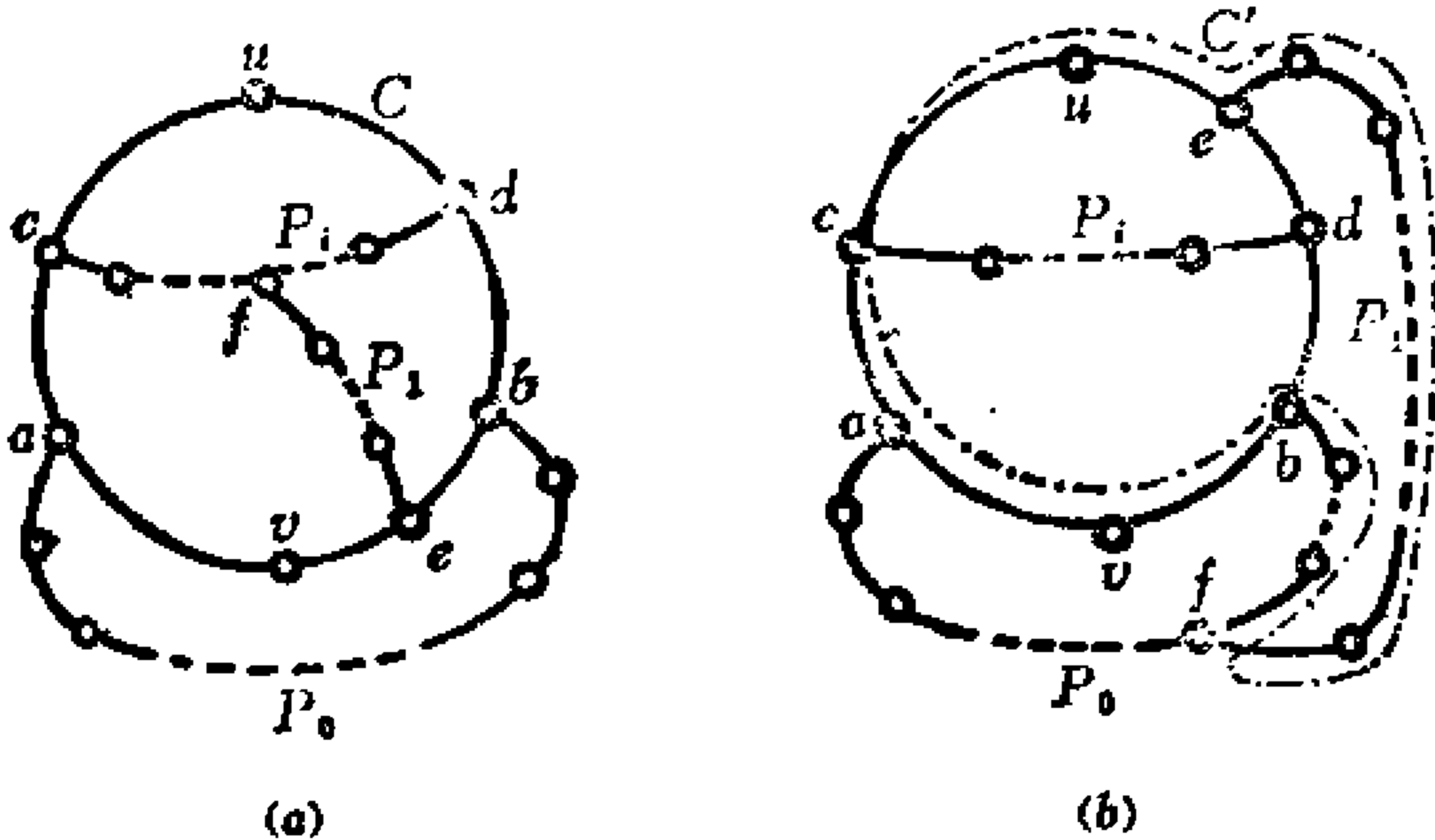


图4-2-15 P_1 的位置
(a) 路径 P_1 , (b) 回路 C'

图4-2-15(a)所示的线图加上边 e , 包含一个如图4-2-16所

示的子图，它与 G_B 是同胚的。对 $e = v$ 和(或) $c = a$ ，这一结论也成立。由于对称性，当 $c \in [v, a]$ ， $d \in [b, v]$ 时，也得到相同的结论。注意，我们已经包括了 $c = a$ 或者 $b = d$ 的情形。而如果既有 $c = a$ ，又有 $b = d$ ，则是下一种情形。

情形 3 为了完成证明，需要考虑的最后一种情形是 $c = a$ ， $b = d$ 。在这种情形下，如图 4-2-17 所示，如果没有另一条路径 P_2 ，则图 4-2-15(a)中的线图可以重画，使得 P_i （以及 P_0 ）在 C 的外部。因此路径 P_2 必然存在。

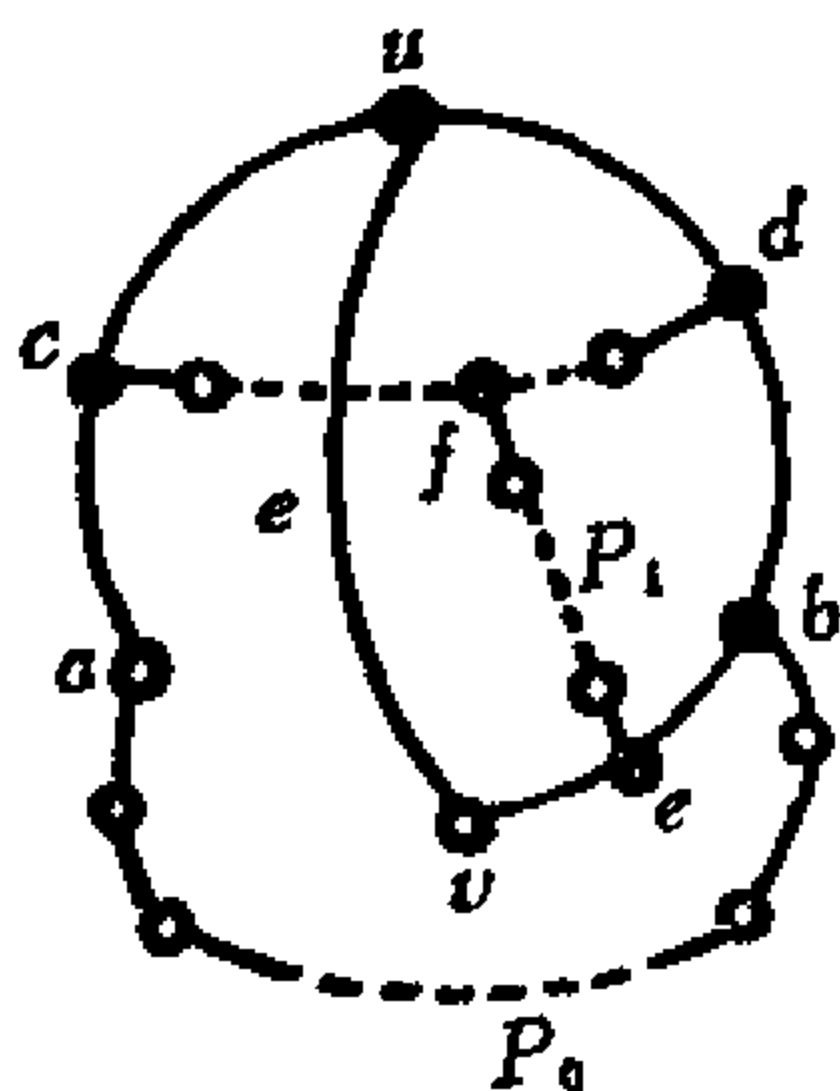


图4-2-16 非平面子图

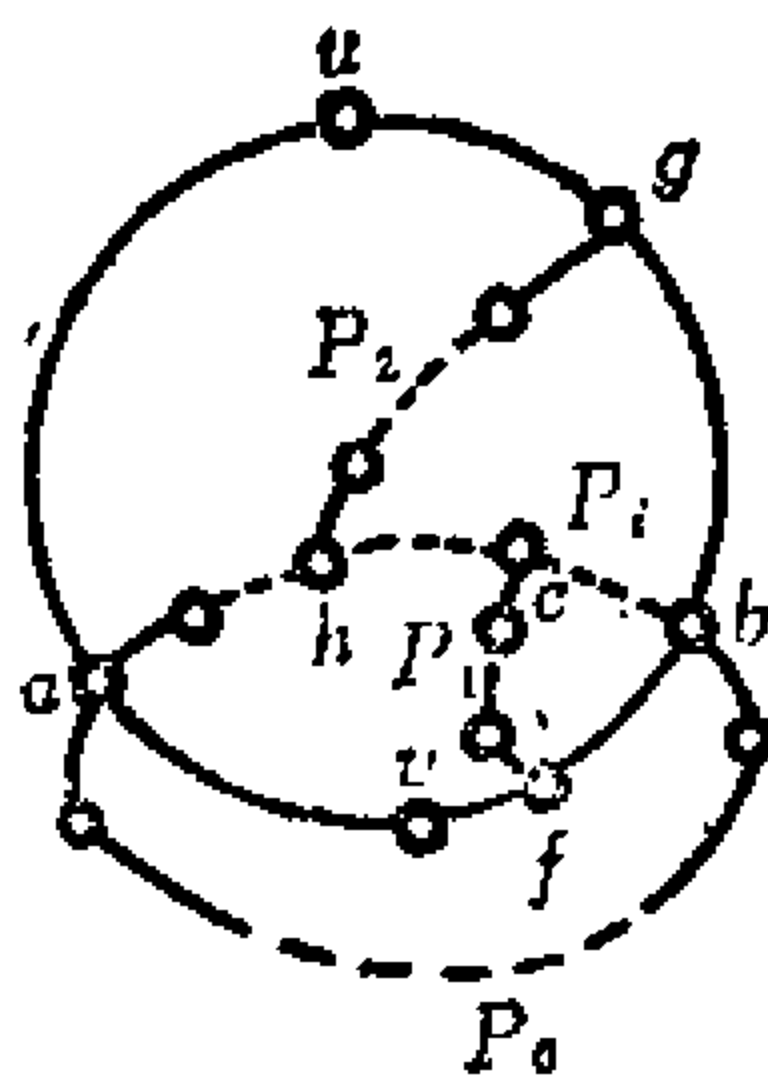


图4-2-17 P_2 的位置

在这个线图中加上边 e ，根据 P_2 的不同位置，图 4-2-18 所示的四个线图之一将成为其子图。也就是说，当 $g \in [u, b]$ （这里 f 可以等于 v ， e 可以等于 h ）时，以(a)中的线图为其子图；当 $g \in [a, u]$ （这里 e 可以等于 h ， f 可以等于 v ）时，以(b)中的线图为其子图；当 $g = u$ ，而 $h \neq e$ 时，以(c)中的线图为其子图；当 $g = u$ ， $h = e$ 时，以(d)中的线图为其子图。前三个线图 G_1, G_2, G_3 都同胚于 G_B ，后一个线图 G_4 与 G_A 同胚。这就完成了定理 4-2-1 的证明。 (证毕)

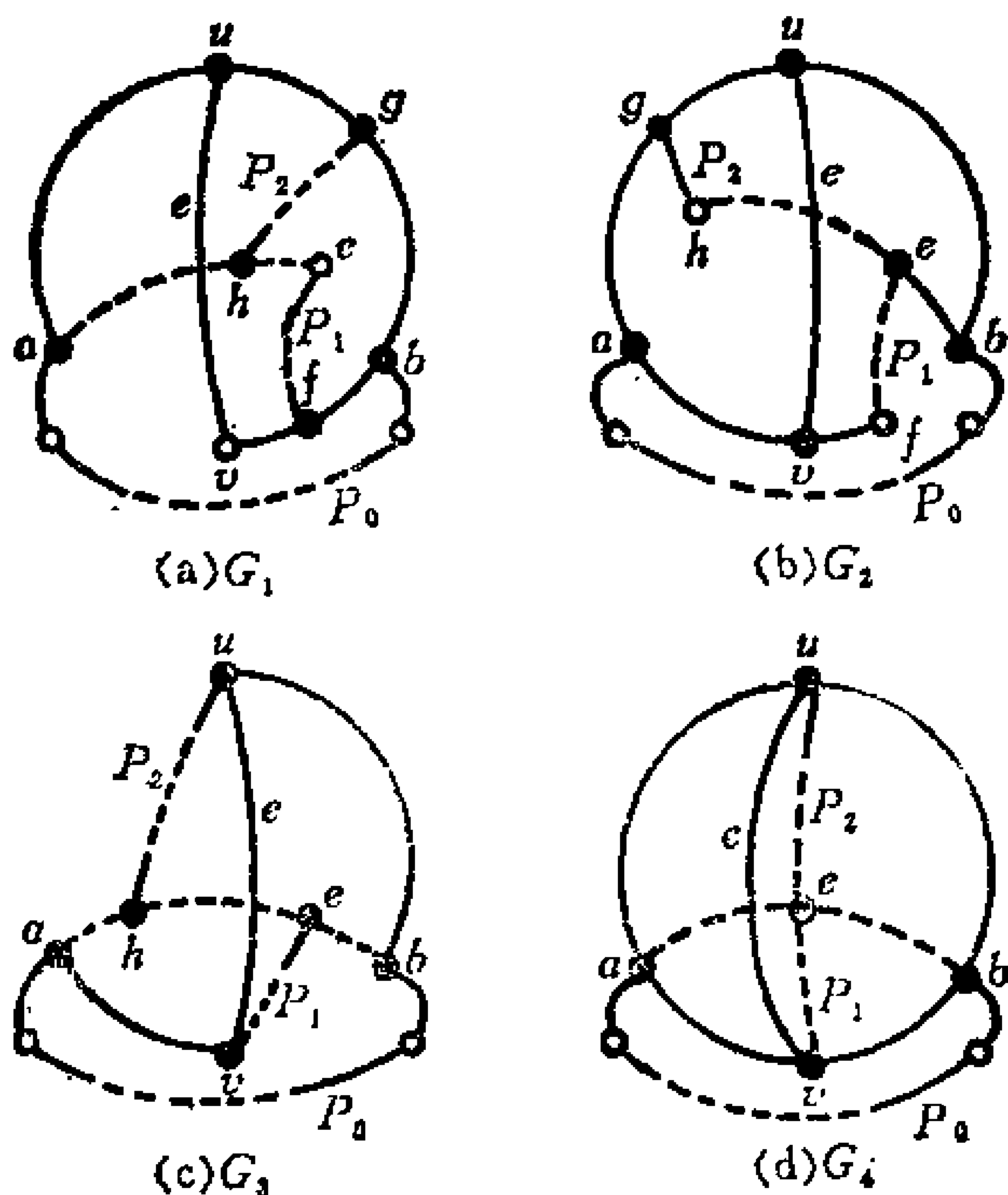


图4-2-18 非平面图 G_1, G_2, G_3, G_4

4-3 对 偶 性

用 4-2 节所讨论的库拉托斯基定理来检验一个线图是否平面图，是相当困难的，因为它需要考察 5 阶以上的全部子图。而惠特尼给出对偶性性质，保证了当一个给定的线图是平面时，另一个线图也存在。因此，对于某些应用问题来说，用惠特尼定理来判断平面图可能比较容易。为了学习惠特尼的对偶性定理，我们定义线图的零度如下。

定义4-3-1 线图 G 的零度 N 是

$$N = n_e - n_v + \rho \quad (4-3-1)$$

这里 n_e 是 G 的边数, n_v 是顶点数, ρ 是最大连通子图的数目.

根据定义2-2-1, 一个线图的秩 R 是

$$R = n_v - \rho \quad (4-3-2)$$

因此零度 N 可表示为

$$N = n_e - R \quad (4-3-3)$$

由此等式可以看出, 一个线图 G 的零度和秩的和等于 G 的边数.

$$N + R = n_e \quad (4-3-4)$$

例如, 图 4-2-11(a) 所示线图 G 由15条边和10个顶点组成, 并且是连通的, 因此 G 的零度是6. 注意, 由定理3-3-5, 一个线图中线性无关的回路个数也是 $n_e - n_v + \rho$, 它等于该线图回路矩阵的秩. 因此, 一个线图的零度就是此线图回路矩阵的秩.

在对偶图的讨论中, 我们必须把自环算作线图上的边.

约定 在这一节中, 线图可以有自环.

考虑两个线图 G_1 和 G_2 , 前者由边 e_1, e_2, \dots, e_n 组成, 后者由 e'_1, e'_2, \dots, e'_n 组成. 对 $p = 1, 2, \dots, n_e$, 我们选取 G_2 中

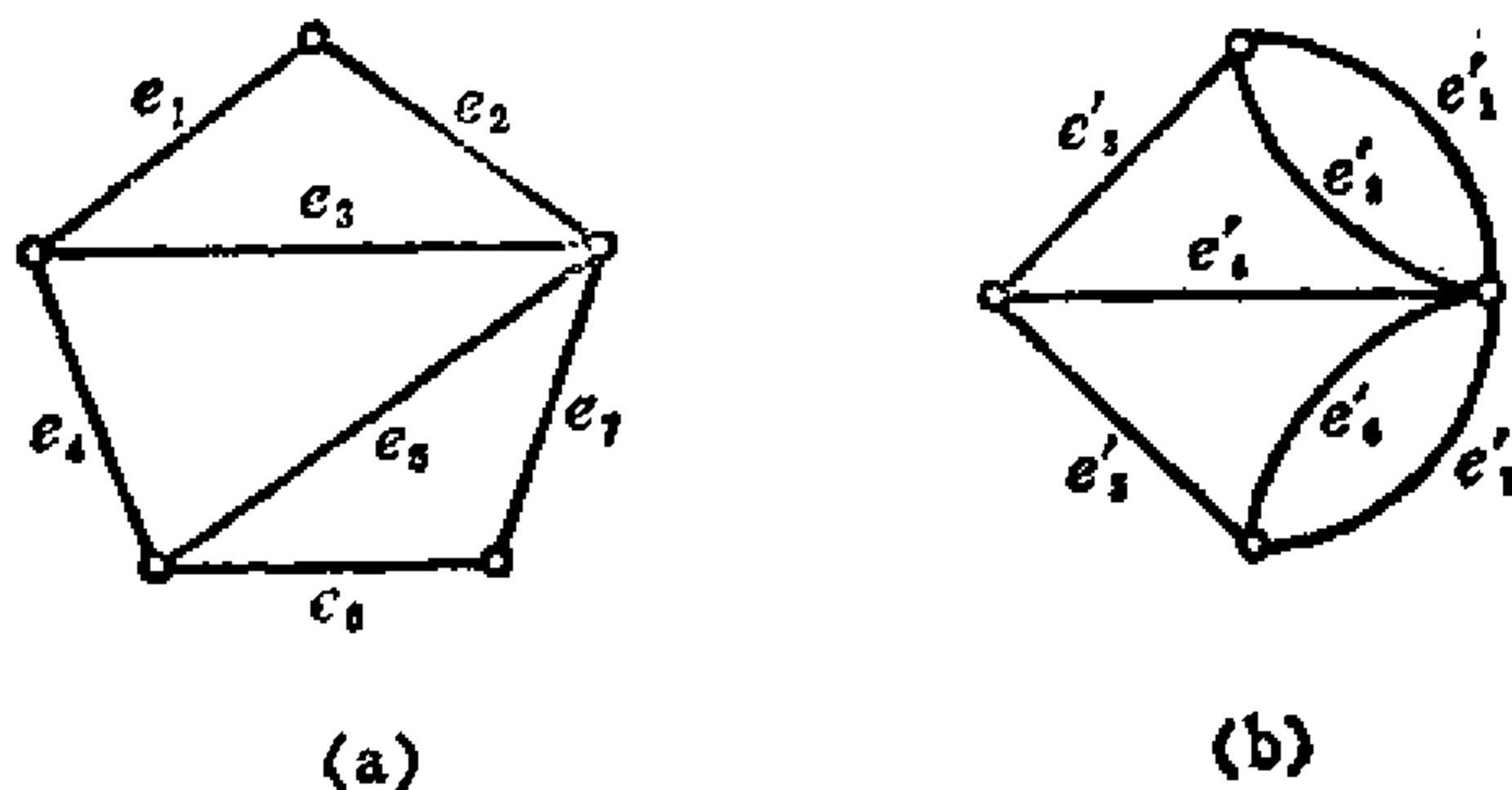


图4-3-1

(a) 线图 G_1 , (b) 线图 G_2

的边 e'_i 作为与 G_1 中的边 e_i 对应的边，于是便得到 G_1 的边和 G_2 的边之间的一个1:1对应。设 g_1 是 G_1 的由边 $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}$ 构成的子图， g_2 是 G_2 的由边 $e'_{i_1}, e'_{i_2}, \dots, e'_{i_k}$ 构成的子图，则称 g_2 为 g_1 的对应子图。另外，为了方便，用符号 \bar{g} 代表一个线图 G 的子图 g 的补图，也就是说， \bar{g} 由 G 中除 g 的边外所有的边和不在 g 中的孤立点组成。

例4-3-1 考虑图4-3-1(a)和(b)中的两个线图 G_1 和 G_2 。假定对 $p=1, 2, \dots, 7$, G_1 的边 e_p 对应于 G_2 的边 e'_p 。又假定我们选取 G_1 的子图 g_1 ，它是由 e_1, e_2, e_3 和 e_5 组成的，如图4-3-2(a)所示。则 G_2 中与 g_1 对应的子图 g_2 如图4-3-2(b)所示。用这些子图，我们可以定义线图的对偶性如下。

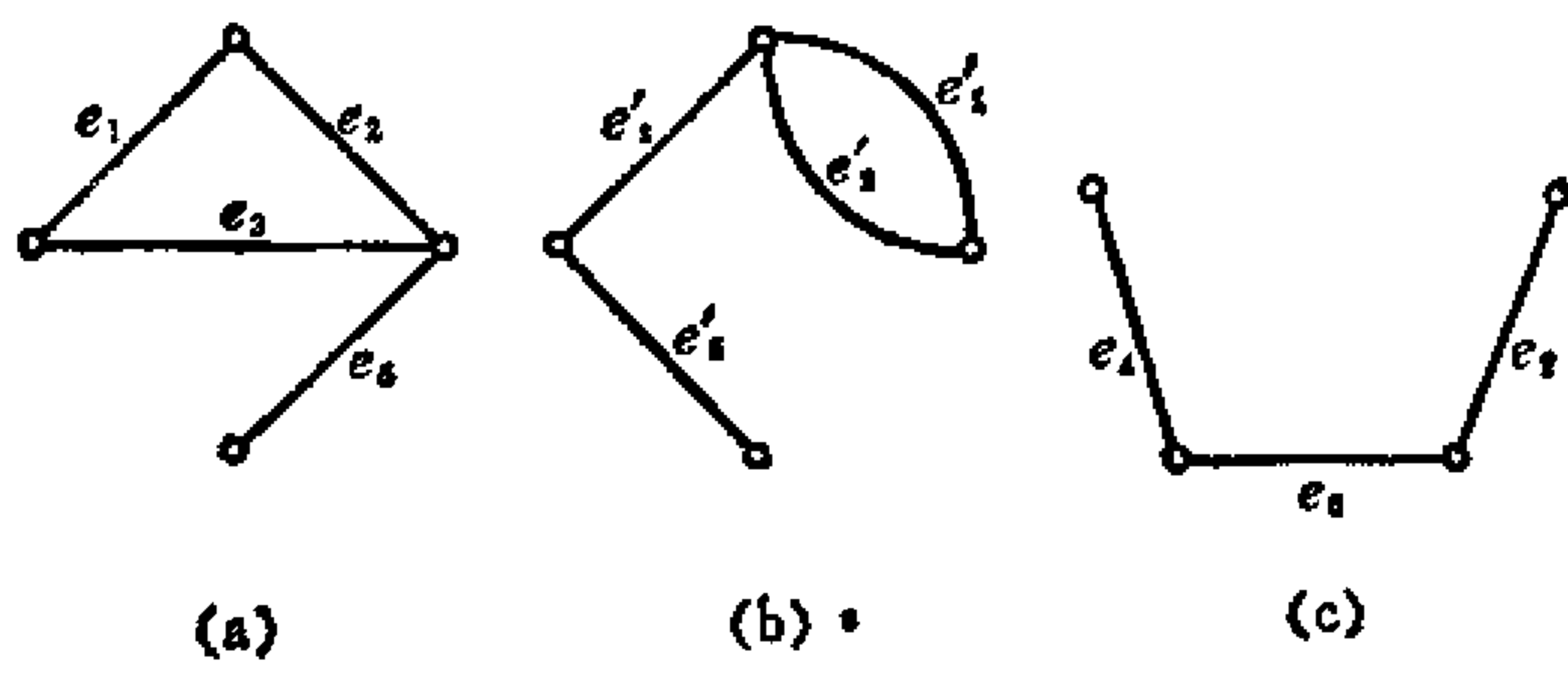


图4-3-2

(a) G_1 的子图 g_1 , (b) G_2 的子图 g_2 , (c) 补图 \bar{g}_1

定义4-3-2 一个线图 G_2 称为线图 G_1 的对偶，如果存在 G_1 和 G_2 的边之间的1:1对应，使得对 G_1 的每一个子图 g_1

$$n_1 = R_2 - \bar{r}_2 \tag{4-3-5}$$

其中 n_1 是 g_1 的零度， R_2 是 G_2 的秩， \bar{r}_2 是 \bar{g}_2 的秩， g_2 是 G_2 中对应于 g_1 的子图，而 \bar{g}_2 是 g_2 的补图。

根据这个定义，如果 $g_2 = G_2$ ，则 \bar{g}_2 是 G_2 的一个不含任何边的子图，因此， \bar{r}_2 是零，并且 $g_1 = G_1$ ，这就意味着 $n_1 = N_1$ (G_1 的零

度)。于是，如果 G_2 是 G_1 的对偶，则据式(4-3-5)，我们有

$$N_1 = R_2 \quad (4-3-6)$$

因为 G_1 和 G_2 的边数都是 n_e ，这里 G_2 是 G_1 的对偶，故式(4-3-6)可以写作

$$n_e - N_1 = n_e - R_2 \quad (4-3-7)$$

由式(4-3-3)，这个等式变成

$$R_1 = N_2 \quad (4-3-8)$$

这样，由式(4-3-6)和(4-3-8)可以看出，如果 G_1 和 G_2 是对偶的，则 $N_1 = R_2$ ， $R_1 = N_2$ 。

设 G_1 的边数是 n_{e_1} ， \bar{g}_1 是 G_1 的子图，它由 n_{e_1} 条边组成。又设

$$n_{e_2} = n_e - n_{e_1} \quad (4-3-9)$$

或

$$n_{e_1} + n_{e_2} = n_e \quad (4-3-10)$$

当 G_2 是 G_1 的对偶时，设 g_2 是 G_2 中与 \bar{g}_1 对应的子图 \bar{g}_2 的补图，则 g_2 的边数是 n_{e_2} 。于是式(4-3-5)变成

$$\bar{n}_1 = R_2 - r_2 \quad (4-3-11)$$

其中 \bar{n}_1 是 \bar{g}_1 的零度， r_2 是 g_2 的秩。此式可以改写成

$$n_e - \bar{n}_1 = n_e - R_2 + r_2 \quad (4-3-12)$$

或由式(4-3-3)和(4-3-10)，

$$n_{e_2} + n_{e_1} - \bar{n}_1 = N_2 + r_2 \quad (4-3-13)$$

把 n_{e_1} 移到等式右边，我们有

$$\bar{r}_1 = N_2 - (n_{e_2} - r_2) \quad (4-3-14)$$

或

$$\bar{r}_1 = N_2 - n_2 \quad (4-3-15)$$

由式(4-3-8)，以上等式变成

$$n_2 = R_1 - \bar{r}_1 \quad (4-3-16)$$

这说明，如果 G_2 是 G_1 的对偶，那么 G_1 是 G_2 的对偶。

对于一个平面图 G_1 ，如果已知平面图 G_2 是 G_1 的对偶，我

们介绍一种构造 G_2 的方法。

定义4-3-3 设有 n 条边的线图 G_1 是一个平面图，它已被画在一个平面上且没有边相交。我们通过以下过程由 G_1 画出一个线图 G_2 ：在 G_1 的每一个区域中画一个顶点，并画出 n 条边，使得其中每一条边刚好和 G_1 中的一条边相交。这种由 G_1 画出 G_2 的过程称为 D 过程，所得到的线图 G_2 叫做从 G_1 经 D 过程得到的线图。

例如，我们可以由图4-3-3中的 G_1 来构造线图 G_2 。首先，在每个区域中分别画一个顶点1，2，3，4，然后画出与边 a 相交的边 a' ，与边 b 相交的边 b' ，等等，如图4-3-4所示。

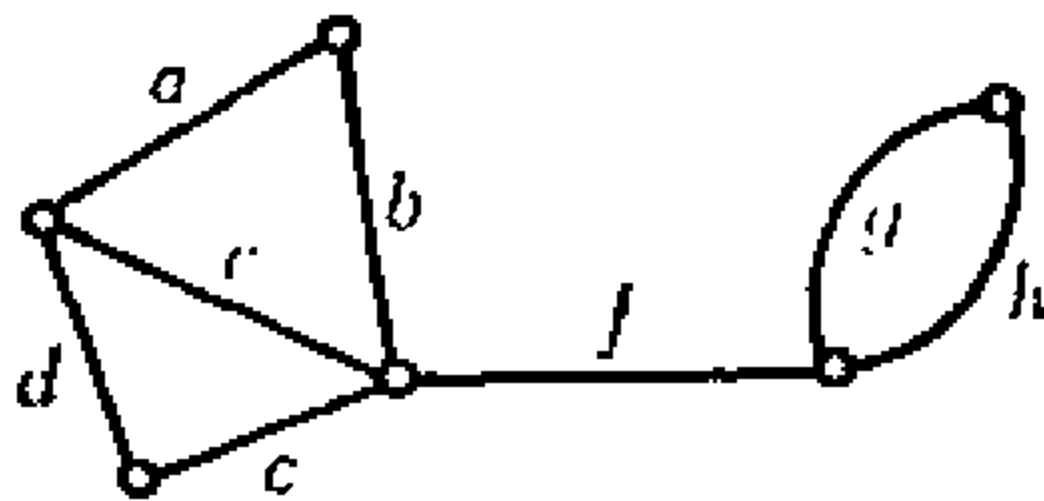


图4-3-3 一个平面图

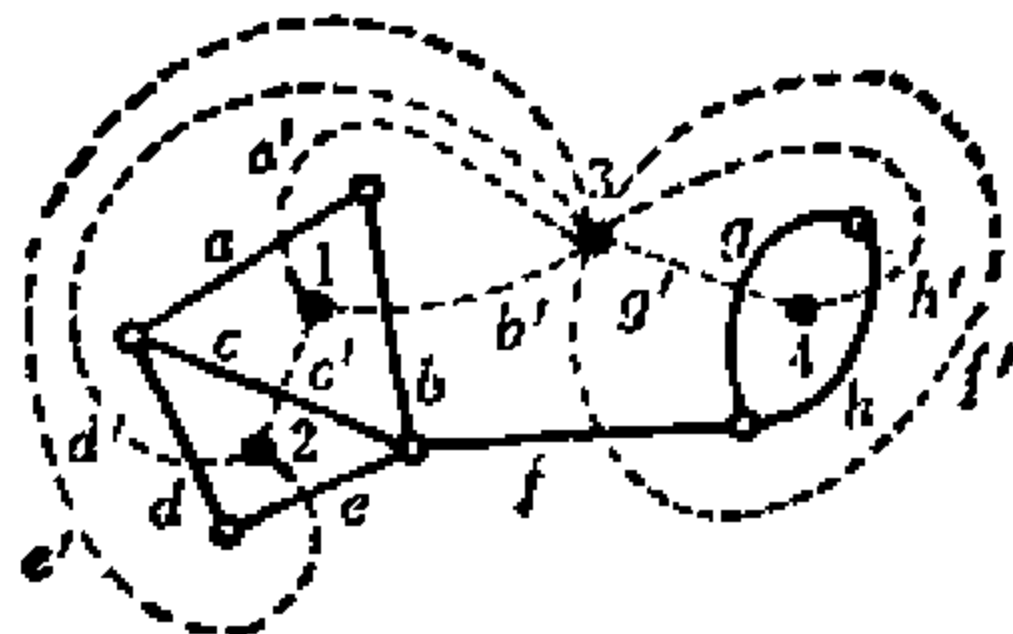


图4-3-4 D 过程

现在，我们要来说明，由一个平面图 G_1 经 D 过程得到的线图 G_2 是 G_1 的对偶。

可以看出，对于一个连通线图 G_1 ，如果 G_2 是由 G_1 经 D 过程得到的，则 G_1 也可以由 G_2 经 D 过程得到。

为了说明从一个有限线图 G ，经 D 过程得到的线图 G' 是连通的，我们考虑 G 在平面 Z 上的一个图形。我们在任一区域 R 内放一个点 v ，而在另一个任意区域 R' 中放一个点 v' 。因为 G 的顶点数是有限的，故可以在 Z 上画一条从点 v 开始到点 v' 为止，且不经过 G 中任一顶点的线 L 。设 e_1, e_2, \dots, e_p 是 G 中与线 L 相交的边，考虑 G' 中对应于 e_1, e_2, \dots, e_p 的边 e'_1, e'_2, \dots, e'_p 组成的线图 g 。显然点 v 和 v' 对应于 g 的顶点 v 和 v' 。因为 L 一个一个地穿过若干区域，我们可以将 g 从顶点 v 到顶点 v' 连续画出

来。我们这样画时，可能在一些边上会有重复，但显然在 G 的两个顶点 v 和 v' 之间存在一条路径。对于 G' 中任意选取的两个顶点，这个结论都成立，因此，由连通图的定义可知， G' 是连通的。

定理4-3-1 由一个线图经 D 过程得到的线图是连通的。

例4-3-2 如图4-3-5所示，在线图 G 中，我们把点 v 和 v' 分别放在区域 R 和 R' 内。然后我们画线 L ，使它不经过 G 的任一顶点。这条线 L 经过边 e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 。在从 G 经 D 过程得到的线图 G' (图4-3-6) 中，与 e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 对应的边是 $e'_1, e'_2, e'_1, e'_2, e'_1$ ，它们构成图4-3-7所示的子图 g' 。这个子图 g' 可以从顶点 v 开始，按照 $e'_1, e'_2, e'_1, e'_2, e'_1$ 的顺序连续画。注意在 e'_2 画了两次。容易看出，在序列 $(e'_1 e'_2 e'_1 e'_2 e'_1)$ 中，存在一个序列 $(e'_1 e'_1 e'_1)$ ，它是顶点 v 和 v' 之间的路径。

通过 D 过程，在一个线图的回路和另一个线图的割集之间建

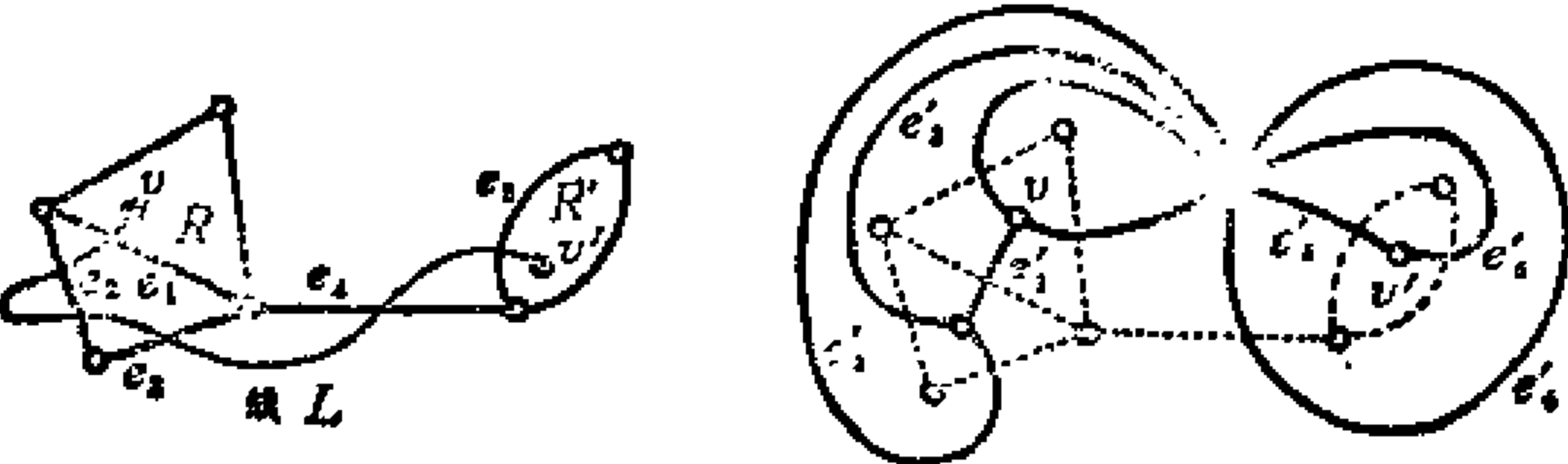


图4-3-5 线图 G 和线 L

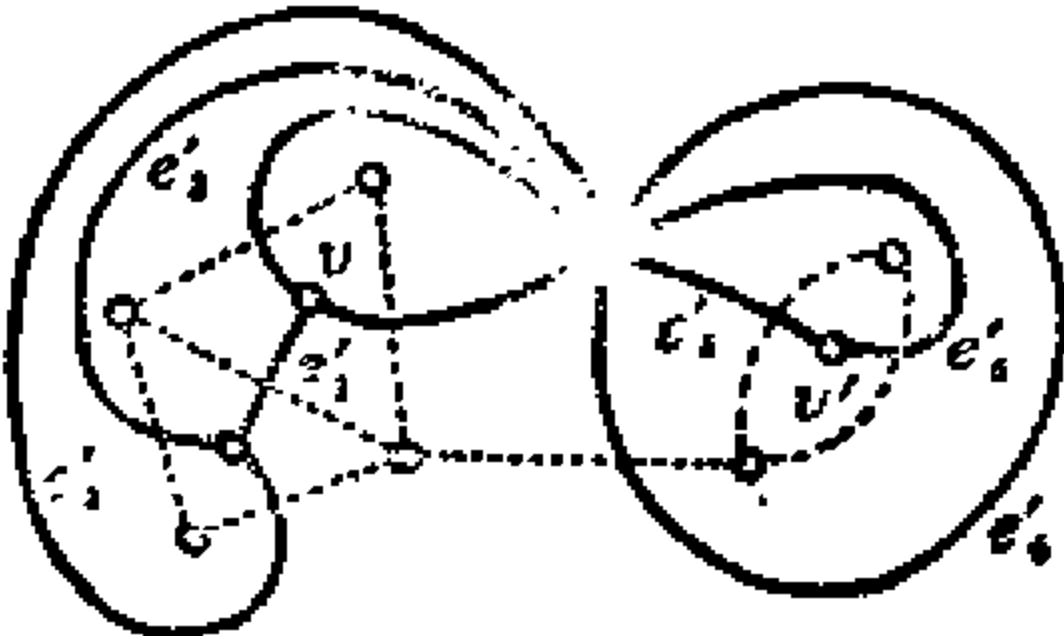


图4-3-6 线图 G'

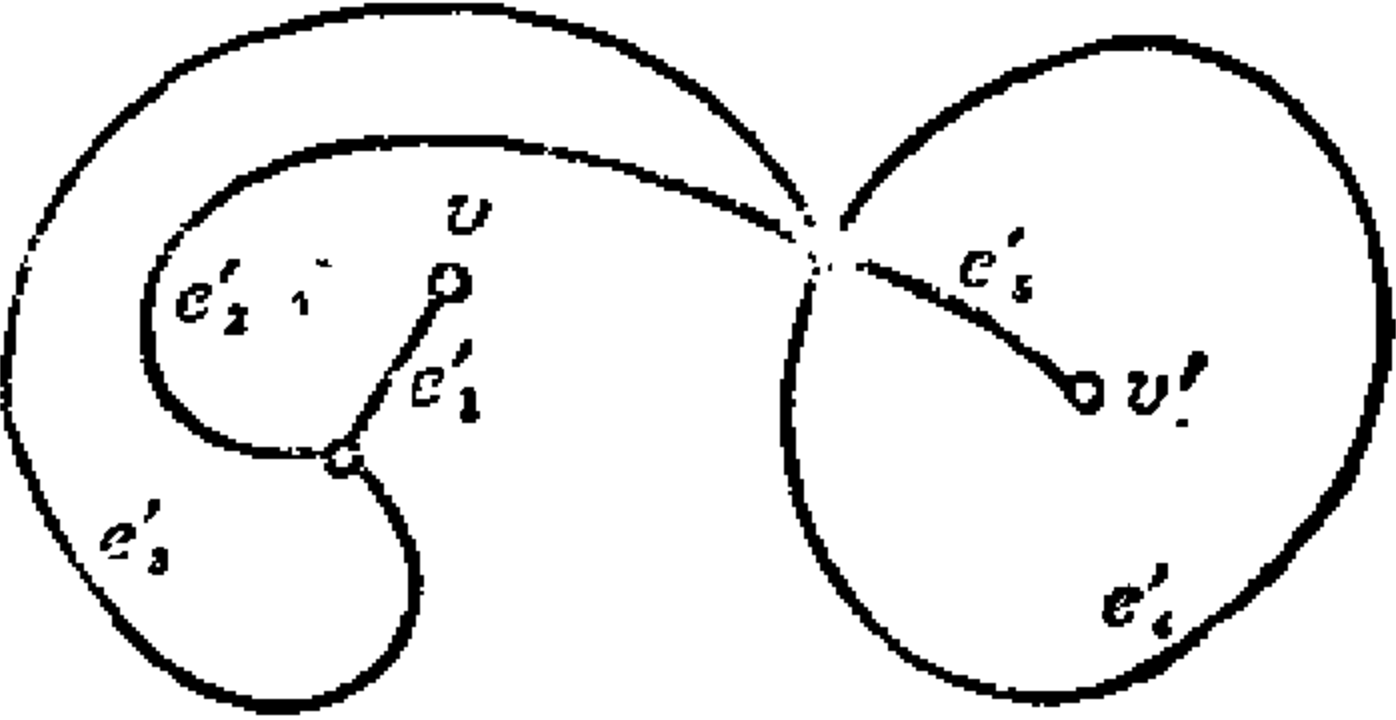


图4-3-7 子图 g'

立了某种联系。

定理4-3-2 设 $C = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ 是 G_1 的一个回路。设 G_2 是从 G_1 经 D 过程得到的线图，则边 e'_1, e'_2, \dots, e'_n 构成 G_2 的一个割集，这里 e'_p 是 e_p 的对应边， $p = 1, 2, \dots, n$ 。

证明： 首先要注意，当我们说 G_2 是从 G_1 经 D 过程得到的时，总是假设 G_1 (和 G_2) 画在一个平面上且没有两条边相交。因此区域是确定的。

设 W_1, W_2, \dots, W_p 是 G_1 的在回路 C 内部的区域。设 v_1, v_2, \dots, v_p 是 G_2 的在区域 W_1, W_2, \dots, W_p 内的顶点。又设 $\Omega_1 = (v_1, v_2, \dots, v_p)$, $\bar{\Omega}_1 = \Omega - \Omega_1$ ，这里 Ω 是 G_2 的所有顶点的集合，则 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 是边 e'_1, e'_2, \dots, e'_n 的集合，这些边与 C 中的边对应。我们知道， $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 或为割集，或为割集的重边并。如果 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 不是割集，则子图 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_1)$ 或子图 $\mathcal{E}(\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 必然是分离的（见2-2节和2-3节）。

考虑 G_1 的一个子图 g_1 ，它由回路 C 中的边 e_1, e_2, \dots, e_n 和位于 C 内部的所有边组成，如图4-3-8(a)所示。注意， G_2 中对应于 $g_1 - (e_1, e_2, \dots, e_n)$ 的边构成 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_1)$ ，如图4-3-8(b)

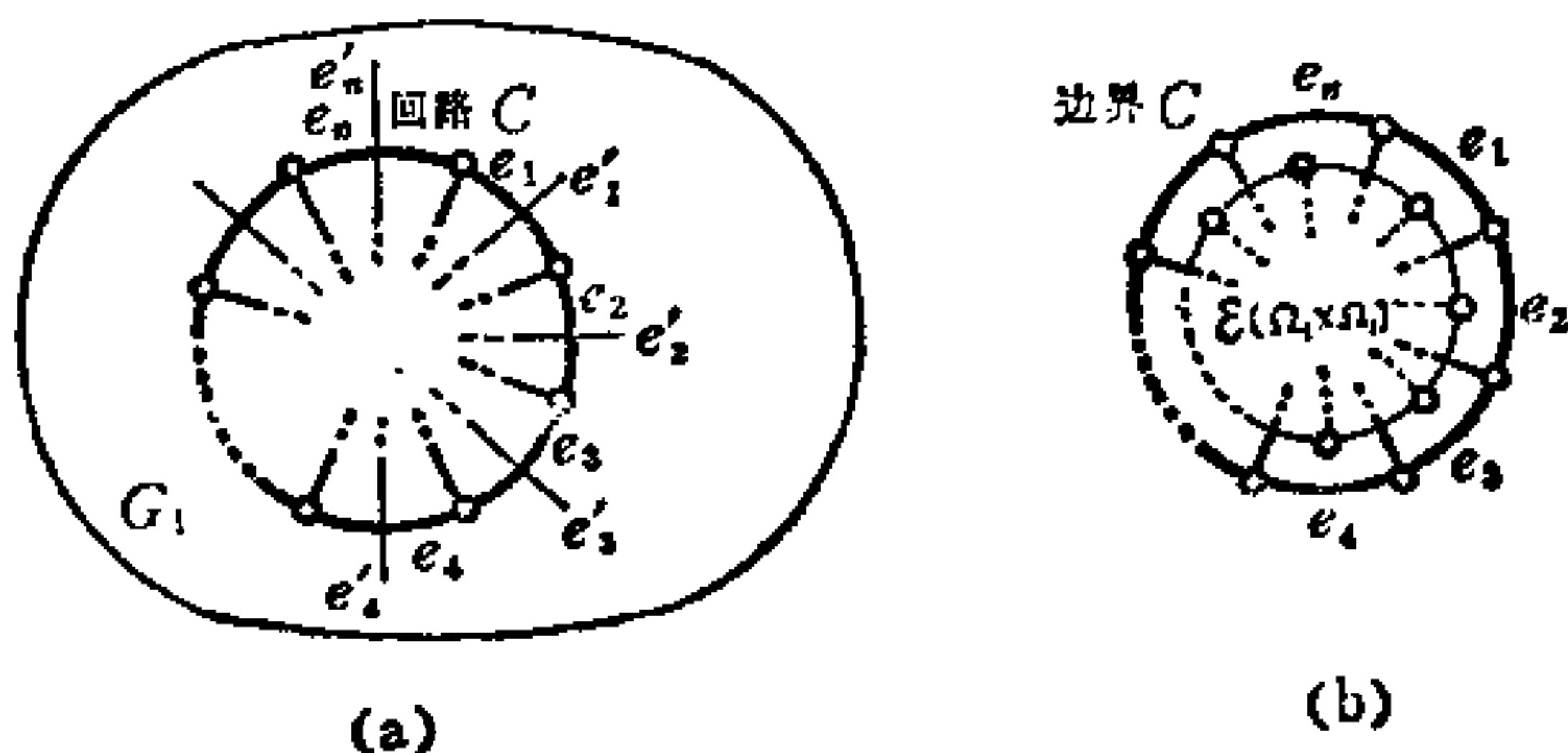


图4-3-8 回路 C 和割集 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$

(a) 线图 G_1 和 G_2 , (b) g_1 和 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_1)$

所示。设 g_i 是在 G_1 中短路 C 的所有边 e_1, e_2, \dots, e_n 得到的线图。我们可以把 g_i 的边界（即回路 C ）看作一个顶点，想象出 g_i 。可以看出， $\mathcal{G}(\Omega_1 \times \Omega_1)$ 也是从 g_i 经 D 过程得到的线图。因此，由定理4-3-1， $\mathcal{G}(\Omega_1 \times \Omega_1)$ 是连通的。同样，线图 $\mathcal{G}(\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 也是连通的。因此 $\mathcal{G}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 是一个割集。（证毕）

定理4-3-3 设 $S = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ 是 G_1 的一个割集。又设 G_2 是从 G_1 经 D 过程得到的线图，则 G_2 中与 S 的边 e_1, e_2, \dots, e_n 对应的边 e'_1, e'_2, \dots, e'_n 构成一个回路。

证明： 若 G_1 是连通的，则结论是显然的。假设 G_1 是分离的，则如图4-3-9(a)和(b)所示，我们可以看出，在由 G_1 经 D 过程得到 G_2 以后，再由 G_2 经 D 过程得到的 G'_1 有一些割点，适当地切开这些割点， G'_1 就变成了 G_1 。在这种情况下， G'_1 的割集也就是 G_1 的割集。（证毕）

从上面两个定理，可以看出

$$R_1 = N_2 \quad (4-3-17)$$

其中 R_1 是 G_1 的秩， N_2 是由 G_1 经 D 过程得到的线图 G_2 的零度。

定理4-3-4 从 G_1 经 D 过程得到的平面图 G_2 是 G_1 的对偶图。

证明： 假定我们短路 G_1 的一条边 e ，得到一个线图 g'_1 ，那么，删除 G_2 中与边 e 对应的边 e' ，所得的图与从 g'_1 经 D 过程得到的图完全相同。一般地说，假定 \mathcal{K}_1 是 G_1 的一个子图， \mathcal{K}_2 是 G_2 中的

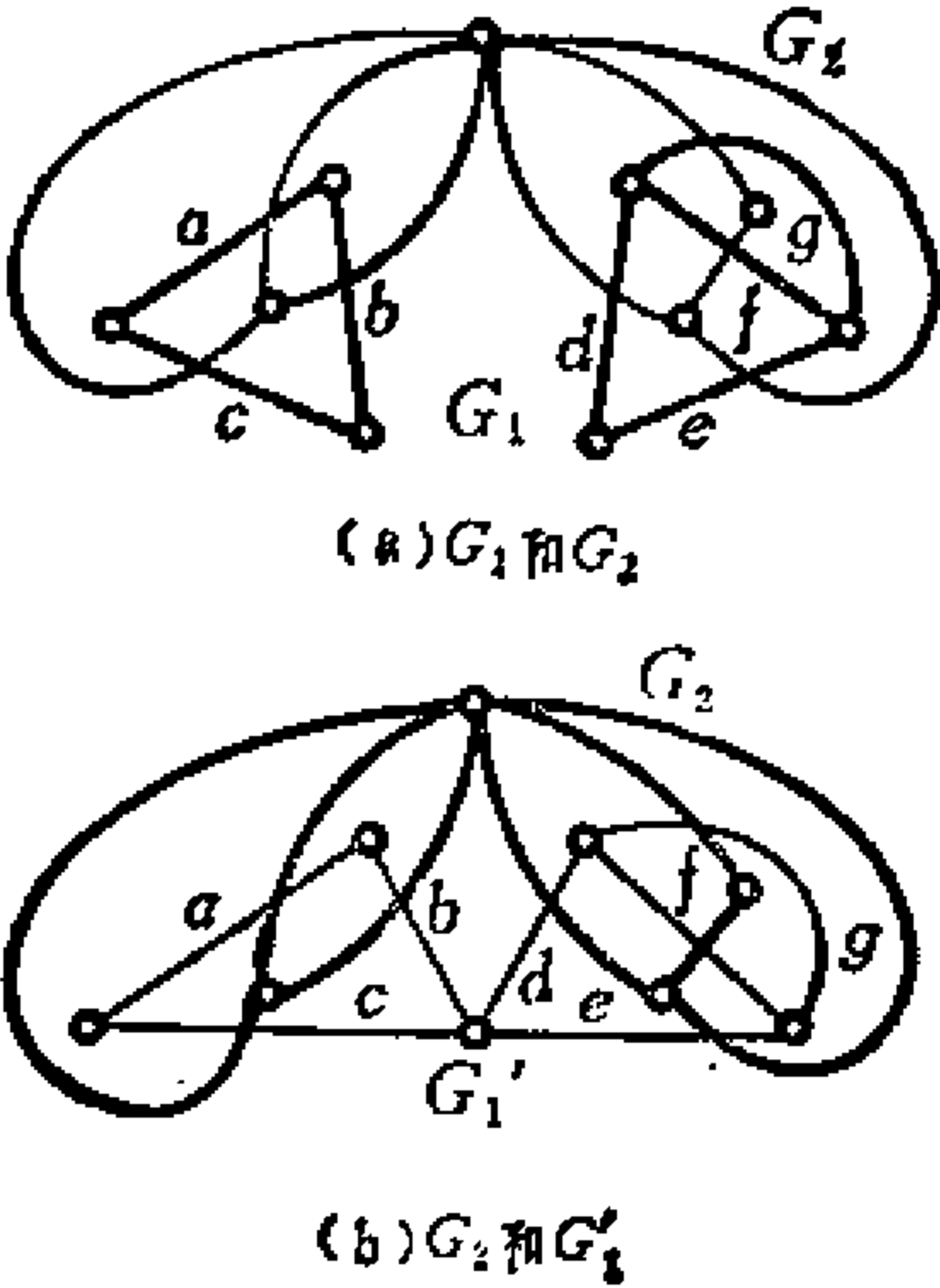


图4-3-9

(a) G_1 和 G_2 ; (b) G_2 和 G'_1

对应子图。注意， G_1 和 G_2 都已按照 D 过程的结果画在平面上了。如果我们短路 \bar{e}_1 的所有边得到 g'_1 ，则从 G_2 中删除 \bar{e}_2 的所有边，所得图的零度恰与由 g'_1 经 D 过程得到的图相同。

设 G_1 的秩是 R_1 ， \bar{e}_1 的秩是 \bar{r}_1 ，则 g'_1 的秩等于 $R_1 - \bar{r}_1$ 。由式 (4-3-17)，这个秩等于 g_2 的零度 n_2 (g_2 是由 G_2 删除 \bar{e}_2 的所有边得到的线图)，即

$$n_2 = R_1 - \bar{r}_1 \quad (4-3-18)$$

此式对于 G_1 的任何子图 \bar{e}_1 都成立。注意 g_2 是 \bar{e}_2 的补图。因此由定义， G_1 是 G_2 的对偶，而 G_2 是 G_1 的对偶。 (证毕)

由定理 4-3-4，我们知道， D 过程给出一个对偶图。下一个重要的问题是：是否任何对偶图都可以由 D 过程得到。从定理 4-3-1 中，我们已经发现，由 D 过程得到的对偶图是连通的。因此，如果存在（一个线图的）对偶图，它是分离的，则此图不可能由 D 过程得到。我们知道，这样的线图是存在的。例如，如果我们选取一个分离线图 G ，并由 D 过程得到一个线图 G' ，则 G 和 G' 对偶。这样， G 是 G' 的对偶图，而 G 是分离的。所以上一个问题的答案是否定的。因为存在这样的对偶图，它不可能由 D 过程得到。但是，我们将会发现，在一个线图 G 的由 D 过程得到的对偶图和 G 的其他任意对偶图之间有一种关系。不过，我们首先要讨论的是，当一个线图的某些边被短路时，对其零度的影响。

定理 4-3-5 设 C 是线图中的一个回路，短路 C 中一部分边而不是全部边，将不改变线图的零度，而短路 C 的全部边恰使零度减少 1。

因为本章允许有自环，这里所谓短路一条边 e ，意思是指将 e 的两个端点重合且只删去边 e 。

证明： 设 G_c 是由 G 短路 C 中的边得到的线图。又设 n_c 和 n_{cc} 分别是 G 和 G_c 的边数， n_v 和 n_{vc} 分别是 G 和 G_c 的顶点数，应该注意，只要 C 本身不是一个最大连通子图，短路 C 的一些边不会改变

最大连通子图的个数。假定我们短路 C 中的 k 条边，这里 k 小于 C 的边数 n ，则在所得的图 G_s 中，

$$n_{se} = n_e - k \quad (4-3-19)$$

$$n_{sv} = n_v - k \quad (4-3-20)$$

于是 G_s 的零度是

$$n_{se} - n_{sv} + \rho = n_e - n_v + \rho \quad (4-3-21)$$

这就证明了定理的第一部分。

假定我们短路 C 的全部 n 条边，则在所得的图 G_s 中，

$$n_{se} = n_e - n \quad (4-3-22)$$

且当 C 不是一个最大连通子图时，

$$n_{sv} = n_v - n + 1 \quad (4-3-23)$$

于是 G_s 的零度是

$$n_{se} - n_{sv} + \rho = n_e - n_v + \rho - 1 \quad (4-3-24)$$

它正好比 G 的零度少 1。

当 C 本身是一个最大连通子图时，短路 C 中的所有边使

$$n_{sv} = n_v - n \quad (4-3-25)$$

但最大连通子图的数目也要减少 1，因此 G_s 的零度是

$$n_{se} - n_{sv} + \rho - 1 = n_e - n_v + \rho - 1 \quad (4-3-26)$$

它也比 G 的零度少 1。 (证毕)

定理 4-3-6 设 G 和 G' 对偶。设 e 是 G 中的一条边， e' 是 G' 中的对应边。又设 G_s 是由 G 短路边 e 得到的线图， G'_s 是由 G' 删除边 e' 得到的线图，则 G_s 和 G'_s 对偶。

证明： 考虑 G 中仅由边 e 组成的子图 g 。因为 G 和 G' 对偶，以下等式必成立：

$$n = R' - \bar{r}' \quad (4-3-27)$$

其中 n 是 g 的零度， R' 是 G' 的秩， \bar{r}' 是 G'_s 的秩。若 e 是一个自环，则 g 的零度 $n=1$ 。因此由式 (4-3-27)， G'_s 的秩必然比 G' 的秩少 1。如果 e 不是一个自环，则 g 的零度 $n=0$ 。因此 G' 的秩

和 G' 的秩相同。由这个结果，下面我们可以证明 G 和 G' 对偶。设 g 是 G 的一个子图。假定 g 包含边 e 。设 g_e 是由 g 短路边 e 得到的， g'_e 是 G' 中对应于 g_e 的子图。现在我们要确定下式是否成立：

$$n_e = R'_e - \bar{r}'_e \quad (4-3-28)$$

注意 n_e 是 g_e 的零度， R'_e 是 G'_e 的秩，而 \bar{r}'_e 是 g'_e 的补图 \bar{g}'_e 的秩。

假定 e 是一个自环。因为 \bar{g}'_e 是 G' 中对应于 g 的子图的补图，故 G' 中子图 \bar{g}'_e 与 G'_e 中的 \bar{g}'_e 相同。因此秩 \bar{r}'_e 就是 \bar{g}'_e 的秩 \bar{r}' 。另一方面，由于 e 是自环， G'_e 的秩 R'_e 比 G' 的秩 R' 少1。于是 $R'_e - \bar{r}'_e$ 比 $R' - \bar{r}'$ 少1。由定理4-3-5，由于 e 是自环， g_e 的零度 n_e 比 g 的零度少1。因此式(4-3-28)成立。

若 e 不是自环，则由上面的结果， G'_e 的秩 R'_e 与 G' 的秩相同。并且由定理4-3-5， g_e 的零度 n_e 与 g 的零度相同。因此，当 e 不是自环时，式(4-3-28)也成立。所以我们作出结论，对于任何由 g 短路其中的边 e 所得的 g_e ，式(4-3-28)都是对的。但是，对 G 的任一子图 g_e ，显然存在 G 的一个子图 g ，使得(1) g 包含边 e ，(2) g 短路边 e 就变成 g_e 。因此式(4-3-28)对 G 的任何子图 g_e 都成立。故 G 和 G' 对偶。 (证毕)

定理4-3-7 设 G 和 G' 对偶，则 G 的一个回路对应于 G' 的一个割集。

注意，由定理4-3-2，如果 G' 是从 G 经 D 过程得到的线图，则 G 的一个回路对应于 G' 的一个割集。本定理强调的这一性质对任意两个互相对偶的线图都成立。

证明： 假定我们令 g 等于 G 中的回路 C 。我们要说明 g 的对应子图 g' 是 G' 中的割集。设 G_e 是由 G 短路 g 中所有边得到的图， G'_e 是由 G' 删除 g' 的所有边得到的图。据定理4-3-5，

$$N - 1 = N_e \quad (4-3-29)$$

其中 N 是 G 的零度， N_e 是 G_e 的零度。

连续运用定理4-3-6, 容易说明 G_1 和 G'_0 是对偶的, 因此,

$$N_1 = R'_0 \quad (4-3-30)$$

这里 R'_0 是 G'_0 的秩. 因为

$$N = R' \quad (4-3-31)$$

故式(4-3-29)表明, G'_0 的秩比 G' 的秩少1. 这就意味着, 删除 g' 的所有边将使 G' 的秩减少1.

如果我们取 g 为回路 C 的一个真子图, 则由定理4-3-5, G_1 的零度与 G 的零度相同. 因此式(4-3-29)和(4-3-30)说明, 如果删除与回路 C 中的边对应的一部分而不是全部边, G' 的秩不会减少. 于是据割集的定义, G' 里对应于 G 中一个回路的边组成 G' 的一个割集. (证毕)

现在我们已经作好准备, 可以来研究作为其他线图对偶的线图所具有的一个重要性质.

定理4-3-8 若 G_1 是 G' 的对偶, 则 G_2 是 G' 的对偶, 当且仅当 G_1 和 G_2 是2-同构的.

证明: 假定 G_2 是 G' 的对偶, 则在 G_2 的边和 G' 的边之间存在一个1:1对应, 使得 G_2 的回路对应于 G' 的割集. 因为在 G_1 的边和 G' 的边之间也有一个1:1对应, 使得 G_1 的回路对应于 G' 的割集, 所以我们可以作 G_1 的边和 G_2 的边之间的一个1:1对应, 使得在 G_1 的回路和 G_2 的回路之间得到一个1:1对应. 这就证明了定理的第一部分.

下面, 假定 G_1 和 G_2 是2-同构的. 因为 G_1 和 G' 对偶, 对 G_1G' 任一子图 g_1 , 式(4-3-5)成立, 也就是

$$n_1 = R' - \bar{r}' \quad (4-3-32)$$

其中 n_1 是 g_1 的零度, R' 是 G' 的秩, \bar{r}' 是 G' 中 g_1 的对应子图 g' 的补图的秩. 因为 G_1 和 G_2 是2-同构的, 在 G_1 的边和 G_2 的边之间存在一个1:1对应, 使得 G_1 的回路对应于 G_2 的回路. 因此存在 G_2 的一个由 g_1 的对应边构成的子图 g_2 . 显然 g_2 的零度 n_2 等于 g_1 的

度 n_1 。又显然 g' 是 g_2 的对应子图。于是我们有

$$n_2 = R' - \bar{r}' \quad (4-3-33)$$

这就证明了 G_2 和 G' 是对偶的。

(证毕)

例4-3-3 考虑如图4-3-10所示的线图 G 。 G 的对偶图 G_1 是由 D 过程得到的,如图4-3-11(a)所示,它可以被重新画成4-3-11(b)的样子。图4-3-12所示的线图 G_2 也是 G 的一个对偶。我们可以看出, G_1 和 G_2 是2-同构的。

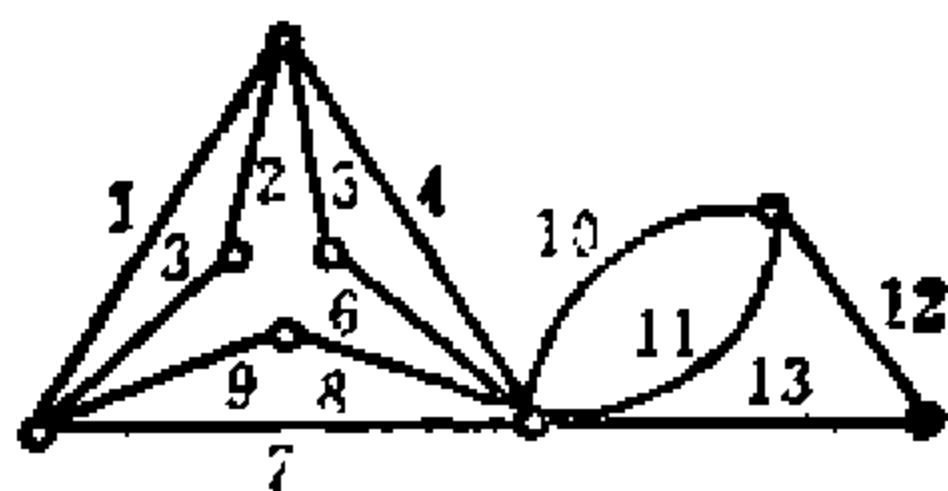


图4-3-10 线图 G

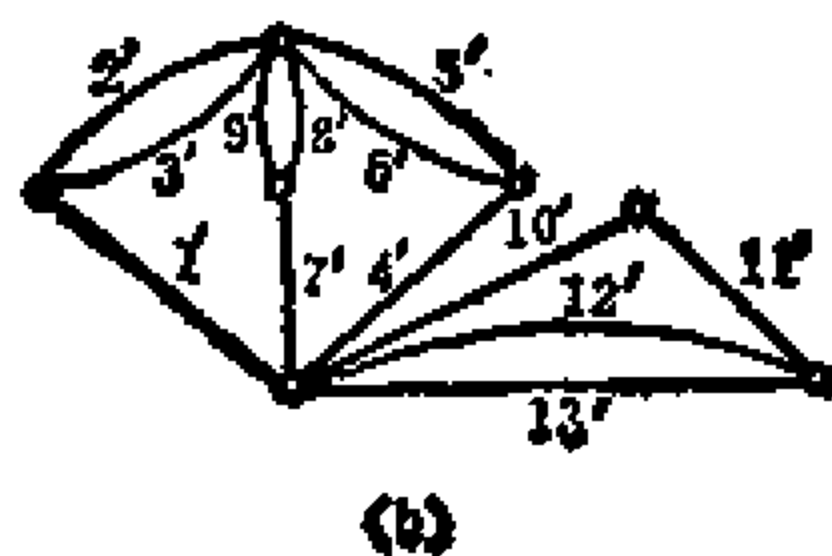
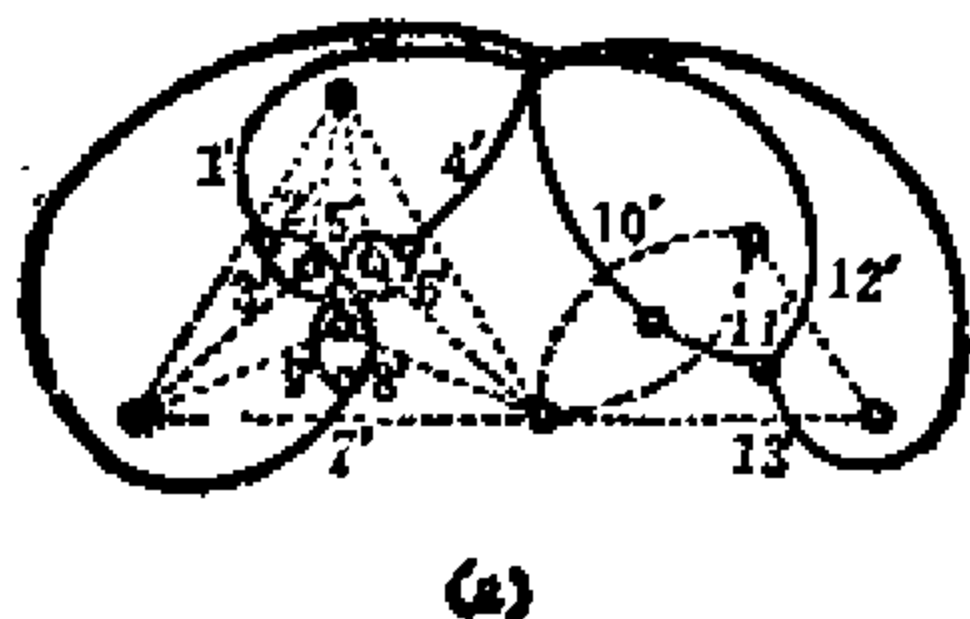


图4-3-11 G 的对偶图 G_1
(a) 由 D 过程得 G_1 ; (b) 重画 G_1

对定理4-3-7作一些修改,我们将得到关于对偶图的存在性的一个重要定理。

定理4-3-9 设 B 是线图 G 的一个回路矩阵,则 G 有一个对偶,当且仅当存在一个线图 G' ,在 G 的边和 G' 的边之间有一个1:1对应,使得 G' 的一个割集矩阵等于 B 。

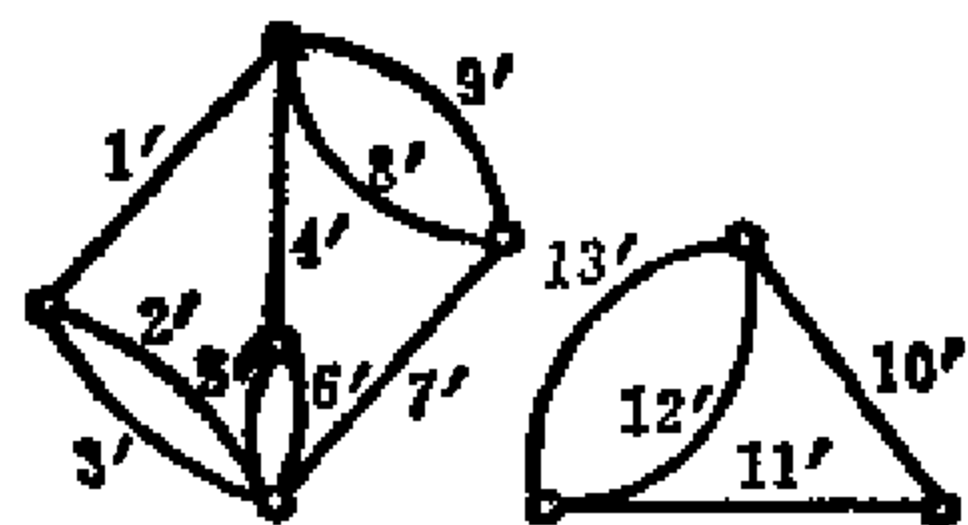


图4-3-12 G 的一个对偶图 G_2

证明: 若存在一个线图 G' 是 G 的对偶,则据定理4-3-7,此定理为真。

假定 G' 是这样一个线图，在 G 的边和 G' 的边之间有一个 1:1 对应，使得 G' 的割集矩阵是 B 。由这个假设，我们要来证明 G' 是 G 的对偶。

设 G_e 是由 G 短路边 e 得到的线图。又设 B_e 是由 G 的回路矩阵 B 删去表示边 e 的列，再删去元素全为零的行（如果这样的行存在的话）得到的矩阵，注意元素全为零的行是由于删除了一列，而此列代表的边 e 是一个自环而产生的。我们可以把 B_e 看成 G_e 的回路矩阵。设 G'_e 是由 G' 删去与 G 中边 e 对应的边 e' 得到的线图，则 B_e 显然是 G'_e 的割集矩阵。

如果我们不是短路 G 的一条边，而是短路 G 中一个子图 g 的所有边，就有以下的结果：设 G_g 是由 G 短路子图 g 中的所有边得到的线图。又设 B_g 是由 B 删去代表 g 的所有边的列，再删去元素全为零的行得到的矩阵。则可看出， B_g 是 G_g 的回路矩阵。设 G'_g 是由 G' 删除 G' 中与 g 对应的子图 g' 的所有边得到的，则 B_g 是 G'_g 的割集矩阵。因为回路矩阵的行数对应线图的零度，若 n 是 g 的零度，则 $N - n$ 是 G_g 的零度，其中 N 是 G 的零度。并且，由于 B_g 是一个割集矩阵， $N - n$ 是 G' 的秩，也就是

$$N - n = \bar{r}' \quad (4-3-34)$$

而且， G' 的秩 R' 等于 G 的零度 N 。因此我们有

$$R' - n = \bar{r}' \quad (4-3-35)$$

由此式即可得到式(4-3-18)。这对于 G 的任何子图 g 都成立。因此 G 和 G' 是对偶的。（证毕）

定理 4-3-9 导出了以下表明平面图特征的重要定理。

定理4-3-10（惠特尼） 一个线图有对偶，当且仅当它是平面的。

证明： 定理的前一部分是显然

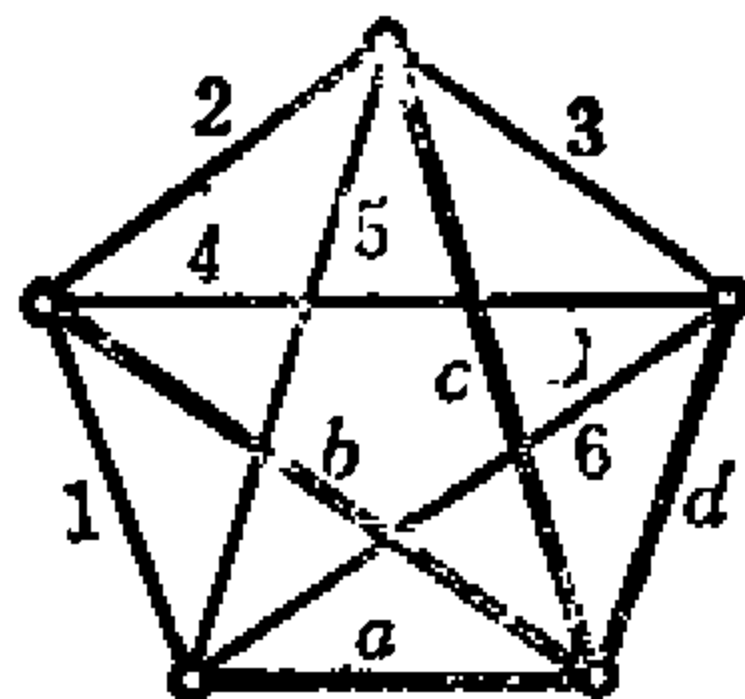


图4-3-13 两个基本非平面图之一及树 (a, b, c, d, e)

的，因为对于平面图，我们可以应用 D 过程来求出它的对偶。至于定理的后一部分，只要证明一个非平面图没有对偶即可。

假定一个线图 G 包含图 4-3-13 所示的基本非平面图作为其子图。则线图 G 的基本回路矩阵 B 可以这样选取：使这个非平面图关于树 $t = (a, b, c, d)$ 的基本回路矩阵 B_1 是 B 的一个子矩阵，这里

$$B_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{matrix} \quad (4-3-36)$$

可以看出，即使这个非平面图的每一边都用串联的边来代替， B_1 仍将是这样一个非平面图的基本回路矩阵的一个子矩阵。我们把 B_1 看作一个基本割集矩阵。为了方便，我们调整列的次序，使它成为基本割集矩阵的形式：

$$B'_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{matrix} \quad (4-3-37)$$

B'_1 关于行 1 的 H 子阵 $H_{(1)}$ 是

$$H_{(1)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} c & d & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{matrix}$$

它不可能被分块为式(3-5-3)的形式,而使 H_1 和 H_2 都不空.于是 B'_1 关于行1的两个 M 子阵之一将成为

$$M(1) = B'_1 \quad (4-3-39)$$

类似地, $M(1)$ 关于行2的两个 M 子阵之一是

$$M(12) = B'_1 \quad (4-3-40)$$

进一步, $M(12)$ 关于行4的 M 子阵对之一是

$$M(124) = B'_1 \quad (4-3-41)$$

因为 $M(124)$ 的列 b 在行1, 2, 4共有三个1,故据定理3-5-10, $M(124) = B'_1$ 不是具有表示关联集的行1, 2, 4的基本割集矩阵.并且,用行1, 2, 4我们总可以得到一个矩阵 $M(124)$ 来作为 M 子阵,因此,我们可以说, B'_1 不是一个基本割集矩阵.所以,据定理3-5-11, B 不可能是一个基本割集矩阵.于是据定理4-3-9, G 没有对偶.

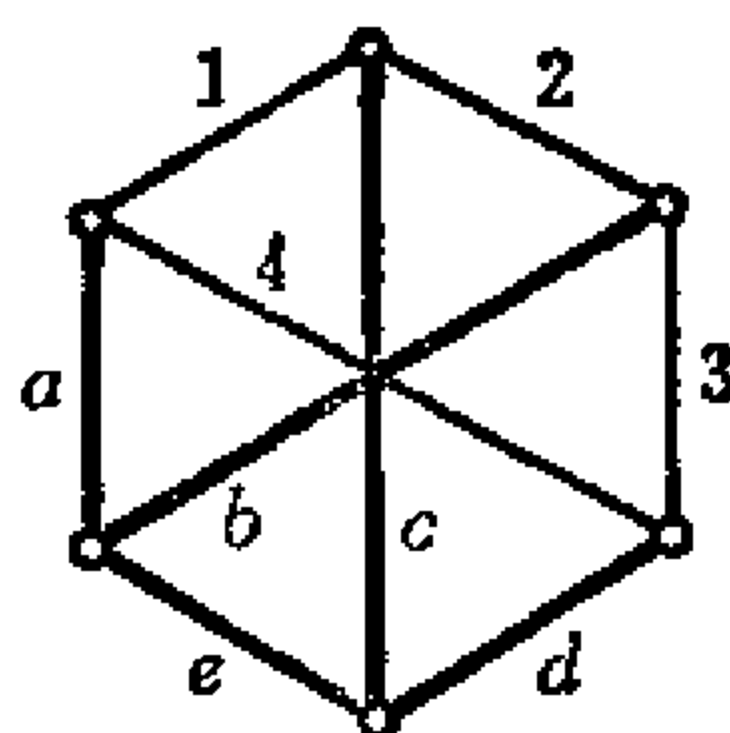


图4-3-14 另一个基本非平面图和树(a, b, c, d, e)

继续证明,假定线图 G 包含如图4-3-14所示的另一个基本非平面图为其子图,则 G 的基本回路矩阵 B 可以这样选取:以 G_2 关于树 $t = (a, b, c, d, e)$ 的基本回路矩阵 B_1 为 B 的子矩阵,这里

$$B_1 = \begin{matrix} & a & b & c & d & e & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \left[\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{matrix} \quad (4-3-42)$$

注意,为了方便,单位矩阵是放在右边的.和前面一样,如能证明 B_1 不可能是一个线图的割集矩阵,则 B 不可能成为一个线图的割集矩阵,从而证明了 G 不可能有对偶.

B_1 关于行 1 的两个 M 子阵之一是

$$M(1) = B_1 \quad (4-3-43)$$

$M(1)$ 的关于行 2 的两个 M 子阵之一是

$$M(12) = B_1 \quad (4-3-44)$$

进一步, $M(12)$ 关于行 3 的两个 M 子阵之一是

$$M(123) = B_1 \quad (4-3-45)$$

因为 $M(123)$ 的列 e 在行 1, 2, 3 共有三个 1, 故据定理 3-5-10, B 不可能是一个其行 1, 2, 3 表示关联集的基本割集矩阵. 而用行 1, 2, 3, 我们将得到 $M(123) = B_1$ 来作为 B_1 的一个 M 子阵. 于是我们可以说, B_1 不可能是一个基本割集矩阵. 因此, 据定理 3-5-11, B 不可能是一个基本割集矩阵, 故 G 没有对偶. 据定理 4-2-1, 即当且仅当 G 是非平面图时, G 包含一个与这两个基本非平面图同胚的子图. 于是我们可以断定定理为真. (证毕)

我们知道了只有平面图才有对偶这一结论, 可以得到平面图的一些有趣的性质. 设 G' 是一个连通线图 G 的对偶. 假定 G 被画在一个平面上且没有两边相交. 又假定 G' 是由 G 经 D 过程得到的. 则我们知道, G' 的每一个顶点是在 G 的每一个区域中.

由定理 2-4-6, 我们知道, 在 G' 中存在 $n'_v - 1$ 个线性无关的关联集, 这里 n'_v 是 G' 的顶点数. 设 n_e 是 G 的边数. (注意 G 的边数与 G' 的边数相同.) 因为据定理 3-3-5, G 中线性无关的回路数为 $n_e - n_v + 1$, 这里 n_v 是 G 的顶点数, 又因为 G 的回路对应于 G' 的割集, 我们有

$$n'_v - 1 = n_e - n_v + 1 \quad (4-3-46)$$

因此

$$n'_v = n_e - n_v + 2 \quad (4-3-47)$$

我们说一个线图 G 是最大平面图, 如果 (1) G 中没有并联边, (2) 若在 G 中任意两个顶点之间添加一条边, G 不再是平面的. 考虑一个最大平面图 G , 我们可以看到, 对应于每一个区域

(包括外部区域) 边界的回路恰由三条边组成。(如果不是这样的情况。我们可以在边界超过三条边的区域中添加一条边, 使其变成两个区域, 而不产生交叉边) 这就意味着在由 G 经 D 过程得到的图 G' 中, 每一个顶点恰与三条边相连。于是其边数为 $3n'_v/2$ 。据式(4-3-47),

$$n_e = \frac{3n'_v}{2} = \frac{3(n_v - n_v + 2)}{2} \quad (4-3-48)$$

或
$$n_e = 3(n_v - 2) \quad (4-3-49)$$

定理4-3-11 任一不含并联边的平面图至多有 $3(n_v - 2)$ 条边, 其中 n_v 是此平面图的顶点数。

假定一个平面图 G 不含并联边, 若 G 中每一个顶点的度至少为 6, 则边数 n_e 至少是

$$\frac{6n_v}{2} = 3n_v \quad (4-3-50)$$

但是, 由以上定理, 边数不可能超过 $3(n_v - 2)$, 因此, G 的边数小于 $3n_v$ 。

定理4-3-12 在一个不含并联边的平面图中至少有一个顶点的度等于或少于 5。

假定一个平面线图 (不含并联边) 的每一个顶点的度都是 5, 则图的边数是 $5n_v/2$ 。据定理 4-3-11,

$$\frac{5n_v}{2} \leq 3(n_v - 2) \quad (4-3-51)$$

或
$$n_v \geq 12 \quad (4-3-52)$$

存在一个恰有 12 个顶点的最大平面图, 其中每一个顶点的度均为 5, 如图 4-3-15 所示。

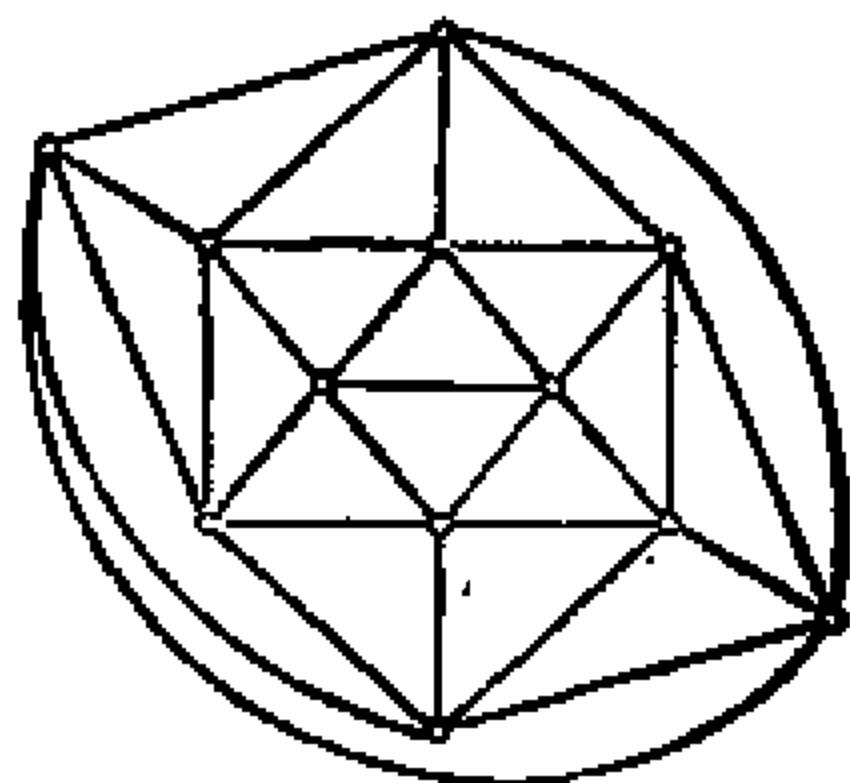


图4-3-15 每一个顶点的度均为 5 的最大平面图

4-4 割集矩阵的可实现性(Ⅱ)

第3-5节中介绍的判断割集矩阵可实现性的算法,需要对给定矩阵进行运算。因此,当我们要在某些限制下建立起一个基本割集矩阵时,采用这种算法可能不够简便。这里我们要研究托特在1959年介绍的割集矩阵的一些性质。但是,首先我们来研究一个平面图 G 的割集矩阵和回路矩阵之间的关系。

假定 $[U \ B_{f,1}]$ 是一个平面图 G 的基本回路矩阵,则据定理4-3-7,矩阵 $[B_{f,1} \ U]$ 是 G 的对偶 G' 的基本割集矩阵。类似地,如果 $[Q_{f,1} \ U]$ 是平面图 G 的基本割集矩阵,则矩阵 $[U \ Q_{f,1}]$ 是 G 的对偶 G' 的回路矩阵。另一方面,假定矩阵 $[NU]$ 是一个非平面图的回路矩阵,则 $[NU]$ 不可能是另一个图的基本割集矩阵,因为据定理4-3-10,一个非平面图不可能有对偶。另外,定理3-5-11说,如果矩阵 $[NU]$ 包含一个不是割集矩阵的子矩阵,则此矩阵不可能是一个基本割集矩阵。

定理4-4-1 如果一个矩阵 $[NU]$ 有一个子矩阵,它是库拉托斯基的两个基本非平面图中任一个的基本回路矩阵,则 $[NU]$ 不可能是一个基本割集矩阵。

注意,据定理4-2-1,一个非平面图一定含有库拉托斯基的两个基本非平面图中的某一个。

设 D 是一个非奇异矩阵,其阶数等于 $[NU]$ 的行数,且其元素为1或0。假定我们调整 $D[NU]$ 的列,可以得到一个新的矩阵 $[N'U]$,在第3-4节中,我们看到,如果选取不同的树,就得到不同的基本割集矩阵。因此,如果 $[NU]$ 是一个线图的基本割集矩阵,则 $[N'U]$ 也是同一个线图的基本割集矩阵,不过是关于不同的树而已。定理4-4-1对任何基本割集矩阵一定成立。因此,如果我们象下面这样定义一个矩阵的正规形式,就可以推广

定理4-4-1.

定义4-4-1 一个包含单位矩阵的矩阵称为正规形式的矩阵.

现在定理4-4-1可以被推广成如下形式.

定理4-4-2 如果一个矩阵 $[NU]$ 的任一正规形式包含一个子矩阵,它是库拉托斯基的两个基本非平面图中任一个的基本回路矩阵,则 $[NU]$ 不是基本割集矩阵.

有一个很有意思的矩阵,记为 N_0 ,

$$N_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4-4-1)$$

这个矩阵具有一种特殊的性质.

引理4-4-1 $[N_0U_0]$ 和 $[N'_0U'_0]$ 都不是基本割集矩阵.其中 U_0 和 U'_0 是单位矩阵.

这一引理的证明留给读者.利用这一引理,可以将定理4-4-2推广为如下形式.

定理4-4-3 如果一个矩阵 $[NU]$ 的任何正规形式包含以下三种矩阵中的任何一个:(1) $[N_0U_0]$;(2) $[N'_0U'_0]$;(3)库拉托斯基的两个基本非平面图中任一个的基本回路矩阵,则 $[NU]$ 不是基本割集矩阵.

定理4-4-3所给出的条件,也是一个矩阵是基本割集矩阵的充分条件.为了说明这一点,我们采用一种特殊矩阵,称为最小不可实现矩阵.它的定义如下.

定义4-4-2 一个矩阵 $[NU]$ 是最小不可实现矩阵,如果它满足以下四个条件:

条件1 $[NU]$ 的任何正规形式都不包含库拉托斯基的两个基本非平面图中任一个的回路矩阵.

条件2 $[NU]$ 的任何正规形式都不包含 $[N_0U_0]$ 或 $[N'_0U'_0]$,其中 U_0 和 U'_0 是单位矩阵, N_0 是式(4-4-1)给出的矩阵.

条件3 $[NU]$ 不是割集矩阵.

条件4 如果我们从 $[NU]$ 的任一正规形式 $[N'U]$ 中删去任一行 r , 所得的矩阵 $[N'U]_{-r}$ 是一个割集矩阵. 如果我们删除 N' 的任一系列 c , 所得的矩阵 $[N'_{-c}U]$ 也是一个割集矩阵.

我们首先在最小不可实现矩阵存在的假设下, 来考查它的某些性质. 为了简便, 我们定义以下符号.

定义4-4-3 设 r 是一个最小不可实现矩阵 $[NU]$ 中的一行, c 是 N 中的一列, 则线图 $G(-r)$, $G(-c)$, $G(-r-c)$ 和 $G(-c-r)$ 分别定义为

$G(-r)$: 割集矩阵为 $[NU]_{-r}$ 的线图.

$G(-c)$: 割集矩阵为 $[N_{-c}U]$ 的线图.

$G(-r-c)$: 在 $G(-r)$ 中, 把对应于 $[NU]_{-r}$ 的列 c 的边删除所得的线图.

$G(-c-r)$: 在 $G(-c)$ 中, 把 $[N_{-c}U]$ 中 U 在行 r 处为1的列所对应的边短路 (即将此边的两端点重合, 并删去此边) 得到的线图. 其中, 符号 $[NU]_{-r}$ 代表从最小不可实现矩阵 $[NU]$ 中删除行 r 得到的矩阵, 符号 $[N_{-c}U]$ 代表删除 N 的列 c 得到的矩阵.

假定一个线图的割集矩阵是 $[NU]$ 的子矩阵, 我们考虑这种线图的某些性质.

引理4-4-2 设 $G_0(-r-c)$ 是一个线图, 它的割集矩阵是 $[N_{-c}U]_{-r}$, 这个矩阵是由一个最小不可实现矩阵 $[NU]$ 删除 N 中的列 c 以及行 r 得到的. 则 $G_0(-r-c)$ 与 $G(-r-c)$ 和 $G(-c-r)$ 是2-同构的.

证明: 如果我们删除 $G(-r)$ 中对应于列 c 的弦, 就得到线图 $G(-r-c)$, 其割集矩阵是 $[N_{-c}U]_{-r}$. 因此, 据定理4-1-2, $G_0(-r-c)$ 和 $G(-r-c)$ 是互为2-同构的. 类似地, 如果我们短路 $G(-c)$ 中与 U 的在 $[N_{-c}U]$ 的行 r 处为1的列对应的枝, 就得到线

图 $G(-c-r)$, 其割集矩阵为 $[N_{-c}U]_{-r}$. 因此, 据定理 4-1-2, $G(-c-r)$ 和 $G_0(-r-c)$ 是互为2-同构的. (证毕)

下一个引理说明线图 $G(-c)$ 的某些性质.

引理4-4-3 设 r_1, r_2, \dots, r_k 是 $[NU]$ 中在列 c 处为1的行. 对 $p=1, 2, \dots, k$, 设枝 r_p 对应于 U 中在行 r_p 处为1的列, 则线图 $G(-c)$ 有以下性质:

1. 当枝 r_1, r_2, \dots, r_k 中任何一个被短路时, 剩下的枝或者本身构成一条路径, 或者经过2-同构运算变成一条路径.

2. 枝 r_1, r_2, \dots, r_k 本身既不可能构成一条路径, 也不可能经过任何2-同构运算变成一条路径.

注意, $[N_{-c}U]$ 中 U 的各列对应一个树, 枝 r_1, r_2, \dots, r_k 是这个树中的一些边. 2-同构运算是指 4-1 节中介绍的, 得到2-同构图的几何运算.

证明: 为了使 $[NU]_{-r_1}$ 成为 $G(-r_1)$ 的基本割集矩阵, 枝 r_2, r_3, \dots, r_k 和弦 c 一起, 必然构成 $G'(-r_1)$ 中的一个回路, 其中 $G'(-r_1)$ 是与 $G(-r_1)$ 2-同构的一个线图. 故枝 r_2, r_3, \dots, r_k 构成 $G'(-r_1-c)$ 中的一条路径, 而 $G'(-r_1-c)$ 与 $G(-r_1-c)$ 2-同构. 据引理 4-4-2, $G(-r_1-c)$ 和 $G(-c-r_1)$ 是互为2-同构的, 因此 $G'(-r_1-c)$ 和 $G(-c-r_1)$ 也互为2-同构. 所以, 在从 $G'(-c)$ 短路 r_1 得到的线图 $G'(-c-r_1)$ 中, 存在一条由 r_2, r_3, \dots, r_k 组成的路径, 其中 $G'(-c)$ 与 $G(-c)$ 是2-同构的. 我们如果用 $r_p (1 < p \leq k)$ 来代替 r_1 , 也可得到同样的结论. 因此在 $G(-c)$ 中性质 1 成立.

假定枝 r_1, r_2, \dots, r_k 构成 $G(-c)$ 的2-同构图 $G'(-c)$ 中的一条路径, 则我们可以将弦 c 加入 $G'(-c)$ 中, 使弦 c 与枝 r_1, r_2, \dots, r_k 构成一个回路, 从而得到线图 G . 由于 $G'(-c)$ 的基本割集矩阵是 $[N_{-c}U]$, 故 G 的基本割集矩阵是 $[NU]$. 然而 $[NU]$ 是一个最小不可实现矩阵, 所以在 $G(-c)$ 中性质 2 必然成

立。

(证毕)

下面的定理给出了 $[NU]$ 的一个重要性质。

定理4-4-4 设 $[NU]$ 是一个最小不可实现矩阵,则在 $[NU]$ 的任一正规形式 $[N'U]$ 中, N' 的任一列或者具有两个非零元,或者具有三个非零元。

证明: 只要证明引理4-4-3中的 k 不大于3即可。为了说明这一点,我们来考查一个具有引理4-4-3所列性质的图 $G(-c)$,在 $k \geq 3$ 时所有可能的结构。引理4-4-3指出,在 $G(-c)$ 中,枝 r_1, r_2, \dots, r_k 不可能组成一条路径,也不可能经2-同构运算变成一条路径(性质2)。但是,如果我们将枝 $r_p (1 \leq p \leq k)$ 短路,剩下的枝就将组成一条路径,或者经过2-同构运算变成一条路径(性质1)。因此,假定我们取 $p=1$,就可以得到以下两种类型的结构。而对于 $G(-c)$ 来说,只可能有这样几种选择。

情形1 不用短路 r_1 ,其余的枝 r_2, \dots, r_k 即已组成一条路径,或者这些枝经2-同构运算后变成一条路径。

情形2 不短路 r_1 ,其余的枝 r_2, \dots, r_k 就不能组成一条路径,对这些枝进行2-同构运算也不能变成一条路径。

属于第一种类型的 $G(-c)$ 又可以有两种形式的选择,它们取决于枝 r_1 是否与枝 r_2, \dots, r_k 所构成的路径相连接。因此可以看出,在第一种类型中, $G(-c)$ 的所有可选择的结构只能如图4-4-1(d)(e)所示的 G_d 和 G_e 。注意,对于类型1中的 $G(-c)$,还有这样的结构可供选择,即经过2-同构运算变成与 G_d 或 G_e 相同的结构。但对于定理4-4-4的证明来说,我们没有必要考虑这些结构。

属于第二种类型的 $G(-c)$,可供选择的结构也可以分为两种形式,它们取决于在短路枝 r_1 以后,为了使枝 r_2, \dots, r_k 处于一条路径之中,所需进行的2-同构运算的种类,正如我们在4-1节中已经看到的,对于2-同构有两种形式的几何运算。为了简

便，我们称它们为第一型运算和第二型运算。

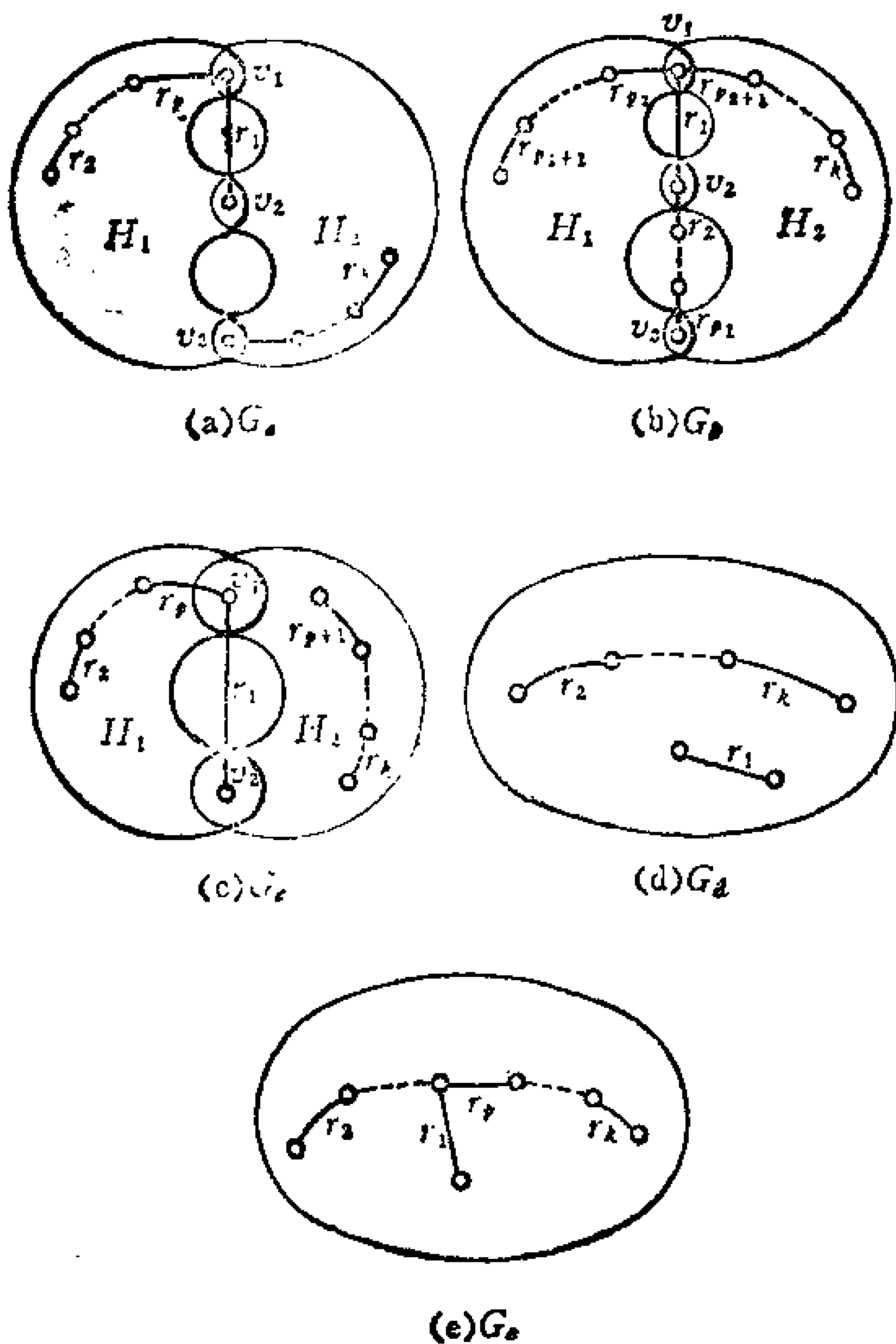


图4-4-1 对 $G(-c)$ 结构的几种选择: G_s , G_b , G_c , G_d 和 G_e .

定义4-4-4 所谓第一型的2-同构运算,是指将一个割点切割成二,使最大连通子图的数目增加1的一种运算。这种运算的逆运算也叫第一型的2-同构运算(它是指把最大连通子图 g_i 中的一个顶点和 g_j 中的一个顶点重合起来的方法),即把 g_i 和 g_j 连接起来的一种运算。所谓第二型的2-同构运算,是指使两个顶点连接在一起的两个子图之一,绕这两个顶点旋转的几何运算。

属于第二种类型,且需要作第一型2-同构运算的 $G(-c)$,其可供选择的结构,可用图4-4-1(c)中的 G_c 来表示。当然,那种不用短路 r_1 ,即可由 G_c 经2-同构运算得到的全部结构,也都属于这种形式。但我们在这里不必考虑它们。而对于要作第二型2-同构运算的 $G(-c)$,其可供选择的结构有两种,取决于枝 r_2, r_3, \dots, r_k 如何连接,以便经2-同构运算变成一条路径。这就是图4-4-1(a)和(b)中的 G_a 和 G_b 。此外,那种不用短路枝 r_1 ,即可由 G_a 和 G_b 经2-同构运算得到的全部结构,我们可以不去考虑。因此,为了证明定理4-4-4,只需要考查图4-4-1所示的五种结构即可。

结构 A 考虑图4-4-1(a)所示的线图 G_a ,若 $p < 2$,即 r_2, r_3, \dots, r_k 全部在子图 H_2 中,则 G_a 与图4-4-1(d)中的 G_d 结构相同。对此,我们将在后面研究。因此,我们假设 $p \geq 2$ 。注意,当枝 r_1 被短路时,顶点 v_1 和 v_2 变成一个顶点。这个新顶点和顶点 v_3 成为第二型2-同构运算的一对顶点,经这种运算, $r_2, r_3, \dots, r_p, r_{p+1}, \dots, r_k$ 变成一条路径。

现在,我们不去短路 r_1 ,而换成短路 r_2 。如果由于 r_2 的短路,而使一种2-同构运算能够实施,并且这个运算是第一型的,那么原来的图 G_a 必定是

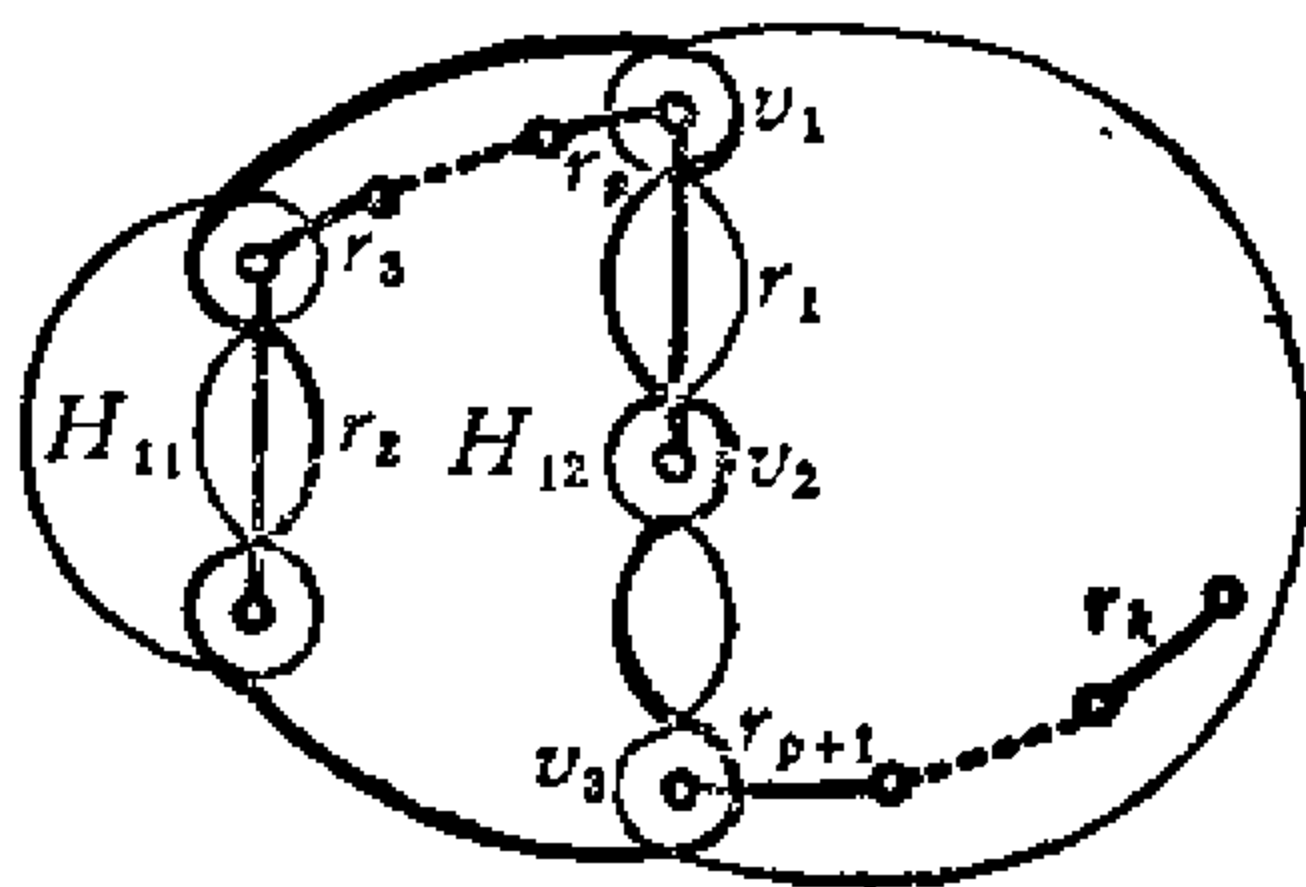


图4-4-2 G_a 及 H_{12}, H_{11}

图4-4-2所示的样子。因此，剩下的枝 r_1, r_2, \dots, r_k 显然不可能经2-同构运算变成一条路径。如果这个2-同构运算是第二型的，则这种运算的实施并不会改变 H_2 的结构或 r_1 的位置。因此，要使 r_1, r_2, \dots, r_k 成为一条路径，就必须移动 r_2, \dots, r_k 中一部分枝的位置，来形成 v_2 和 v_3 之间的路径。这样作是不可能的，除非这条路径在开始时就已经存在。因为根据性质2，在 v_2 和 v_3 之间不可能有这条路径，所以我们可以断定，当 $p \geq 2$ 时， G_c 不是 $G(-c)$ 。

结构B 考虑图4-4-1(b)中的 G_b 。若 $p_1 < 2$ ，则它变成 G_a 。所以 $p_1 \geq 2$ 。若 $p_2 = p_1$ ，这意味着 r_1, r_2, \dots, r_k 都不在 H_1 中，且 r_1, r_2, \dots, r_k 构成一条路径。因此 p_2 一定大于 p_1 。并且，显然 $k \geq p_2 + 1$ 。假定 $p_1 > 2$ ，那么在短路 r_2 后，所得的图与 G_b 相比，除了组成 v_2 和 v_3 之间路径的串联边数减少了1以外，二者是相同的。因此， r_1, r_2, \dots, r_k 不可能经2-同构运算变成一条路径。这就说明 $p_1 = 2$ 。

由于 $p_1 = 2$ ，我们假定 $p_2 > 3$ 。因为在这种情形下， H_1 中至少有两个枝 r_3 和 r_4 ，所以若将 r_3 短路，所得的结果就与 G_c 相同。因此，在这种情况下， G_b 不是 $G(-c)$ 。

只剩下一情况，就是 $p_2 = 3, k = 4$ ，如图4-4-3所示。为了使这种结构存在，必须有图中所示的路径 P_1, P_2, P_3 和 P_4 。显然，这个线图包含一个与图4-4-4所示线图 G_3 同胚的子图，因此有一个 G_b 的基本割集矩阵 Q_1 ，它包含 G_3 的基本割集矩阵 Q_2 为其子矩阵。我们考虑 G_3 的基本割集矩阵 Q_1 ，这里

$$Q_1 = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & r'_1 & r'_2 & r'_3 & r'_4 \\ \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

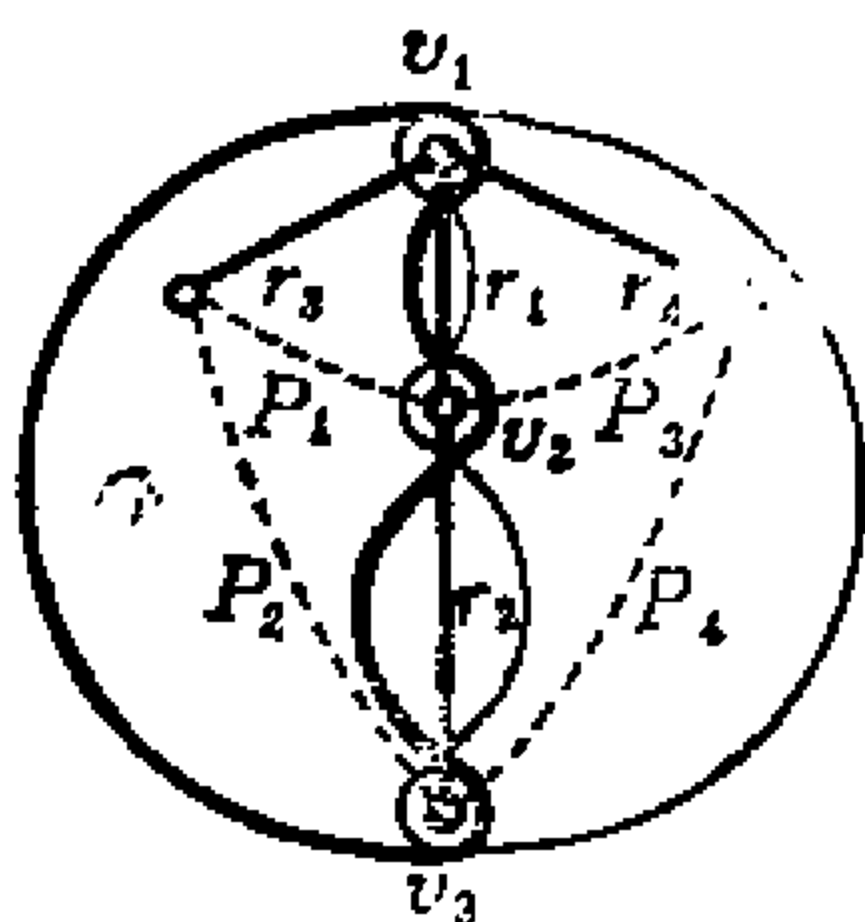


图4-4-3 路径 P_1, P_2, P_3, P_4

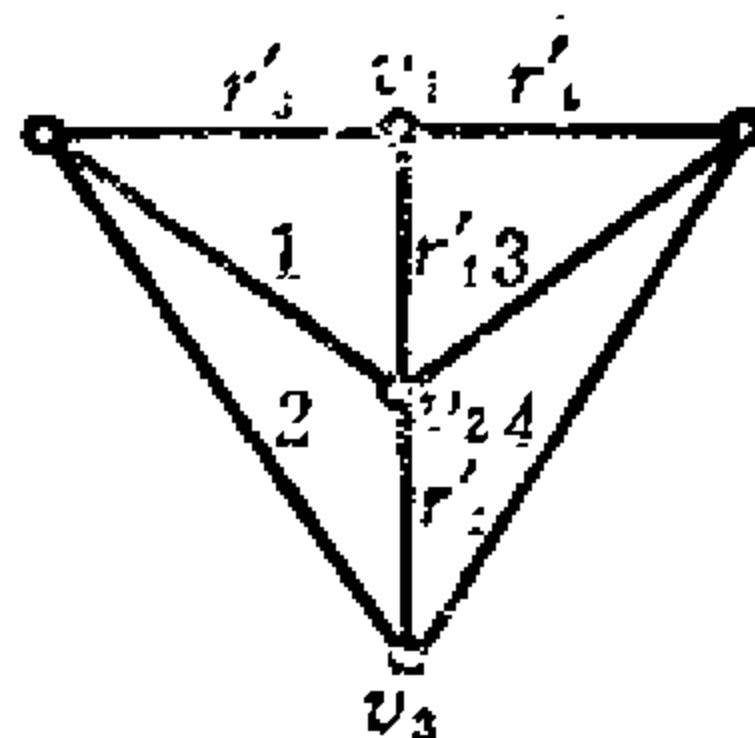


图4-4-4 G_3

如果 G_b 是 $G(-c)$ ，则 $[NU]$ 的一个正规形式，一定包含以下矩阵 $[N \ U]$ ：

$$[N \ U] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} Q_f = \begin{bmatrix} c & 1 & 2 & 3 & 4 & r'_1 & r'_2 & r'_3 & r'_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

然而这个矩阵是库拉托斯基的两个基本非平面图之一的基本回路矩阵，故 $[NU]$ 不满足条件1。因此 $[NU]$ 不是最小不可实现矩阵。这是一个矛盾。所以 G_b 不是 $G(-c)$ 。

结构C 考虑图4-4-1(c)中的 G_c 。若 $p < 2$ （即枝 r_2, \dots, r_k 都不在 H_1 中），则 G_c 变成了 G_d ，对此将在后面讨论。因此我们假设 $p \geq 2$ 。我们不短路 r_1 ，而将枝 r_2 短路，容易看出，剩下的枝 r_1, r_3, \dots, r_k 不可能由2-同构运算变成一条路径。因此 G_c 不是 $G(-c)$ 。

结构D 考虑图4-4-1(d)中的 G_d 。如果我们不短路 r_1 而短路 r_2 ，为了使 G_d 成为 $G(-c)$ 的一种可供选择的结构， G_d 只能与 G_c 或 G_e 相同。因此 G_d 不是 $G(-c)$ 。

结构 E 考虑图4-4-1(e)中的 G_c 。对于 $k > 3$ ，如果我们短路除 r_1 外的任何一个枝，为了使 G_c 成为 $G(-c)$ 的一种可供选择的结构， G_c 变成图4-4-1中另外一个图。

然而我们发现，这些图都不可能是 $G(-c)$ 。因此， G_c 仅当 $k = 3$ 时可以作为 $G(-c)$ ，这种结构如图4-4-5所示。

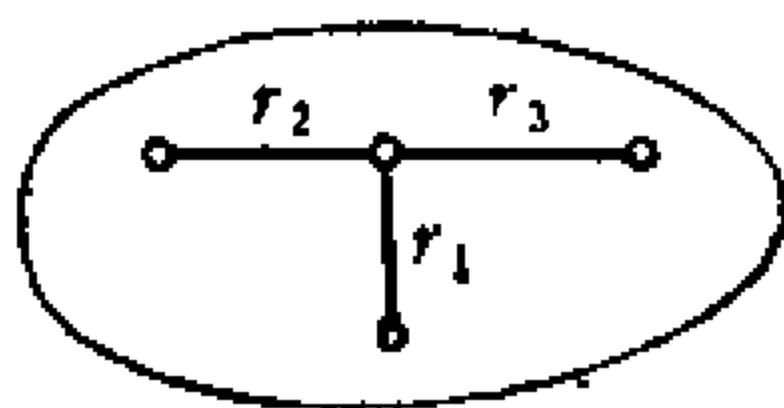


图4-4-5 $k = 3$ 时的 G_c 。

现在，我们可以断定 $k \leq 3$ 。注意 k 是 $[NU]$ 中列 c 的非零元数目。这对于选取 $[NU]$ 的任一正规形式的任何一行都一定成立，所以我们可以得出这样的结论： N' 中的任何一行有两个或三个非零元。这里 $[N'U]$ 是 $[NU]$ 的任何一种正规形式。这就证明了定理。 (证毕)

对于 N 的行，我们有与上述关于列的定理相同的性质。

定理4-4-5 设 $[NU]$ 是一个最小不可实现矩阵，则在 $[NU]$ 的任一正规形式 $[N'U]$ 中， N' 的任一行或者有两个非零元，或者有三个非零元。

证明： 我们只需要说明，当 $[NU]$ 是最小不可实现矩阵时， $[N'U]$ 也是最小不可实现矩阵，其中 U 是一个单位矩阵， N' 是 N 的转置。首先，我们要说明 $[N'U]$ 满足条件4。假定 $[NU]_{-i}$ 和 $[N_{-i}U]$ 是非平面图的割集矩阵，则 $[NU]_{-i}$ 和 $[N_{-i}U]$ 包含库拉托斯基的两个基本平面图中某一个的割集矩阵。这就意味着， $[NU]_{-i}$ 和 $[N_{-i}U]$ 有这样的正规形式，其中某一系列有三个以上的非零元，因为我们可以选取图4-4-6(a)和(b)所示的树。这就违背了定理4-4-4。故 $[NU]_{-i}$ 和 $[N_{-i}U]$ 都是平面图的割集矩阵。因此， $[N'_{-i}U]$ 和 $[N'U]_{-i}$ 都是割集矩阵。这表明 $[N'U]$ 满足条件4。对于条件1，假定 $[N'U]$ 包含两个基本非平面图中某一个的回路矩阵，因为 $[N'U]_{-i}$ 是一个割集矩阵，故 $[N'U]$ 本身就是两个基本非平面图之一的回路矩阵，因此 $[NU]$ 必然是

一个割集矩阵，这是一个矛盾。

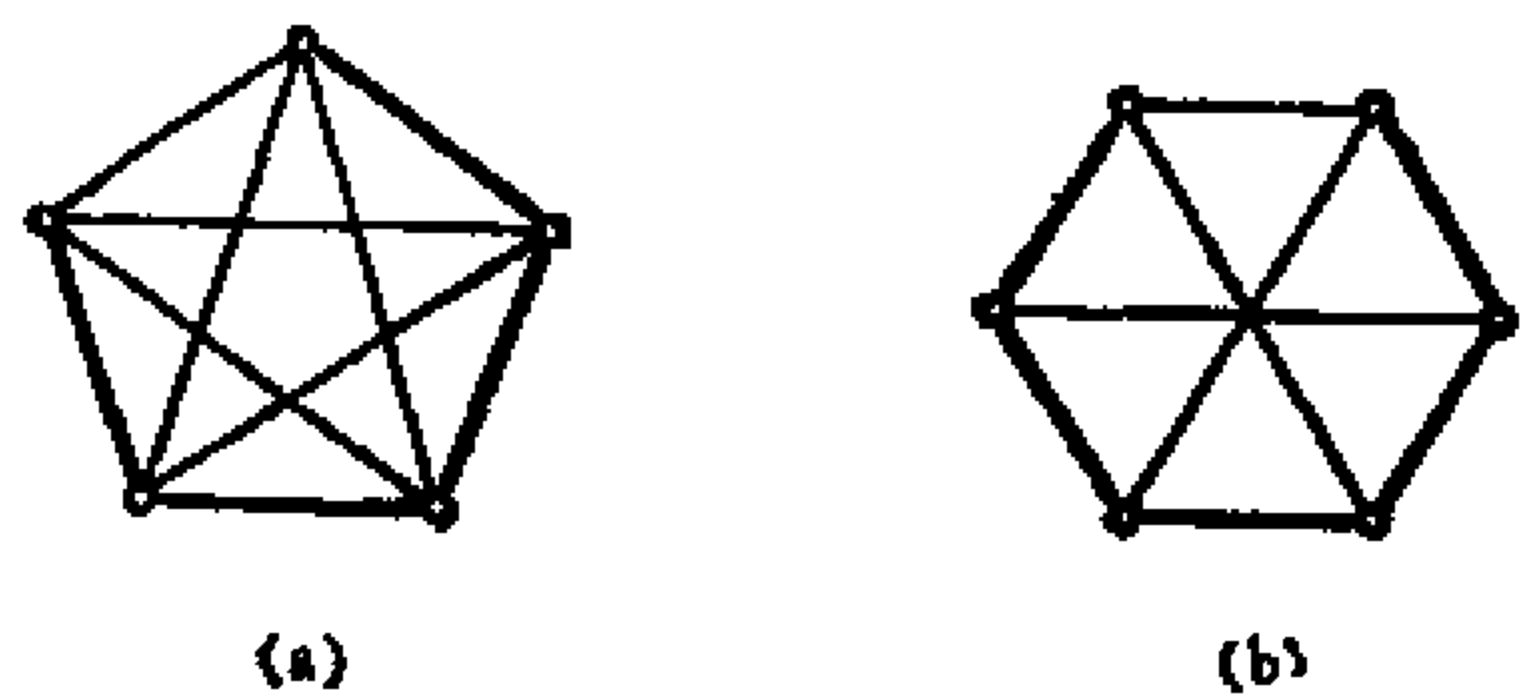


图4-4-6 基本非平面图和所选取的树

$[N' \ U]$ 必定满足条件 2，因为若 $[N_0 \ U_0]$ 是在 $[N' \ U]$ 的一个正规形式中，则 $[N' \ U_0]$ 是在 $[N \ U]$ 的一个正规形式中。这里 U_0 是单位矩阵。这对于 $[N' \ U_0]$ 也为真。最后， $[N' \ U]$ 不可能是一个割集矩阵，因为如果它是割集矩阵，则 $[N \ U]$ 是一个非平面图的回路矩阵，这就违背了条件 1。因此 $[N' \ U]$ 满足条件 3。这样， $[N' \ U]$ 是一个最小不可实现矩阵，因此据定理 4-4-4，此定理为真。 (证毕)

下一个定理和定理 4-4-3 给出了托特介绍的可实现性条件。

定理4-4-6 最小不可实现矩阵不存在。

证明： 如果一个矩阵不是割集矩阵，则其中必至少有一列，在这一列中至少有三个 1。并且，据定理 4-4-5， N 的任一行有两个或三个 1。因此，可以假设一个最小不可实现矩阵 $[N \ U]$ 的子矩阵 N 为具有下面的形状的矩阵：

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a_{13} & 0 & \cdots \\ 1 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ 1 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$$

首先我们考虑 $a_{13} = 1$ 的情况。在这种情况下， $[N \ U]$ 为

$$[N \ U] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

设 $a_{22} = a_{32}$ ，如果 $a_{22} = a_{32} = 1$ ，则 N 的第一、第二列相同，因为据定理 4-4-4， N 的每一行最多有三个 1。但是，删除这两列中的一列，不可能使剩余的矩阵可实现为基本割集矩阵。这就说明， $[N \ U]$ 不是最小可实现矩阵。因此 $a_{22} = a_{32} = 1$ 是不可能的。当 $a_{22} = a_{32} = 0$ 时，我们有

$$[N \ U] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & & 1' & 2' & 3' \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & a_{23} & a_{24} & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_{33} & a_{34} & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \cdots \\ 0 & & & & & & & & & 1 \end{array} \right]$$

交换列 1 和列 1'，我们有

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} & 1' & 2 & 3 & 4 & & 1 & 2' & 3' \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \cdots \\ 0 & & & & & & & & & 1 \end{array} \right]$$

为了使之成为正规形式，我们必须把第一行加（模 2）到第二和

第三行，得到

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & 1' & 2 & & 3 & 4 & & 1 & 2' & 3' \\
 \left[\begin{array}{ccccccccc}
 1 & 1 & & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 1+a_{23} & a_{24} & \cdots & 0 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 1+a_{33} & a_{34} & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & a_{42} & & a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\
 0 & & & & & & & & & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

由定理4-4-4，列2和列1'一定相等，故 $[NU]$ 不是一个最小不可实现矩阵。因此 $a_{22} \neq a_{32}$ 。不失一般性，设 $a_{22} = 1$ ， $a_{32} = 0$ ，

$$[NU] = \left[\begin{array}{ccccccccc}
 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & a_{23} & a_{24} & \cdots & 0 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & a_{33} & a_{34} & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\
 0 & & & & & & & & 1
 \end{array} \right]$$

类似地， $a_{23} \neq a_{33}$ 。由定理4-4-5，这一结论对 $[N'U]$ 也为真。因此 $a_{22} \neq a_{23}$ ， $a_{32} \neq a_{33}$ 。于是有

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & & 1' & 2' & 3' \\
 \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \left[\begin{array}{ccccccccc}
 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & a_{24} & \cdots & 0 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & a_{34} & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\
 0 & & & & & & & & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

假定 $a_{42} \neq a_{43}$ 。不失一般性，设 $a_{42} = 1$ ， $a_{43} = 0$ ，则交换列2和列1'，并将行1加到行2、4，使所得矩阵成为正规形式，如此作下去，在列3中将至少产生四个1。这样，由定理4-4-4， $[NU]$

不是一个最小不可实现矩阵。因此 $a_{42} = a_{43}$ 。

如果 $a_{42} = a_{43} = 1$ ，我们有

$$[N \ U] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & & \\ 1 & 1 & 0 & a_{24} & \cdots & 0 & 1 & 0 & & \\ 1 & 0 & 1 & a_{34} & \cdots & 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a_{44} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots \\ 0 & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

可以看出， N' 是这个矩阵的一个子矩阵，故 $[N \ U]$ 不是一个最小不可实现矩阵。因此 $a_{42} = a_{43} = 0$ 。若对 $r > 4$ ，任一 $(r, 2)$ 元是 1，我们可以将行 r 和行 4 交换，然后交换属于 U 的列，使所得矩阵成为正规形式。这样， $a_{42} = a_{43} = 0$ 就意味着对 $r = 4, 5, \cdots$ ， $a_{r2} = a_{r3} = 0$ ，当 $s \geq 4$ 时，考虑 $[N' \ U]$ ，这一结论对 a_{2s} 和 a_{3s} 也为真，于是我们有

$$[N \ U] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & 0 & 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & N' & & \vdots & \vdots & \vdots & & U' \\ 0 & 0 & 0 & & & & 0 & 0 & 0 & & \end{bmatrix}$$

若 $[N \ U]$ 不是割集矩阵，我们可以看出， $[N' \ U']$ 一定不是割集矩阵。因此，当 $a_{13} \neq 1$ 时， $[N \ U]$ 不是一个最小不可实现矩阵。

对于 $a_{13} = 0$ ， $[N \ U]$ 变成

$$[N \ U] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & \\ 1 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & & & \\ 1 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & & & \\ 0 & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & & & & U \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix}$$

如果 $a_{22} = a_{32}$, $[NU]$ 不可能成为一个最小不可实现矩阵。因此 $a_{22} = 1$, $a_{32} = 0$, 即

$$[N \ U] = \begin{array}{c|cccccc} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ a_{23} \\ a_{33} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} \cdots \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{l} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \end{array} \quad U$$

若 $a_{23} = 1$, $[NU]$ 与 $a_{13} = 1$ 时的形式相同。并且, 若对 $p > 3$, N 中元素 $(2, p)$ 是 1, 我们可以把它移到 $(2, 3)$ 位置。所以在 N 中 $a_{23} = a_{24} = \cdots = 0$ 。但是这样就使 N 的行 1 和行 2 相同了。故在 $a_{13} = 0$ 时, $[NU]$ 不是最小不可实现矩阵。现在我们可以断定, 最小不可实现矩阵不存在。这就证明了定理 4-4-6。 (证毕)

我们可以看出, 任何一个满足条件 1, 2 而不是基本割集矩阵的矩阵, 都可以被缩成为满足条件 4 的矩阵。因此定理 4-4-6 意味着, 任一不是基本割集矩阵的矩阵都不满足条件 1 和 2。这就是定理 4-4-3 的逆。

定理 4-4-7 (托特) 矩阵 $[NU]$ 是一个基本割集矩阵, 当且仅当 $[NU]$ 的任何正规形式都不包含: (1) $[N_0 U_0]$; (2) $[N'_0 U'_0]$; (3) 库拉托斯基的两个基本非平面图中任一个的基本回路矩阵。

由式 (3-4-24) 给出的割集矩阵和回路矩阵之间的关系, 定理 4-4-7 可修改如下。

定理 4-4-8 矩阵 $[NU]$ 是一个基本回路矩阵, 当且仅当 $[NU]$ 的任何正规形式都不包含: (1) $[N_0 U_0]$; (2) $[N'_0 U'_0]$; (3) 库拉托斯基的两个基本非平面图中任一个的基本割集矩阵。

习 题

1. 设 Q_1 和 Q_2 分别是线图 G_1 和 G_2 的割集矩阵, 假定 $Q_1 = DQ_2$, 其中 D 是一个由 1 和 0 组成的非奇异矩阵. 我们可以说 G_1 和 G_2 是互为 2-同构的吗?
2. 几个不同的线图可能有相同的基本割集矩阵吗?
3. 判断图 $P-4-3$ 中的两个线图是否互为 2-同构.

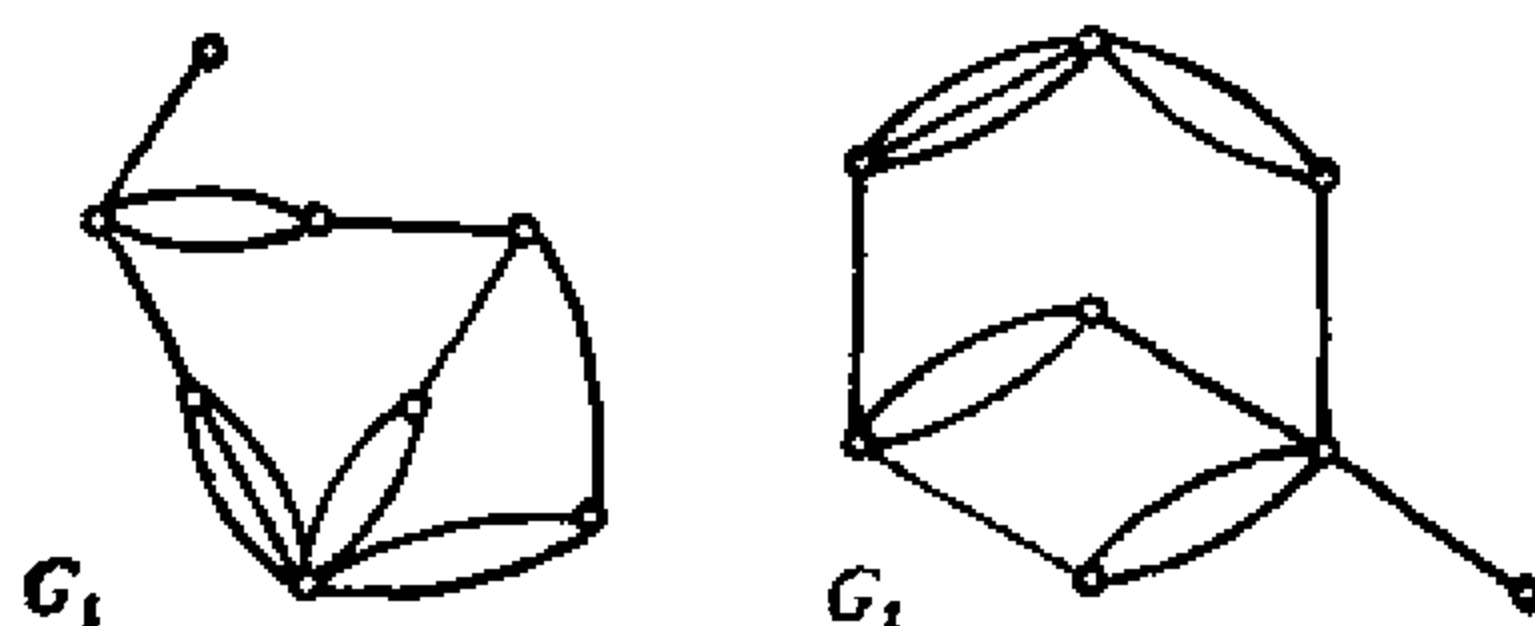


图 $P-4-3$

4. 不画出线图, 怎样判断它是否为一个平面图?
5. 图 $P-4-5$ 中的线图是平面的吗?

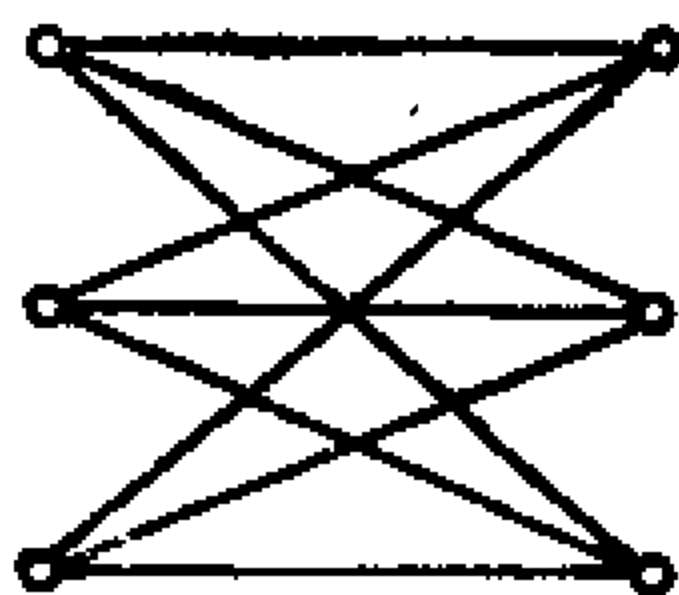
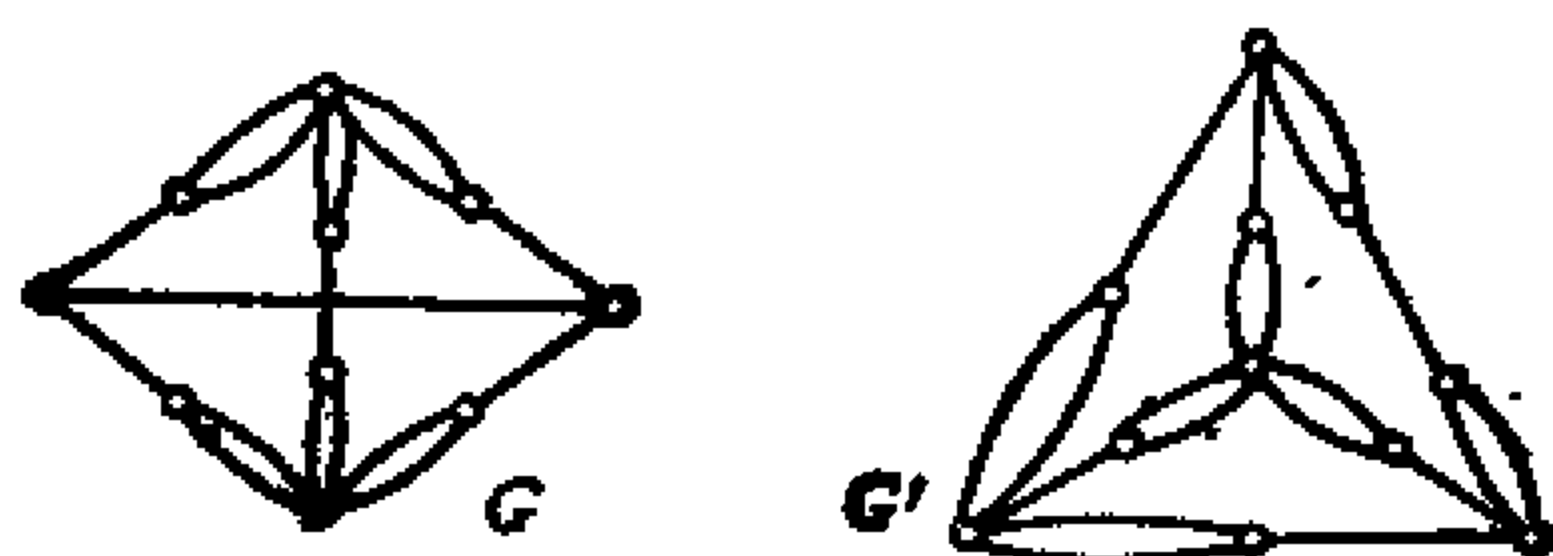


图 $P-4-5$

6. 叙述一种判断两个线图是否同胚的简单办法.
7. 判断图 $P-4-7$ 中的线图 G 和 G' 是否同胚.



图P-4-7

8. 设 G_1 和 G_2 都是线图，它们的基本回路矩阵分别是 B_1 和 B_2 。假定 B_1 （非空）可由删除 B_2 的某些行和零列得到。我们可以对 G_1 和 G_2 下什么结论？

9. 如果一个线图中每一个顶点的度都是3，则称此线图为3度图。图4-3-14所示库拉托斯基的两个基本非平面图之一，就是一个3度图，记此图为 N_3 。证明或否定，如果3度图 G 的一个割集矩阵不包含 N_3 的割集矩阵为其子矩阵，则 G 是平面的。

10. 证明引理4-4-1。

第五章 特殊割集和伪割

5-1 分离两个确定顶点的割集

现在，我们要考虑这样一个问题：在一个连通线图 G 中，我们要删去一部分边，以破坏两个顶点 i 和 j 之间的所有路径。设 H 是一个边集合，如果从 G 中删去 H 的所有边，就能破坏 $\{P_{ij}\}$ 里所有的路径，那么 G 中 i 和 j 之间的任一条路径，至少有一条边在 H 中。这里， $\{P_{ij}\}$ 是顶点 i 和 j 之间所有路径的集体（见定义1-4-3）。

让我们看看删去 H 的全部边后所得到的图 G' 。 G' 必至少包含两个最大连通子图（它们有可能仅是一些孤立的顶点），这两个子图之一包含顶点 i ，而另一个包含顶点 j 。因此 G' 的秩至少要比 G 的秩少1。这说明集合 H 中有一个子集是割集。在式(2-2-5)中，我们已经知道，从线图 G 中删去割集 $S = \mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 的所有边，将产生两个子图 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_1)$ 和 $\mathcal{E}(\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 。如果 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_1)$ 包含顶点 i ，而 $\mathcal{E}(\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 包含顶点 j ，则删除 S 中全部边将破坏 i 和 j 之间的所有路径。因此，要使集合 H 成为满足下面性质的最小边集：若删去其中所有的边，就将破坏 $\{P_{ij}\}$ 中所有的路径，那么， H 一定是一个特殊的割集 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ ，它使得 $i \in \mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_1)$ ， $j \in \mathcal{E}(\bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 。为了叙述的方便，我们采用如下定义。

定义5-1-1 对于割集 $S = \mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ ，如果 $i \in \Omega_1$ ， $j \in \bar{\Omega}_1$ ，那么就说 S 分离了顶点 i 和 j 。

由这个定义，我们可以说，要使集合 H 是一个能破坏 i ， j

间所有路径的最小集合， H 必定是一个分离顶点 i 和 j 的割集。

定理5-1-1 如果在一个连通线图 G 中，删去集合 S 的全部边，将破坏顶点 i 和 j 之间的所有路径，但若只删去 S 的一部分而非全部边，则不能破坏 i 和 j 之间的所有路径，那么 S 是一个分离 i 和 j 的割集。反之，如果从线图 G 中删去割集 $S = \mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 的所有边，那么将破坏从 Ω_1 中一个顶点到 $\bar{\Omega}_1$ 中一个顶点的全部路径。

为了表明一个割集是否分离两个确定的顶点，我们采用符号 $S(i; j)$ 和 $S(ij; .)$ 把割集分成两类。

定义5-1-2 符号 $S(i; j)$ 表示分离顶点 i 和 j 的一类割集，符号 $S(ij; .)$ 表示不分离顶点 i 和 j 的一类割集。

例5-1-1 考虑图5-1-1所示的线图。设 $\Omega_1 = (1, 2)$ ，则割集 $S = \mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 由边 b, c, d 组成。因为顶点 1 在 Ω_1 中，顶点 3 在 $\bar{\Omega}_1$ 中，所以割集 S 分离顶点 1 和顶点 3，我们用符号 $S(1; 3)$ 表示之。另一方面，如果我们感兴趣的顶点是 1 和 2，那么割集 S 就不会分离它们，我们用符号 $S(12; .)$ 表示之。如果设 $S_1 = (a, b, c)$ ，那么可以看出， S_1 不分离顶点 1 和 3，于是我们用符号 $S(13; .)$ 表示之。

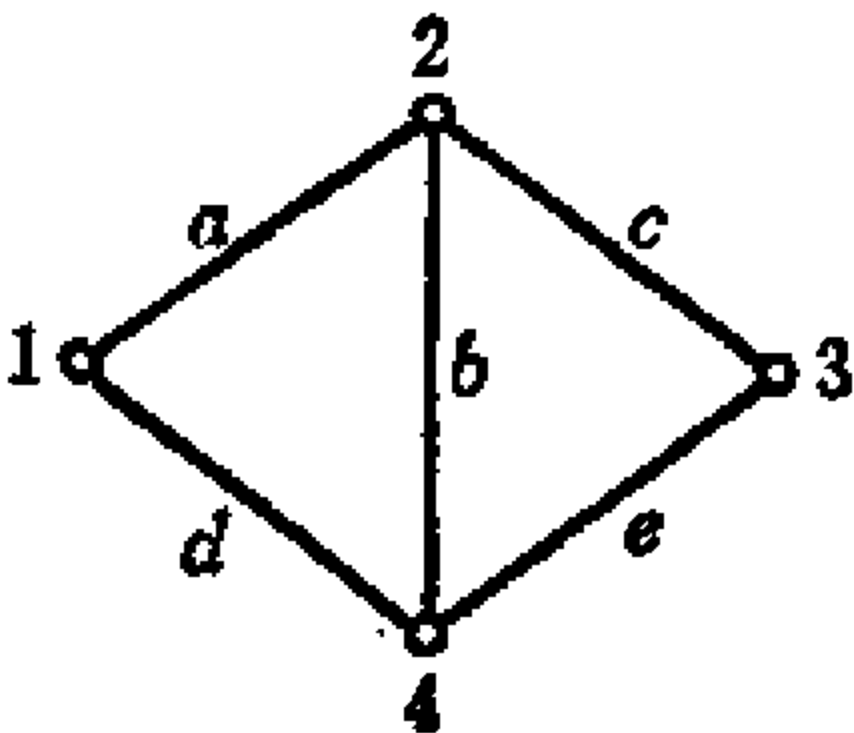


图5-1-1 一个线图

经常会有这样的需要：对于两个确定的顶点，要找出分离它们的所有割集。如果我们能从一个线性无关割集的集合来生成这些割集，比起直接从一个线图中找出所有这样的割集来，可能要简单些。

在 2-3 节中，我们曾得到一个结论：集体 $\{S\}$ 是环和运算下的阿贝尔群。并且，在 $\{S\}$ 中有 $n_v - \rho$ 个生成元，由它们经环和运算可以生成 $\{S\}$ 中所有的集合。显然，分离顶点 i 和 j 的割集

也都在 $\{S\}$ 中。但是，为了只把这些分离顶点 i 和 j 的割集找出来，还必须知道关于 $S(i; j)$ 和 $S(ij; .)$ 这两类割集的某些东西，即

1. 如果我们对 $S(i; j)$ 类中的两个割集作环和，〔或者对 $S(ij; .)$ 类中的两个割集作环和〕^{*}，将得到哪一类的割集？

2. $S(i; j) \oplus S(ij; .)$ 是哪一类的割集？

我们知道，两个割集的环和可能是一个割集，也可能是割集的无重边并。不过，我们首先要来研究两个割集的环和是割集的情况。

定理5-1-2 如果两个割集的环和 $S_1(i; j) \oplus S_2(i; j)$ 是一个割集，那么这个割集不把顶点 i 和 j 分离开。如果 $S_1(i; j) \oplus S_2(ij; .)$ 是割集，那么它把顶点 i 和 j 分离开。如果两个割集的环和 $S_3(ij; .) \oplus S_4(ij; .)$ 是割集，那么它不把顶点 i 和 j 分离开。

证明： 对于第一部分的证明，我们可考虑图 2-3-1 所示的线图。假定顶点 i 在 Ω_{11} 里，顶点 j 在 Ω_{22} 里。因此 $S_1(i; j)$ 和 $S_2(i; j)$ 由式(2-3-13)和式(2-3-14)给出，其中 $\Omega_1 = \Omega_{11} \cup \Omega_{12}$ ， $\Omega_2 = \Omega_{11} \cup \Omega_{21}$ 。于是，用 Ω 代替 Ω_i ，据式(2-3-17)，

$$S_1(i; j) \oplus S_2(i; j) = \mathcal{E}(\Omega_3 \times \bar{\Omega}_3) \quad (5-1-1)$$

其中 $\Omega_3 = \Omega_{11} \cup \Omega_{22}$ 。因为顶点 i 和 j 都在 Ω_3 中，故定理的第一部分是正确的。用同样的方法，易证定理的第二、三部分。（证毕）

例如，考虑图5-1-2所示的线图。可以看出，割集 $S_1 = (a, d)$ 不分离顶点 i 和 j ，但割集 $S_2 = (b, d)$ 分离顶点 i 和 j 。由于 $S_1 \oplus S_2$ 也是割集，故据定理 5-1-2， $S_1 \oplus S_2 = S_3$ 分离顶点 i 和 j 。

我们已经看到，所有的割集，割集的无重边并和空集的集体 $\{S\}$ 构成一个阿贝尔群。在 $\{S\}$ 中，有 $n_0 - \rho$ 个生成元（线性无关割集），它们能生成 $\{S\}$ 中的所有元素。例如，在图5-1-2所示的线图中，用割集 S_1, S_2, S_3 即可将 $\{S\}$ 中所有元素表示为：

^{*} 括号中一句是译者加的，以与下文一致。——译注

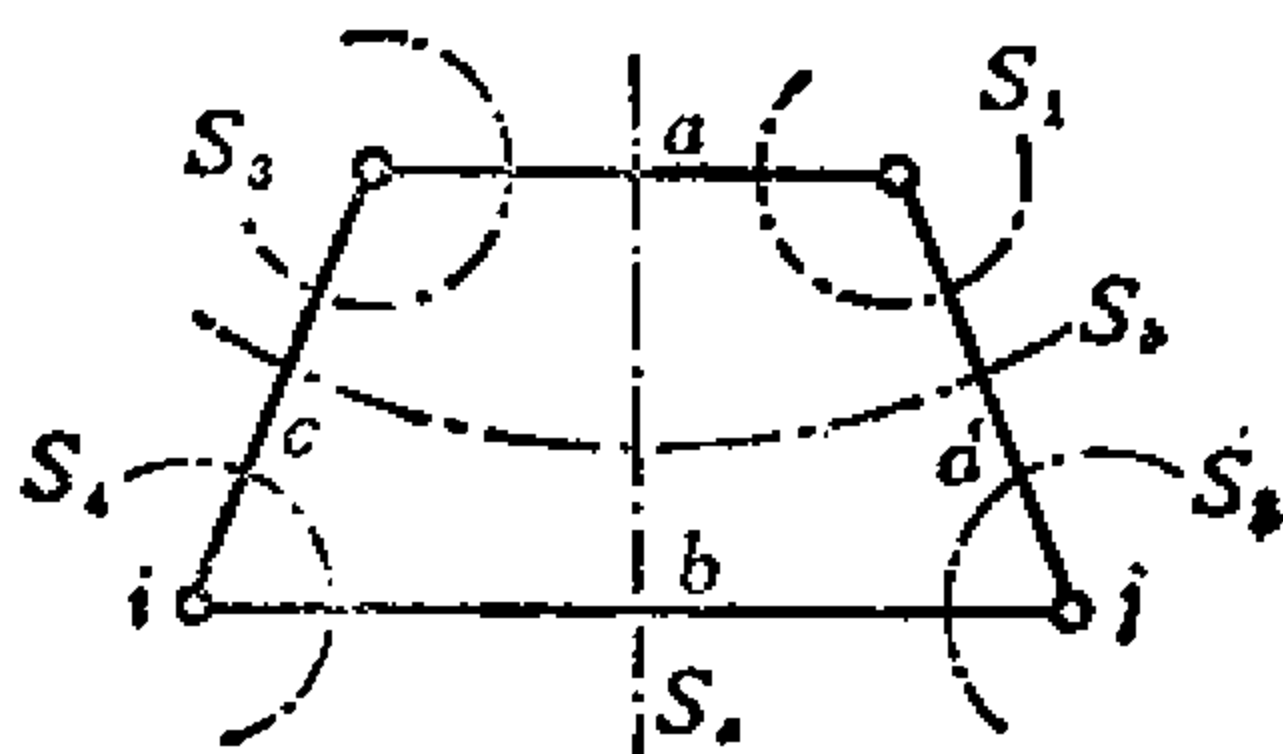


图5-1-2 一个线图

$$\{S\} = \{\phi, S_1, S_2, S_3, S_1 \oplus S_2, S_1 \oplus S_3, S_2 \oplus S_3, S_1 \oplus S_2 \oplus S_3\}$$

可以看出, S_2 , $S_1 \oplus S_2$ 和 $S_1 \oplus S_2 \oplus S_3$ 都是分离顶点 i 和 j 的割集。如果我们把割集的非重边并 $S_2 \oplus S_3$ 也算进去, 则集体

$$\{S(i, j)\} = \{S_2, S_1 \oplus S_2, S_2 \oplus S_3, S_1 \oplus S_2 \oplus S_3\}$$

具有这样的性质: 其中每一个元都包含 S_2 。注意, 在我们所选取的线性无关割集 S_1, S_2, S_3 中, 只有 S_2 是分离了顶点 i 和 j 的。并且, 分离 i 和 j 的全部割集的集体为 $\min\{S(i, j)\}$ (见定义 1-6-1)。但是, 在定理 5-1-2 中, 并没有考虑 $S_2 \oplus S_3$ 和 $S_1 \oplus S_2 \oplus S_3$ 这样两种情况。因此, 我们还要补充研究这两种情形: (1) 两个割集的非重边并不是割集; (2) 三个以上割集的非重边并。下面几个定理给出了当所得结果不是割集时, 两个割集非重边并的性质。

定理 5-1-3 如果两个割集的非重边并 $S_1(i, j) \oplus S_2(i, j, \dots)$ 不是割集, 则它可表示为割集 S'_1, S'_2, \dots, S'_p 的非重边并, 使得在 S'_1, S'_2, \dots, S'_p 中, 恰有一个分离顶点 i 和 j 的割集。

证明: 假定 $S_1(i, j)$ 和 $S_2(i, j, \dots)$ 分别由式 (2-3-13) 和式 (2-3-14) 表示。并设顶点 i 在 Ω_{11} 中, 顶点 j 在 Ω_{21} 中, 其中 $\Omega_1 = \Omega_{11} \cup \Omega_{12}$, $\Omega_2 = \Omega_{11} \cup \Omega_{21}$ 。于是, 用 Ω 代替 Ω_c , 据式 (2-3-17), 删除 $S_1(i, j) \oplus S_2(i, j, \dots)$ 中所有边得到的图由 $\mathcal{G}(\Omega_3 \times \Omega_3)$ 和 $\mathcal{G}(\bar{\Omega}_3 \times$

$\bar{\Omega}_3$) 所构成, 其中 $\Omega_3 = \Omega_{31} \cup \Omega_{32}$. 我们注意到, $i \in \Omega_3, j \in \bar{\Omega}_3$. 假定 $\mathcal{E}(\Omega_3 \times \Omega_3)$ 由 k 个最大连通子图所构成, 而 $\mathcal{E}(\bar{\Omega}_3 \times \bar{\Omega}_3)$ 由 m 个最大连通子图构成, 如图 2-3-7 所示. 不失一般性, 设 $i \in g_{a1}, j \in g_{b1}$. 而且, 在图 2-3-8 中, 由 g_{c1} 包含 g_{b1} , 故顶点 j 在 g_{c1} 中. 于是, 从图 2-3-8 中, 我们可以看出, $\mathcal{E}(\Omega_{a1} \times \bar{\Omega}_{a1})$ 里有一个割集分离了顶点 i 和顶点 j . 设这个割集是 S'_1 . 显然, 在割集的无重边并 $S_1(i; j) \oplus S_2(ij; .)$ 的各个割集中, S'_1 是唯一的一个分离顶点 i 和顶点 j 的割集. (证毕)

考虑图 5-1-2 所示的线图. 设 $S_a(i; j) = (a, b), S_b(ij; .) = (c, d)$, 则 $S_a \oplus S_b = (a, b, c, d)$, 它是割集的无重边并. 这里有一个问题, 即这个割集的无重边并是由哪些割集组成的. 显然, 构成这个割集的无重边并的一个割集集合, 就由 $S_a(i; j)$ 和 $S_b(ij; .)$ 组成. 另一个集合可看作 $S_1 = (a, d)$ 和 $S_4 = (b, c)$. 还有一个集合是 $S_2 = (b, d)$ 和 $S_3 = (a, c)$. 换句话说, 割集的无重边并 (a, b, c, d) 可以分别看成下面几组割集的无重边并: (1) S_a 和 S_b , (2) S_1 和 S_4 , (3) S_2 和 S_3 . 定理 5-1-3 说明, 在这几组割集中, 一定有一组, 其中恰包含一个分离 i 和 j 的割集. 下面的定理告诉我们, 这几组割集中, 任何一组都恰包含一个分离 i 和 j 的割集.

定理 5-1-4 假定在一个线图 G 中, 顶点 i 和 j 之间存在一条路径. 如果两个割集的环和 $S_1(i; j) \oplus S_2(ij; .)$ 不是一个割集, 则无论将 $S_1(i; j) \oplus S_2(ij; .)$ 表示为怎样一个割集的无重边并, 其中总恰有一个割集, 是分离顶点 i 和 j 的.

证明: 与定理 5-1-3 的证明作同样的假设, 则可得到图 2-3-7 和图 2-3-8 所示的线图. 注意, 顶点 j 在 g_{b1} 中. 由于边集 $\mathcal{E}(\Omega_{a1} \times \Omega_{b1})$ 的边都在 $S_1(i; j) \oplus S_2(ij; .)$ 中, 而构成这个割集的无重边并的各个割集之间, 没有公共的边, 所以这个边集一定恰好在其中的一个割集之中. 另一方面, 为了分离顶点 i 和 j , 割

集中必然要包含集合 $\mathcal{C}(\Omega_{a_1} \times \Omega_{b_1})$. (证毕)

对于两个割集的环和 $S_1(i, j) \oplus S_2(i, j)$ 及 $S_1(i, j; \cdot) \oplus S_2(i, j; \cdot)$, 如果所得的结果不是一个割集, 则有以下定理.

定理5-1-5 如果两个割集的环和 $S_1(i, j) \oplus S_2(i, j)$ 不是一个割集, 那么它可以表示为割集 S'_1, S'_2, \dots, S'_p 的无重边并, 其中, 或者恰有两个分离顶点 i 和 j 的割集, 或者没有分离 i 和 j 的割集.

证明: 我们采用与定理 5-1-3 的证明相同的假设, 只是这时 $j \in \Omega_{22}$. 因此, 在图 2-3-7 所示的线图中, 顶点 i 和 j 有两种可能的位置. 假定顶点 i 和 j 都在 g_{a_1} 中, 则显然 S'_1, S'_2, \dots, S'_p 都不分离顶点 i 和 j . 假定顶点 i 在 g_{a_1} 中, 顶点 j 在 g_{a_2} 中, 则由定理5-1-3的证明, 显然在 $\mathcal{C}(\Omega_{a_1} \times \bar{\Omega}_{a_1})$ 中恰有一个割集分离顶点 i 和 j , 在 $\mathcal{C}(\Omega_{a_2} \times \bar{\Omega}_{a_2})$ 中也恰有一个割集分离顶点 i 和 j . 因此, 我们选取这些割集来构成割集的无重边并时, 其中恰有两个分离顶点 i 和 j 的割集. (证毕)

定理5-1-6 如果两个割集的环和 $S_1(i, j) \oplus S_2(i, j)$ 不是一个割集, 则无论将 $S_1(i, j) \oplus S_2(i, j)$ 表示成怎样一个割集的无重边并, 其中或者恰包含两个分离顶点 i 和 j 的割集, 或者不包含分离顶点 i 和 j 的割集.

证明: 我们采用与定理 5-1-5 的证明相同的假设. 当顶点 i 和 j 都在 g_{a_1} 中时, 显然没有分离顶点 i 和 j 的割集. 因此, 我们假定顶点 $i \in g_{a_1}$, 顶点 $j \in g_{a_2}$. 在图2-3-9中, 由于对 $r = 1, 2, \dots, n$, g_{a_2} 必在 g_{a_r} 中的某一个里, 故我们假定 g_{a_2} 在 g_{a_1} 里, 如图 5-1-3所示.

在 g_{c_1} 中, 把从 g_{a_1} 和 g_{a_2} 的顶点连接到 g_{c_1} 里除 g_{a_2} 外的那些顶点的边删去, 则所得图的最大连通子图是 $g_{d_1}, g_{d_2}, \dots, g_{d_u}$ 以及 g_{a_2} . 换句话说, 当 $\mathcal{C}(\Omega_{a_1} \times \Omega_{d_1}), \mathcal{C}(\Omega_{a_1} \times \Omega_{d_2}), \dots, \mathcal{C}(\Omega_{a_1} \times \Omega_{d_u}), \mathcal{C}(\Omega_{a_1} \times \Omega_{a_2}), \mathcal{C}(\Omega_{d_2} \times \Omega_{c_2}), \dots, \mathcal{C}(\Omega_{d_u} \times \Omega_{c_2})$ (其中,

对 $r = 1, 2, \dots, u$, Ω_{dr} 是 g_{dr} 中所有顶点的集合) 被删去时, 这些子图变成 g_{c1} 的最大连通子图。注意, 从 g_{d1} 中顶点到 g_{c1} 中顶点的边, 都是与 $g_{d1}, g_{d2}, \dots, g_{du}$ 中顶点相连的边。另一个方面, 由于我们假设 g_{c1} 是连通的, 故从 g_{d2} 中顶点连接到 g_{c1} 中其余的顶点的边, 就是与子图 $g_{d1}, g_{d2}, \dots, g_{di}, g_{di+1}, \dots, g_{du}$ 的各顶点相连的边。

可以看出, 由 $\mathcal{E}(\Omega_{d1} \times \Omega_{d1}), \mathcal{E}(\Omega_{d1} \times \Omega_{d2}), \dots, \mathcal{E}(\Omega_{d1} \times \Omega_{du}), \mathcal{E}(\Omega_{d2} \times \Omega_{d1}), \mathcal{E}(\Omega_{d2} \times \Omega_{d2}), \dots, \mathcal{E}(\Omega_{d2} \times \Omega_{di})$ 中的边组成的割集的无重边并, 不论以何种方式组成, 或者包含两个分离 i 和 j 的割集, 或者不包含分离 i 和 j 的割集。我们还可以看出, 由其余的边组成割集的无重边并, 无论以何种方式组成, 都不可能分离 i 和 j 的割集。因此定理为真。 (证毕)

定理5-1-7 如果两个割集的环和 $S_1(ij;.) \oplus S_2(ij;.)$ 不是一

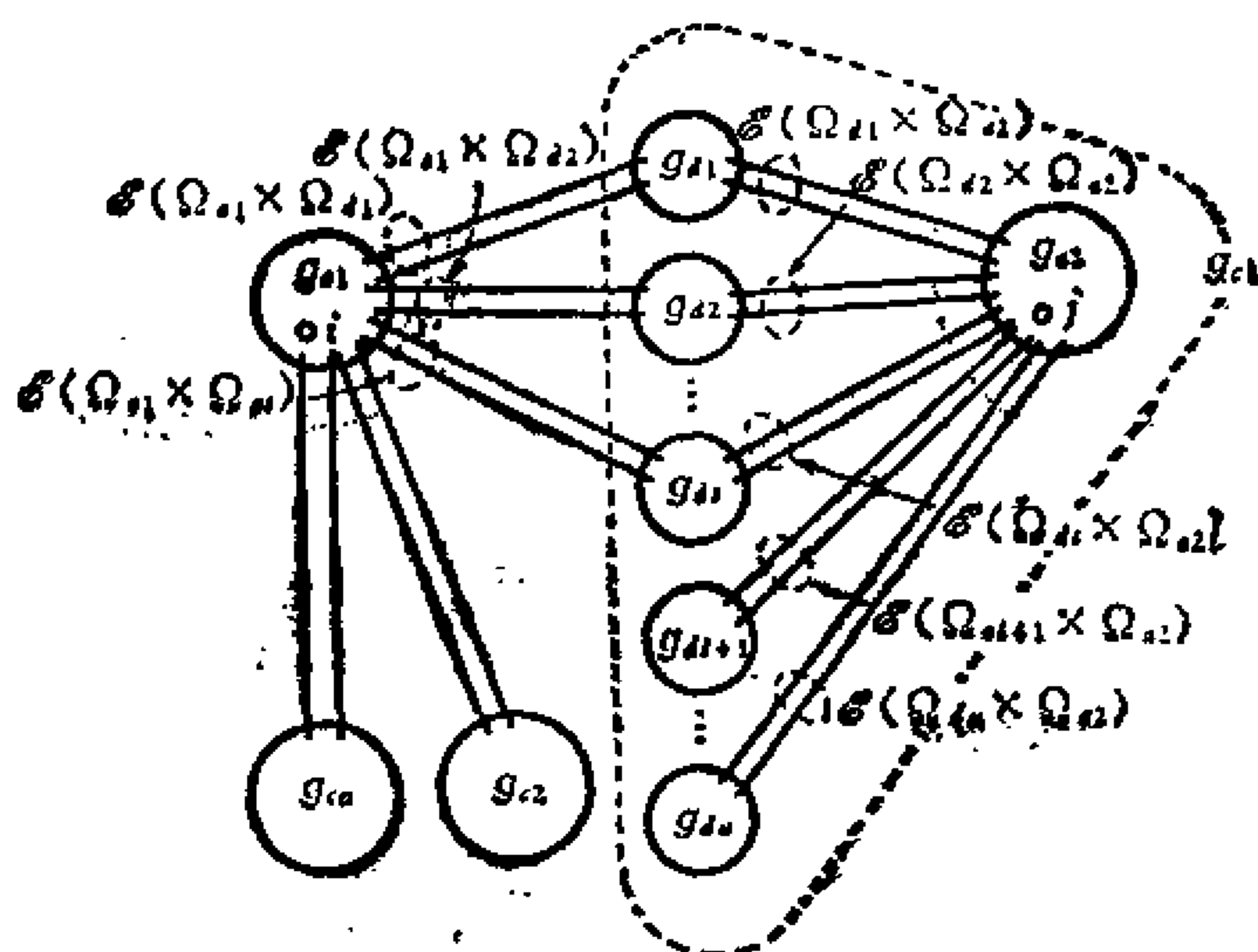


图5-1-3 最大连通子图 $g_{d1}, g_{d2}, \dots, g_{du}$

个割集，那么无论将 $S_1(ij;.) \oplus S_2(ij;.)$ 表示成怎样一个割集的无重边并，其中或者恰包含两个分离顶点 i 和 j 的割集，或者没有分离顶点 i 和 j 的割集*。

这个定理的证明与定理 5-1-6 的证明相似。

在图5-1-4中，有两个线图。图5-1-4(a)是 $S_1(i; j) \oplus S_2(i; j)$ 的一个例子，它表明了 $S_1(i; j) \oplus S_2(i; j)$ 的两种可能的表示方法，即我们可以取 S_{a1} 和 S_{a2} 来构成这个割集的无重边并，也可以取 S_{b1} 和 S_{b2} 来构成这个割集的无重边并。注意， S_{a1} 和 S_{a2} 都分离顶点 i 和 j ，而 S_{b1} 和 S_{b2} 都不分离顶点 i 和 j 。

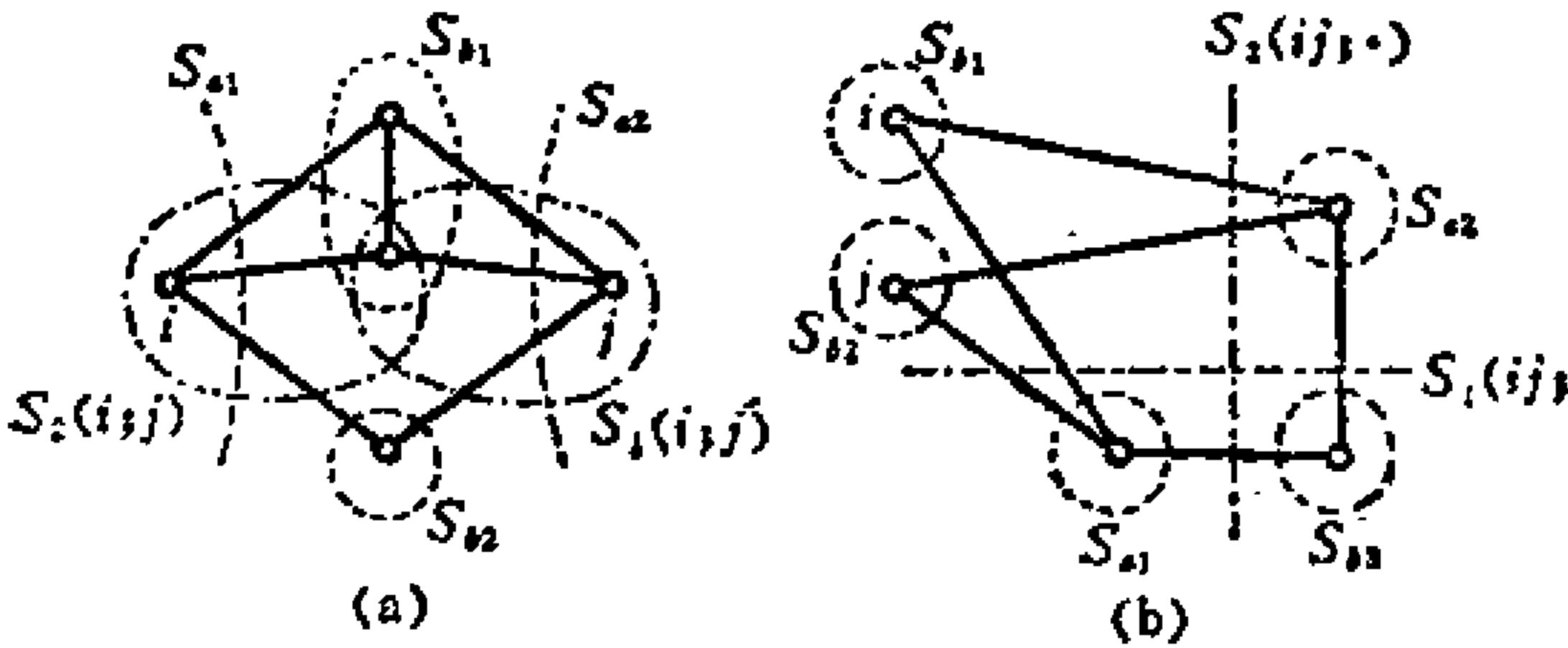


图5-1-4

(a) $S_1(i; j) \oplus S_2(i; j)$ 的例子，(b) $S_1(ij;.) \oplus S_2(ij;.)$ 的例子

在图5-1-4(b)中，将 $S_1(ij;.) \oplus S_2(ij;.)$ 表示为割集的无重边并，有三种不同的选择割集的方法。因为 $S_1(ij;.)$ 和 $S_2(ij;.)$ 没有公共边，故这两个割集就可以组成一个割集的无重边并。如果取 S_{a1} 和 S_{a2} ，二者都不分离顶点 i 和 j ，我们又得到 $S_1(ij;.) \oplus S_2(ij;.)$ 的一种表示法。如果我们用 S_{b1} 、 S_{b2} 和 S_{b3} 来表示 $S_1(ij;.) \oplus S_2(ij;.)$ ，就得到恰有两个割集分离顶点 i 和 j 的情形。

正如我们早先所讨论的，每一个割集都可以表示为一些生成

* 定理最后一句，照原文直译为“或者包含若干个分离顶点 i 和 j 的割集”，疑有误，现据上下文作了改动。——附注

元的环和。显然分离两个确定顶点的割集也可以用同样的方法来表示。因此，为了由一些生成元的环和来生成分离两个确定顶点的所有割集，我们应当了解三个以上割集的环和，而这又相当于了解两个割集的无重边并的环和。为此，我们把符号 $S(i, j)$ 和 $S(ij, .)$ 的定义推广如下。

定义5-1-3 如果集合 $S = \mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 具有这样的性质： $i \in \Omega_1, j \in \bar{\Omega}_1$ ，则说 S 分离了 i 和 j ，记为 $S(i, j)$ ；如果集合 $S = \mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 具有这样的性质： i 和 j 都在 Ω_1 （或 $\bar{\Omega}_1$ ）中，则 S 不把 i 和 j 分离开，记为 $S(ij, .)$ 。注意，这里 S 是一个割集，或者是一个割集的无重边并。

用这个定义，可以将定理 5-1-2 到定理 5-1-7 推广为如下形式。

定理5-1-8 $S_1(i, j) \oplus S_2(i, j)$ 与 $S'_1(ij, .) \oplus S'_2(ij, .)$ 的环和不分离顶点 i 和 j ，而 $S''_1(i, j) \oplus S''_2(ij, .)$ 分离顶点 i 和 j 。

这个定理的证明与前面几个定理的证明是相同的。

在一个线图 G 中，假定每一个顶点代表一个岛，每一条边代表两个岛之间的一座桥。于是问题就变成：要使两个指定的岛 i 和 j 之间没有路径，找出必须破坏的桥的最少数目。为了回答这个问题，我们定义边集合 S 的值为这个集合中边的数目，记为 $V[S]$ 。又设 $\{S^0(i, j)\}$ 是分离 i 和 j 的所有割集的集合， $\{S(i, j)\}$ 是所有分离 i 和 j 的割集和割集的无重边并的集合。那么，被破坏的桥的最少数目 N 是

$$N = \min \{V[S], S \in \{S^0(i, j)\}\} \quad (5-1-2)$$

对于任何一个分离顶点 i 和 j 的割集的无重边并 S ，总存在一个割集 S' ，它是 S 的真子集，并且分离顶点 i 和 j 。因此

$$\min \{V[S], S \in \{S^0(i, j)\}\} = \min \{V[S], S \in \{S(i, j)\}\} \quad (5-1-3)$$

这样，我们只需要生成 $\{S(i, j)\}$ 中所有的集合即可，而无需

知道它们中哪些是割集。作为一个例子，我们考虑图 5-1-5 中的图 G 。据定理 3-1-4，要生成一个图中所有的割集和割集的无重边并，我们只要知道 $n_v - 1$ 个线性无关的关联集即可。在这个例子里， $n_v = 5$ 。假定我们选取下列关联集作为 $n_v - 1$ 个线性无关的集合：

$$\begin{aligned} S(i) &= (1, 2, 3, 4) \\ S(j) &= (5, 6, 7, 8) \\ S(v_1) &= (3, 5, 6) \\ S(v_2) &= (2, 7, 9) \end{aligned}$$

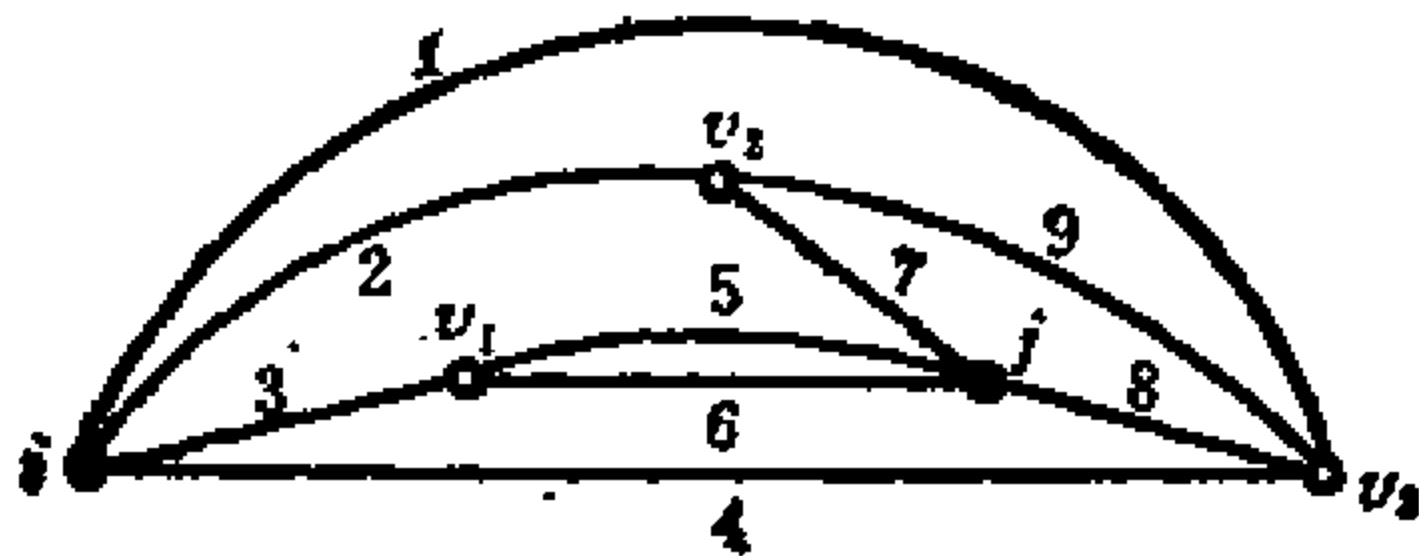


图5-1-5 线图 G 及顶点 i 和 j

据定理 5-1-8， $\{S(i, j)\}$ 中任一集合必须包含 $S(i)$ 或 $S(j)$ ，但不能同时包含这两个割集。注意，在这些线性无关集合中，只有 $S(i)$ 和 $S(j)$ 分离顶点 i 和 j 。因此我们可取 $S(i)$ 或 $S(j)$ ，与另两个关联集 $S(v_1)$ 和 $S(v_2)$ 作各种可能的组合，来得到 $\{S(i, j)\}$ ：

$$\begin{aligned} S(i) &= (1, 2, 3, 4) \\ S(i) \oplus S(v_1) &= (1, 2, 4, 5, 6) \\ S(i) \oplus S(v_2) &= (1, 3, 4, 7, 9) \\ S(i) \oplus S(v_1) \oplus S(v_2) &= (1, 4, 5, 6, 7, 9) \\ S(j) &= (5, 6, 7, 8) \\ S(j) \oplus S(v_1) &= (3, 7, 8) \\ S(j) \oplus S(v_2) &= (2, 5, 6, 8, 9) \\ S(j) \oplus S(v_1) \oplus S(v_2) &= (2, 3, 8, 9) \end{aligned}$$

于是我们可以看出, $N = 3$, 应当破坏的桥是 3, 7, 8.

割集类 $S(i, j)$ 的重要应用之一, 是用于通讯网络领域, 其中, 两个顶点之间的容量与 $S(i, j)$ 类中的一个割集有直接的关系. 这个内容, 将在以后的章节中讨论.

5-2 伪 割

考虑两个互相对偶的线图 G_1 和 G_2 . 在 4-3 节中, 我们曾发现, G_1 的任一个回路对应于 G_2 的一个割集. 这里, 我们将介绍一种称为伪割的子图, 它具有与路径相似的性质. 并且, 我们将看到, G_1 中的任一路径与对偶图 G_2 中的一个伪割对应. 我们从研究 G_2 中与 G_1 的一条路径对应的子图开始.

设 e 是 G_1 的一条边, 其端点为顶点 i 和 j . 设 e' 是 G_2 中与边 e 对应的边. 这里, G_1 和 G_2 是互相对偶的. 考虑 G_1 中顶点 i 和 j 之间的一条路径 $P (\neq e)$. 我们知道, $(e) \cup P$ 是 G_1 的一个回路, 而 G_2 中存在一个与 G_1 的回路 $(e) \cup P$ 对应的割集 S . 因此, G_2 中与 G_1 的路径 P 对应的子图是 $S \oplus (e')$. 显然, 该集合 $S \oplus (e')$ 不是一个割集. 我们称这样的集合为关于边 e' 的伪割.

在 G_1 中, 考虑顶点 i 和 j 之间两条不同的路径 P_1 和 P_2 . 假定 P_1 和 P_2 都不包含边 e , 则在 G_2 中存在两个伪割 $S_1 \oplus (e')$ 和 $S_2 \oplus (e')$, 其中 S_1 和 S_2 分别是 G_2 中对应于 G_1 的回路 $P_1 \cup (e)$ 和 $P_2 \cup (e)$ 的割集. 我们知道, $P_1 \oplus P_2$ 或为回路, 或为回路的无重边并, 因此 G_2 中与 $P_1 \oplus P_2$ 对应的子图必为割集或割集的无重边并. 由

$$[S_1 \oplus (e')] \oplus [S_2 \oplus (e')] = S_1 \oplus S_2 \quad (5-2-1)$$

根据定理 2-3-2, 我们可以看出, G_2 中的对应子图确为割集或割集的无重边并. 换句话说, 关于同一条边的两个伪割的环和或为割集, 或为割集的无重边并. 前面, 我们已定义了一个线图的路

径，不论这个线图是平面的还是非平面的。下面我们要定义关于一条边的伪割。

定义5-2-1 关于边 e' 的伪割 U 是一个边的集合，

$$U = S \oplus (e') \quad (5-2-2)$$

其中 S 或为包含边 e' 的割集，或为空集。

由这个定义，显然关于同一条边的两个伪割的环和或为割集，或为割集的无重边并。

为了简便，我们定义符号 $\{S\}$ 和 $\{S^0\}$ 如下。

定义5-2-2 符号 $\{S\}$ 表示所有割集，割集的无重边并和空集的集体。符号 $\{S^0\}$ 是所有割集和空集的集体。即

$$\{S^0\} = \min \{S\} \quad (5-2-3)$$

(见定义1-6-1)

现在，我们来进一步推广伪割的定义。

定义5-2-3 设 U_1 是 $\{S\}$ 中一个集合的真子集，则集体 $\{U\}_{U_1}$ 定义为

$$\{U\}_{U_1} = \min \{U_1 \oplus S; S \in \{S\}\} \quad (5-2-4)$$

其中， $\{U\}_{U_1}$ 里的每一个集合称为关于 U_1 的伪割或集体 $\{U\}_{U_1}$ 中的伪割。

由此定义，显然伪割不是割集。但是，关于 U_1 的两个伪割的环和，或为割集，或为割集的无重边并。为了说明这一点，设 U_a 和 U_b 在 $\{U\}_{U_1}$ 中，则 U_a 和 U_b 可以表示为

$$U_a = U_1 \oplus S_1 \quad (5-2-5)$$

$$U_b = U_1 \oplus S_2 \quad (5-2-6)$$

其中 S_1 和 S_2 都在 $\{S\}$ 中。因此

$$U_a \oplus U_b = U_1 \oplus S_1 \oplus U_1 \oplus S_2 = S_1 \oplus S_2 \quad (5-2-7)$$

显然它或为割集，或为割集的无重边并。假定 $U_a = U_1$ ，则

$$U_a \oplus U_b = U_1 \oplus U_1 \oplus S_2 = S_2 \quad (5-2-8)$$

它仍是一个割集。

定理5-2-1 任意两个关于 U_1 的伪割的环和或为割集，或为割集的无重边并。

这个定理直接导出下一个定理。

定理5-2-2

$$\{U\}_{U_1} \otimes \{U\}_{U_1} = \{S^0\} \quad (5-2-9)$$

例5-2-1 考虑图5-2-1

所示的线图，设 $U_1 = (a)$ ，则

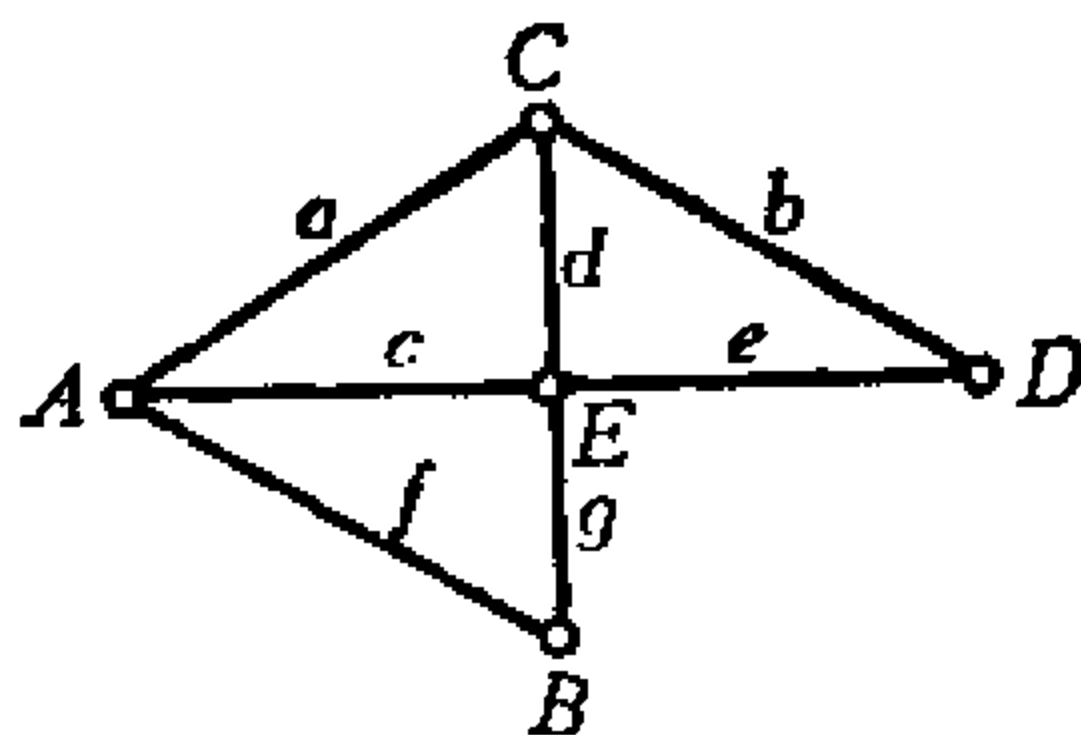


图5-2-1 一个线图

$$\{U\}_a = \{(a), (c, f), (b, d), (d, e), (c, g)\}$$

$$\begin{aligned} \{U\}_a \otimes \{U\}_a = & \{\phi, (a, c, f), (a, b, d), (a, d, e), (a, c, g), \\ & (b, c, d, f), (c, d, e, f), (f, g), (b, e), \\ & (b, c, d, g), (c, d, e, g)\} \end{aligned}$$

它是 $\{S^0\}$ 。注意，从例2-3-3中我们知道，

$$\begin{aligned} \{S\} = & \{\phi, (a, c, f), (a, b, d), (a, d, e), (a, c, g), (b, e), \\ & (f, g), (c, d, e, f), (a, b, c, e, f), (a, d, e, f, g), \\ & (b, e, f, g), (b, c, d, f), (c, d, e, g), (a, b, c, e, g), \\ & (a, b, d, f, g), (b, c, d, g)\} \end{aligned}$$

在定义5-2-3中，集体 $\{U\}_{U_1}$ 由 $\min\{U_1 \oplus S; S \in \{S\}\}$ 给出。如果 U_1 是 S 中的一个割集，则据定理2-3-2， $\min\{S \oplus S'; S' \in \{S\}\}$ 显然等于 $\{S^0\}$ 。

定理5-2-3 设 S 是 $\{S\}$ 中的一个集合，则

$$\{S^0\} = \min\{S \oplus S'; S' \in \{S\}\} \quad (5-2-10)$$

注意，如果我们在式(5-2-10)的右边将 $\{S\}$ 换成 $\{S^0\}$ ，可能就得不到等式，即我们只能说

$$\{S^0\} \supset \min\{S \oplus S'; S' \in \{S^0\}\} \quad (5-2-11)$$

以下两个定理是显然的。

定理5-2-4

$$\{S^0\} \otimes \{S^0\} = \{S^0\} \quad (5-2-12)$$

定理5-2-5

$$\{U\}_{U_1} \otimes \{S^0\} = \{U\}_{U_1} \quad (5-2-13)$$

前面说过, 如果路径 P_1 和 P_2 在 $\{P_{ij}\}$ (见定义1-4-3) 中, 则

$$\begin{aligned} \{P_{ij}\} &= \min\{P_1 \oplus E; E \in \{E\}\} \\ &= \min\{P_2 \oplus E; E \in \{E\}\} \end{aligned}$$

(定理1-6-12). 现在我们看到, $\{U\}_{U_1}$ 有类似的性质.

定理5-2-6 设 U_2 在 $\{U\}_{U_1}$ 中, 则

$$\{U\}_{U_2} = \{U\}_{U_1} \quad (5-2-14)$$

证明: 因为 U_2 在 $\{U\}_{U_1}$ 中, 故存在一个割集 S' , 使得

$$U_2 = U_1 \oplus S' \quad (5-2-15)$$

于是

$$\begin{aligned} \{U\}_{U_2} &= \min\{U_2 \oplus S; S \in \{S\}\} \\ &= \min\{U_1 \oplus S' \oplus S; S \in \{S\}\} \\ &= \min\{U_1 \oplus S''; S'' \in \{S\}\} \end{aligned} \quad (5-2-16)$$

(证毕)

例如, 在例 5-2-1 中, (c, f) 在 $\{U\}_A$ 里, 取 $U_1 = \{c, f\}$, 我们有

$$\begin{aligned} \{U\}_{(c,f)} &= \min\{(c, f) \oplus S; S \in \{S\}\} \\ &= \{(c, f), (a), (c, g), (d, e), (b, d)\} \end{aligned}$$

这一结果与 $\{U\}_A$ 相同.

下面一个定理与考虑路径集体的定理 1-6-9 非常相似.

定理5-2-7 设 S 是 $\{S\}$ 中的一个割集. 又设 U_1, U_2, \dots, U_k 是 S 的真子集, 在这些集合 U_1, U_2, \dots, U_k 中, 任两个之间都没有公共边, 并且所有这些集合 U_1, U_2, \dots, U_k 的并集是 S . 则

$$\{U\}_{U_1} \otimes \{U\}_{U_2} \otimes \dots \otimes \{U\}_{U_k} = \{S^0\} \quad (5-2-17)$$

如果我们能证明下一个定理，就可以用归纳法来证明这个定理。

定理5-2-8 设 U_0 是一个割集的真子集，又设 U_1 和 U_2 是 U_0 的真子集， U_1 和 U_2 没有公共边，且 U_1 与 U_2 的并集是 U_0 。则

$$\{U\}_{U_1} \otimes \{U\}_{U_2} = \{U\}_{U_0} \quad (5-2-18)$$

证明： 我们要证明：(1)对任意的 $U'_0 \in \{U\}_{U_0}$ ，存在 $U'_1 \in \{U\}_{U_1}$ 和 $U'_2 \in \{U\}_{U_2}$ ，使得 $U'_1 \oplus U'_2 = U'_0$ ；(2)对任意的 $U'_1 \in \{U\}_{U_1}$ 和 $U'_2 \in \{U\}_{U_2}$ ， $U'_1 \oplus U'_2$ 在 $\{U\}_{U_0}$ 中，或者 $U'_1 \oplus U'_2$ 的一个真子集在 $\{U\}_{U_0}$ 中。

对于(1)，设

$$U'_0 = U_0 \oplus S' \quad (5-2-19)$$

其中 $S' \in \{S\}$ 。因为

$$U_1 \oplus U_2 = U_0 \quad (5-2-20)$$

我们有

$$U_1 \oplus U_2 \oplus S' = U'_0 \quad (5-2-21)$$

如果 $U_1 \oplus S'$ 在 $\{U\}_{U_1}$ 中，则因 $U_2 \in \{U\}_{U_1}$ ，这两个伪割 $U_1 \oplus S'$ 和 U_2 即为所求的两个集合。当 $U_2 \oplus S'$ 在 $\{U\}_{U_2}$ 中时，这个结论也正确。因此，我们只须考虑，既非 $U_1 \oplus S' \in \{U\}_{U_1}$ ，又非 $U_2 \oplus S' \in \{U\}_{U_2}$ 的情况。在这种情况下， $\{S\}$ 中存在集合 S_1 和 S_2 ，使得

$$U_1 \oplus S_1 \equiv U_1 \oplus S' \quad (5-2-22)$$

$$U_2 \oplus S_2 \equiv U_2 \oplus S' \quad (5-2-23)$$

其中 $U_1 \oplus S_1$ 在 $\{U\}_{U_1}$ 中， $U_2 \oplus S_2$ 在 $\{U\}_{U_2}$ 中（根据式5-2-4）。因为 $U_1 \oplus U_2 \oplus S'$ 在 $\{U\}_{U_0}$ 中，我们有

$$U_1 \oplus U_2 \oplus S_1 \equiv U_1 \oplus U_2 \oplus S' \quad (5-2-24)$$

注意 $U_1 \oplus U_2 \oplus S_1$ 不在 $\{U\}_{U_0}$ 中。否则，由于我们假设 $U_1 \oplus S_1 \in \{U\}_{U_1}$ ，这种情况就变得与上一种情况相同。

由式(5-2-24)，

$$S_1 - (U_1 \cup U_2) \supset S' - (U_1 \cup U_2) \quad (5-2-25)$$

类似地，由式(5-2-22)和式(5-2-23)，我们有

$$S' - U_1 \supset S_1 - U_1 \quad (5-2-26)$$

和

$$S' - U_2 \supset S_2 - U_2 \quad (5-2-27)$$

由于 $U_2 \neq S_2$ ，故这两个等式给出

$$\begin{aligned} (S' - U_1) \cup (S' - U_2) &\supset (S_1 - U_1) \cup (S_2 - U_2) \\ &\equiv S_1 - U_1 \\ &\equiv S_1 - (U_1 \cup U_2) \end{aligned} \quad (5-2-28)$$

因为这个式子的左边等于 $S' - (U_1 \cup U_2)$ ，我们有

$$S' - (U_1 \cup U_2) \equiv S_1 - (U_1 \cup U_2) \quad (5-2-29)$$

但是，由式(5-2-25)， $S' - (U_1 \cup U_2)$ 是 $S_1 - (U_1 \cup U_2)$ 的子集，这是一个矛盾。因此当 $U_1 \oplus S' \in \{U\}_{v_1}$ 和 $U_2 \oplus S' \in \{U\}_{v_2}$ 都不成立时，所求集合是存在的，这就证明了(1)。

对于(2)，设 $U'_1 = U_1 \oplus S'_1$ ， $U'_2 = U_2 \oplus S'_2$ ，这里 S'_1 和 S'_2 都在 $\{S\}$ 中，则

$$U'_1 \oplus U'_2 = U_1 \oplus S'_1 \oplus U_2 \oplus S'_2 = U_0 \oplus S'' \quad (5-2-30)$$

它一定在 $\{U\}_{v_0}$ 中，除非在 $\{U\}_{v_0}$ 中存在 $U_0 \oplus S''$ 的一个真子集。
(证毕)

例5-2-2 图5-2-1所示线图的 $\{S\}$ 是

$$\begin{aligned} \{S\} = \{ &\phi, (a, c, f), (a, b, d), (a, d, e), (a, c, g), (b, e), \\ &(f, g), (c, d, e, f), (a, b, c, e, f), (a, d, e, f, g), \\ &(b, e, f, g), (b, c, d, f), (c, d, e, g), (a, b, c, e, g), \\ &(a, b, d, f, g), (b, c, d, g) \} \end{aligned}$$

由 $U_1 = (a)$ ，得

$$\begin{aligned} \{U\}_a &= \min\{(a) \oplus S; S \in \{S\}\} \\ &= \{(a), (c, f), (b, d), (d, e), (c, g)\} \end{aligned}$$

由 $U_1 = (c)$ ，得

$$\begin{aligned}\{U_c\} &= \min\{(c) \oplus S; S \in \{S\}\} \\ &= \{(c), (a, f), (a, g), (d, e, f), (b, d, f), \\ &\quad (d, e, g), (b, d, g)\}\end{aligned}$$

因此

$$\{U\}_c \oplus \{U\}_c = \{(a, c), (f), (g), (c, d, e), (b, c, d)\} = \{U\}_{(ac)}$$

另外，注意到 (f) 在 $\{U\}_{(ac)}$ 中，因此，据定理5-2-6，

$$\{U\}_{(ac)} = \{U\}_f$$

而由 $\{U\}_f = \min\{(f) \oplus S; S \in \{S\}\}$

也可得到 $\{U\}_{(ac)}$ 。

当一条路径仅由一条边 e 组成时，据定理1-6-10，我们有

$$\{P(e)\} = \min\{(e) \oplus C; C \in \{C\}\} \quad (5-2-31)$$

注意 $\{C\}$ 是所有回路和空集的集体。当 U_1 仅由一条边组成时，也有同样的情况。

定理5-2-9 对于线图的一条边 e ，

$$\{U\}_e = \min\{(e) \oplus S; S \in \{S^0\}\} \quad (5-2-32)$$

注意，一般地说， $\{S^0\}$ 中元素的数目比 $\{S\}$ 中元素的数目要少得多。

证明： 设 $U \in \{U\}_e$ 。假定

$$U = (e) \oplus S$$

其中 S 是割集 S_1, S_2, \dots, S_p 的无重边并。因为要使 U 在 $\{U\}_e$ 中， S_1, S_2, \dots, S_p 中的某一个必须包含边 e 。设 $e \in S_1$ ，则用 $(e) \oplus S_1$ 代替 $(e) \oplus S$ ，它一定在 $\{U\}_e$ 中。因此， $U = (e) \oplus S$ 中的 S 必为割集。 (证毕)

注意，如果 U_1 中的边不止一条，则

$$\{U\}_{U_1} \supset \min\{U_1 \oplus S; S \in \{S^0\}\} \quad (5-2-33)$$

如果我们知道 $\{S^0\}$ 而不是 $\{S\}$ ，以下定理对 $U_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ 给出了 $\{U\}_{U_1}$ 。

定理5-2-10 设 $U_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ ，则

$$\{U\}_{v_1} = \{U\}_{e_1} \otimes \{U\}_{e_2} \otimes \cdots \otimes \{U\}_{e_n} \quad (5-2-34)$$

用定理5-2-8易证明这个定理。

在例5-2-2中,

$$\begin{aligned} \{S^0\} = \{ & \phi, (a, c, f), (a, b, d), (a, d, e), (a, c, g), (b, e), \\ & (f, g), (c, d, e, f), (b, c, d, f), (c, d, e, g), \\ & (b, c, d, g) \} \end{aligned}$$

例如, 要得到 $\{U\}_{(cd)}$, 我们可以不用式 (5-2-4), 而用下面的方法求出 $\{U\}_c$ 和 $\{U\}_d$:

$$\begin{aligned} \{U\}_c &= \min \{ (c) \oplus S, S \in \{S^0\} \} \\ &= \{ (c), (a, f), (a, g), (d, e, f), (b, d, f), \\ &\quad (d, e, g), (b, d, g) \} \\ \{U\}_d &= \min \{ (d) \oplus S, S \in \{S^0\} \} \\ &= \{ (d), (a, b), (a, e), (c, e, f), (b, c, f) \\ &\quad (c, e, g), (b, c, g) \} \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \{U\}_{(cd)} &= \{U\}_c \otimes \{U\}_d \\ &= \{ (c, d), (a, b, c), (a, c, e), (e, f), (b, f), (e, g), \\ &\quad (b, g), (a, d, f), (a, d, g) \} \end{aligned}$$

把一个线图映射到一个圆环的表面上。如果我们需要用删去一些边的方法, 破开围绕着圆环中心孔的所有回路, 那么, 由这些必须删去的边组成的集合, 只要其任何一个真子集都不具备这样的功能, 就构成一个伪割。例如, 图 5-2-2 所示, 就是这种情况。 $\{S\}$ 是所有

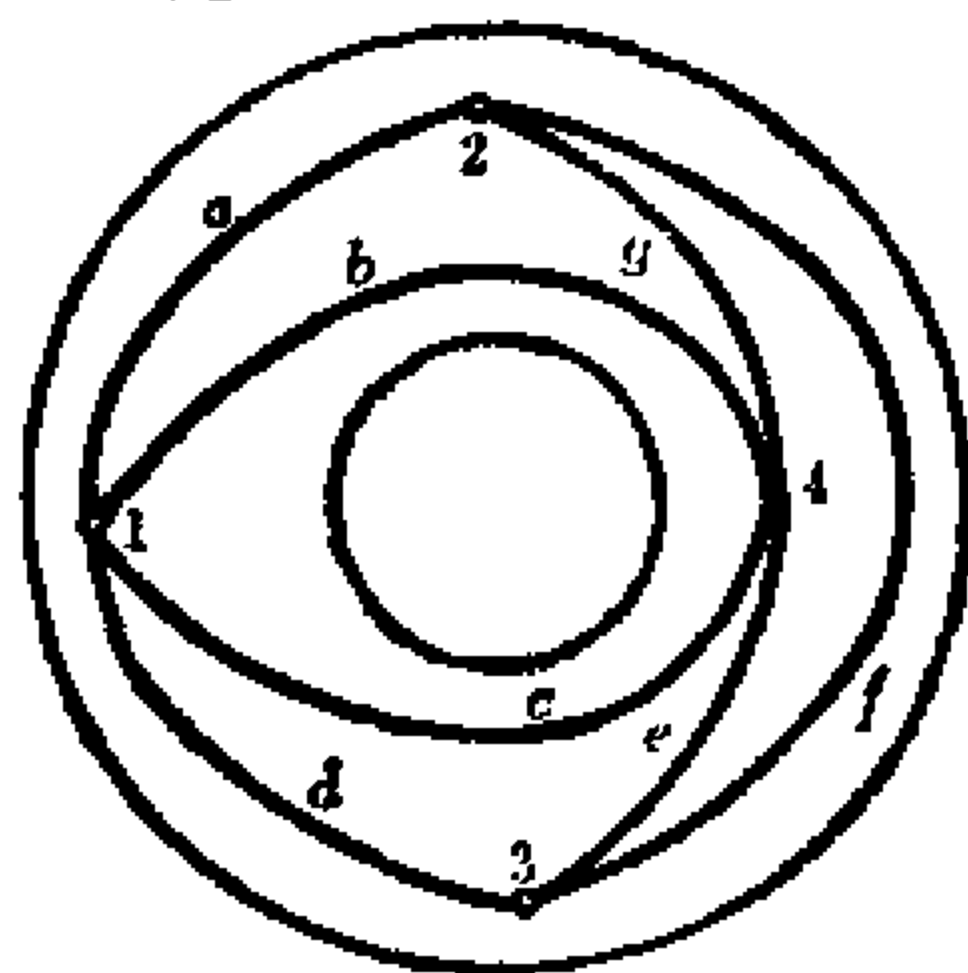


图5-2-2 圆环上的一个线图

割集。割集是无重边并和空集的集体。由于 $\{S\}$ 可以由 $n_{v_1}-1$ 个线性无关的关联集得到，所以我们从以下三个关联集，即可得到关于 U_1 的伪割集合：

$$S(1) = (a, b, c, d)$$

$$S(2) = (a, f, g)$$

$$S(3) = (d, e, f)$$

取 $U_1 = (c, d)$ ，显然它能破开所有围绕圆环中心孔的回路，我们有

$$U_2 = (c, d) \oplus S(1) = (a, b)$$

$$U_3 = (c, d) \oplus S(2) = (a, c, d, f, g)$$

$$U_4 = (c, d) \oplus S(3) = (c, e, f)$$

$$U_5 = (c, d) \oplus S(1) \oplus S(2) = (b, f, g)$$

$$U_6 = (c, d) \oplus S(1) \oplus S(3) = (a, b, d, e, f)$$

$$U_7 = (c, d) \oplus S(2) \oplus S(3) = (a, c, e, g)$$

$$U_8 = (c, d) \oplus S(1) \oplus S(2) \oplus S(3) = (b, d, e, g)$$

其中，边集 U_1, U_2, U_4, U_5, U_7 和 U_8 具有这样的功能：删去其中任何一个，都能破开围绕圆环中心孔的所有回路，而删去这些集合的真子集，则不能达到这个目的。显然，这些边集构成 $\{U\}_{v_1}$ 。

考虑两个伪割 U_a 和 U_b 的环和，其中 $U_a \in \{U\}_{v_1}, U_b \in \{U\}_{v_1}$ ：

$$\begin{aligned} U_a \oplus U_b &= (S_a \oplus U_1) \oplus (S_b \oplus U_2) = S_a \oplus S_b \oplus (U_1 \oplus U_2) \\ &= S_c \oplus U \end{aligned} \quad (5-2-35)$$

其中 S_a, S_b, S_c 在 $\{S\}$ 中，而

$$U = U_1 \oplus U_2 \quad (5-2-36)$$

因为这里不保证 U 是 $\{S\}$ 中某一割集的真子集，根据上面的定义， $S_c \oplus U$ 不一定是一个伪割，但是任意两个集合 $S_c \oplus U$ 和 $S_d \oplus U$ 满足

$$(S_c \oplus U) \oplus (S_d \oplus U) = S_e$$

其中 S_c, S_d, S_e 都在 $\{S\}$ 中，这就是说，任意两个这样的集合的

环和在 $\{S\}$ 中。因此，我们推广伪割的定义，使其包括这种集合。

定义5-2-4 对于边的集合 \mathcal{E} ，关于 \mathcal{E} 的伪割的集合 $\{U\}_{\mathcal{E}}$ 定义为

$$\{U\}_{\mathcal{E}} = \min \{ \mathcal{E} \oplus S; S \in \{S\} \} \quad (5-2-37)$$

由这个定义，我们有以下定理。

定理5-2-11 设 $\{U\}_{v_1}$ 和 $\{U\}_{v_2}$ 分别是关于 U_1 和 U_2 的伪割的集合，则

$$\{U\}_{v_1} \otimes \{U\}_{v_2} = \{U\}_{v_1 \oplus v_2} \quad (5-2-38)$$

证明：由运算 \otimes 的定义

$$\begin{aligned} \{U\}_{v_1} \otimes \{U\}_{v_2} &= \min \{ U_a \oplus U_b; U_a \in \{U\}_{v_1}, U_b \in \{U\}_{v_2} \} \\ &= \min \{ S_a \oplus U_1 \oplus S_b \oplus U_2; S_a, S_b \in \{S\} \} \\ &= \min \{ S \oplus (U_1 \oplus U_2); S \in \{S\} \} \end{aligned} \quad (5-2-39)$$

此即 $\{U\}_{v_1 \oplus v_2}$ 的定义。 (证毕)

考虑一个集体 $[\{U\}, \{S^0\}]$ ，它是由关于一切可能边集的所有伪割集合组成的。注意，如果边集是空集 ϕ ，则 $\{U\}_{\phi} = \{S^0\}$ 。因此集体 $[\{U\}, \{S^0\}]$ 中包含所有的割集和空集的集合 $\{S^0\}$ 。对于 $[\{U\}, \{S^0\}]$ 中任何集合 R_a ， R_b 和 R_c ，我们有以下结果：

1. $R_a \otimes R_b = R_b \otimes R_a \in [\{U\}, \{S^0\}]$ 。

2. 在 $[\{U\}, \{S^0\}]$ 中存在 $\{S^0\}$ ，使得 $R_a \oplus \{S^0\} = R_a$ 。

3. $R_a \otimes R_a = \{S^0\}$ 。

4. $R_a \otimes (R_b \otimes R_c) = (R_a \otimes R_b) \otimes R_c$ 。

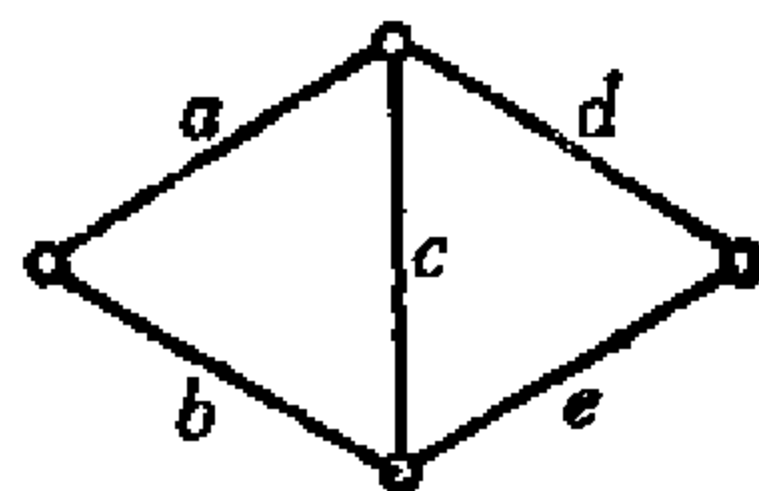


图5-2-3 线图G

因此， $[\{U\}, \{S^0\}]$ 是环积运算 \otimes 下的阿贝尔群。

例5-2-3 考虑图5-2-3所示的线图。为了得到 $\{S\}$ ，我们选

取线性无关割集 $S_1 = (a, b)$, $S_2 = (a, c, e)$ 和 $S_3 = (d, e)$. 然后我们作运算

$$\begin{aligned} S_1 \oplus S_2 &= (b, c, e) = S_4 \\ S_1 \oplus S_3 &= (a, b, d, e) = S_5 \\ S_2 \oplus S_3 &= (a, c, d) = S_6 \\ S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 &= (b, c, d) = S_7 \end{aligned}$$

因此

$$S = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, \phi\}$$

我们可以看出

$$S^0 = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_6, S_7, \phi, \}$$

设 $U_1 = (a)$, 则

$$\begin{aligned} \{U\}_{U_1} &= \min \{U_1 \oplus S_i; S_i \in \{S\}\} \\ &= \{(a), (b), (c, e), (c, d)\} \end{aligned}$$

注意,

$$\begin{aligned} \{U\}_{U_1} \otimes \{U\}_{U_1} &= \{\phi, (a, b), (a, c, e), (a, c, d), (b, c, e), \\ &\quad (b, c, d), (d, e)\} \\ &= \{S^3\} \end{aligned}$$

设 $U_2 = (e)$, 则

$$\{U\}_{U_2} = \{(e), (a, c), (d), (b, c)\}$$

设 $U_3 = (c)$, 注意

$$U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 = S_2$$

和 $U_p \cap U_q = \phi$ 对于 $1 \leq p < q \leq 3$

现在

$$\begin{aligned} \{U\}_{U_1} \otimes \{U\}_{U_2} &= \min \{U_a \oplus U_b; U_a \in \{U\}_{U_1}, U_b \in \{U\}_{U_2}\} \\ &= \{(a, e), (c), (a, d), (b, e), (b, d)\} \\ &= \{U\}_{U_3} \end{aligned}$$

容易看出

$$\{U\}_{U_1} \otimes \{U\}_{U_2} \otimes \{U\}_{U_3} = \{U\}_{U_3} \otimes \{U\}_{U_3} = \{S^0\}$$

设 $U_4 = (b, c)$, 则

$$\{U\}_{U_4} = \{(b, c), (a, c), (e), (d)\}$$

现在

$$\begin{aligned}\{U\}_{U_4} \otimes \{U\}_{U_1} &= \{(c), (b, e), (b, d), (a, e), (a, d)\} \\ &= \{U\}_{U_2}\end{aligned}$$

这是因为

$$\begin{aligned}\{U\}_{U_4} \otimes \{U\}_{U_1} &= \{U\}_{U_4 \oplus U_1} = \{U\}_{(abc)} = \{U\}_{S_1 \oplus (c)} \\ &= \{U\}_{(c)} = \{U\}_{U_2}\end{aligned}$$

在研究路径时, 我们曾见到过一种集合, 它是一条路径和若干回路的无重边并集。关于伪割和割集, 我们也有类似的集合。

定义5-2-4 集合 Y 称为伪割和若干割集的无重边并集, 如果

$$Y = U \oplus S \quad (5-2-40)$$

并且

$$U \cap S = \phi \quad (5-2-41)$$

其中 U 是一个伪割, 而 S 或为一个割集, 或为割集的无重边并。

定义5-2-5 设 $\{U\}_U$ 是关于边集 U 的所有伪割的集体, 则符号 $\{Y_U\}$ 是 $\{U\}_U$ 中所有伪割, 伪割 U 和若干割集的无重边并集以及空集的集体。

可以看出

$$\{Y_U\} = \{U \oplus S; S \in \{S\}\} \quad (5-2-42)$$

而且, 由伪割集体的定义, 我们可以看出

$$\min \{Y_U\} = \{U\}_U \quad (5-2-43)$$

例5-2-4 在例5-2-3中, 我们发现

$$\{U\}_{U_1} = \{(a), (b), (c, e), (c, d)\}$$

我们又知道

$$\begin{aligned}\{S\} &= \{\phi, (a, b), (a, c, e), (d, e), (b, c, e), (a, b, d, e), \\ &\quad (a, c, d), (b, c, d)\}\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\{Y_{v_1}\} &= \{U \oplus S; U \in \{U\}_{v_1}, S \in \{S\}\} \\ &= \{(a), (b), (c, e), (c, d), (a, b, c, e), \\ &\quad (a, b, c, d), (a, d, e), (b, d, e)\}\end{aligned}$$

由下式可以得到同样的集体:

$$\begin{aligned}\{Y_{v_1}\} &= \{U_1 \oplus S; S \in \{S\}\} \\ &= \{(a), (b), (c, e), (a, d, e), (a, b, c, e), \\ &\quad (b, d, e), (c, d), (a, b, c, d)\}\end{aligned}$$

$\{Y_v\}$ 的一个有趣的性质由以下定理给出。

定理5-2-12 $\{Y_v\}$ 中奇数个集合的环和是 $\{Y_v\}$ 中的集合, 偶数个集合的环和是 $\{S\}$ 中的集合。

由式(5-2-42), 证明是显然的, 注意关于 U 的所有伪割都在 $\{Y_v\}$ 中。

这个定理说明, 如果我们把 $\{Y_v\}$ 中的所有集合和 $\{S\}$ 中的所有集合收集到一起, 就得到环和运算下的一个群。换句话说, 将 $[Y_v, S]$ 定义为 $\{Y_v\}$ 和 $\{S\}$ 中所有集合的集体, 我们就可以说 $[Y_v, S]$ 是环和运算下的阿贝尔群。前面说过, $\{S\}$ 是所有割集, 割集是无重边并和空集的集体。

5-3 阿 贝 尔 群

我们已经研究了以下一些子图的集体, 它们都是阿贝尔群。

$\{E\}$: 所有回路, 回路的无重边并和空图的集体。

$\{E, M_{ij}\}$: $\{M_{ij}\}$ 和 $\{E\}$ 中所有集合组成的集体。其中, $\{M_{ij}\}$ 是 M_{ij} 类中所有 M 图集体, 它们或为一条路径, 或为一条路径和若干回路的无重边并。

$[\{\tau\}, \{C\}]$: 形如 $\{\tau_{(i_1, i_2, \dots, i_r)}\}$ 的所有集体和 $\{C\}$ 组成的集体。其中 $\{C\}$ 是所有回路和空集的集体, $\{\tau_{(i_1, i_2, \dots, i_r)}\}$ 是 $\tau_{(i_1, i_2, \dots, i_r)}$ 类

中所有 τ 图的集体。

$\{S\}$: 所有割集, 割集的无重边并和空集的集体。

$\{S, Y_U\}$: $\{Y_U\}$ 和 $\{S\}$ 中所有集合的集体。其中 $\{Y_U\}$ 是关于 U 的所有伪割, 以及一个关于 U 的伪割和若干割集的无重边并的集体. (U 是一个边集)。

$[\{U\}, \{S^0\}]$: 形如 $\{U\}_{U_p}$ 的所有集体和 $\{S^0\}$ 组成的集体。其中 $\{S^0\}$ 是所有割集和空集的集体。

我们还知道, 在 $\{E\}$ 中有 $n_e - n_v + \rho$ 个线性无关的集合, $\{E\}$ 中所有的集合都可以由它们生成。类似地, 在 $\{S\}$ 中有 $n_v - \rho$ 个线性无关的集合, $\{S\}$ 中所有的集合可以由它们生成。前面说过, n_e 是线图的边数, n_v 是顶点数, ρ 是最大连通子图的个数。 $\{E, M_{ij}\}$, $[\{\tau\}, \{C\}]$, $\{S, Y_U\}$ 和 $[\{U\}, \{S^0\}]$ 中线性无关集合的数目尚不知道。

定理5-3-1 在 $\{E, M_{ij}\}$ 中存在着 $n_e - n_v + \rho + 1$ 个线性无关的集合。

证明: 由 M_{ij} 的定义, 我们可以看出

$$\{M_{ij}\} = \{M \oplus E; E \in \{E\}\} \quad (5-3-1)$$

其中 M 是 $\{M_{ij}\}$ 中的一个集合。显然, $\{E\}$ 中 $n_e - n_v + \rho$ 个线性无关的集合也都是 $\{E, M_{ij}\}$ 中线性无关的集合。并且, 据式(5-3-1), $\{M_{ij}\}$ 中任何一个集合 M 与 $\{E\}$ 中任何一个线性无关的集合都是线性无关的。因此, 在 $\{E, M_{ij}\}$ 中至少有 $n_e - n_v + \rho + 1$ 个线性无关的集合。

因为 $\{M_{ij}\}$ 中任一个集合都可以由 M 和 $E \in \{E\}$ 的环和表示, 而 $\{E\}$ 中任一集合可以表示为 $\{E\}$ 中线性无关集合的环和。所以我们容易看出, 在 $\{E, M_{ij}\}$ 中不会有多于 $n_e - n_v + \rho + 1$ 个线性无关的集合。 (证毕)

类似地, 由已知 $\{S\}$ 中有 $n_v - \rho$ 个线性无关的集合, 我们有以下定理。

定理5-3-2 在 $\{S, Y_v\}$ 中恰有 $n_v - \rho + 1$ 个线性无关的集合, 这里 $\{Y_v\} \neq \{S\}$.

设 $1, 2, \dots, n_v$ 是一个不可分线图的顶点. 于是容易看出, $\{\tau_{(12)}\}, \{\tau_{(13)}\}, \dots, \{\tau_{(1n_v)}\}$ 是线性无关的. 对于任何一对顶点 i 和 j , 这里 $1 < i \neq j$, 由定理 1-7-8, $\{\tau_{(ij)}\}$ 可以表示为

$$\{\tau_{(ij)}\} = \{\tau_{(i1)}\} \otimes \{\tau_{(1j)}\} \quad (5-3-2)$$

另外, 任一集合 $\{\tau_{(i_1 i_2 \dots i_r)}\}$ 可以表示为

$$\{\tau_{(i_1 \dots i_r)}\} = \{\tau_{(i_1 i_1)}\} \otimes \{\tau_{(i_1 i_2)}\} \otimes \dots \otimes \{\tau_{(i_1 i_r)}\} \quad (5-3-3)$$

并且, 据定理 1-6-9 和 1-7-6,

$$\{\tau_{(i_1 \dots i_r)}\} \otimes \{\tau_{(i_1 \dots i_r)}\} = \{C\} \quad (5-3-4)$$

定理5-3-3 对于一个不可分线图, 在 $[\{\tau\}, \{C\}]$ 中存在 $n_v - 1$ 个线性无关集合.

对于 $[\{U\}, \{S^0\}]$, 设 $t = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ 是一个树 (在分离图的情况是一个林), 而 (b_1, b_2, \dots, b_m) 是对应于 t 的弦集, 这里 $n = n_v - \rho$, 且 $n + m = n_c$. 我们要说明, 集合 $\{U\}_{b_1}, \{U\}_{b_2}, \dots, \{U\}_{b_m}$ 是线性无关的, 而添加另外任何一个集合 $\{U\}_{\mathcal{E}}$, 这里 $\mathcal{E} \neq (b_p)$, $1 \leq p \leq m$, 都会使它们线性相关.

因为不存在只包含 (b_1, b_2, \dots, b_m) 中的边的割集, 故 $\{U\}_{b_1}, \{U\}_{b_2}, \dots, \{U\}_{b_m}$ 的任何一个组合的环积都不等于 $\{S^0\}$. 因此, 这些集合是线性无关的.

假定 $\mathcal{E} = (e_r)$, $1 \leq r \leq n$. 我们知道, 存在一个关于 t 的基本割集 S_{e_r} , 使得 S_{e_r} 包含边 e_r . 设这个割集是 $(b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_k}, e_r)$, 其中 $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$. 则据定理 5-2-7,

$$\{U\}_{b_{i_1}} \otimes \{U\}_{b_{i_2}} \otimes \dots \otimes \{U\}_{b_{i_k}} \otimes \{U\}_{e_r} = \{S^0\} \quad (5-3-5)$$

$$\text{或} \quad \{U\}_{b_{i_1}} \otimes \{U\}_{b_{i_2}} \otimes \dots \otimes \{U\}_{b_{i_k}} = \{U\}_{e_r} \quad (5-3-6)$$

因此, $\{U\}_{b_1}, \{U\}_{b_2}, \dots, \{U\}_{b_m}, \{U\}_{e_r}$ 是线性相关的.

设 \mathcal{E} 是一个多于一条边的集合, 比如说

$$\mathcal{E} = (b_{i_1}, \dots, b_{i_p}, e_{j_1}, \dots, e_{j_q})$$

那么, 据定理5-2-8,

$$\{U\}_\varnothing = \{U\}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \{U\}_{i_r} \otimes \{U\}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \{U\}_{j_s} \quad (5-3-7)$$

根据式(5-3-6), 对于 $r=1, \cdots, q$, 每一个集合 $\{U\}_{i_r}$ 都可以用 $\{U\}_{i_1}, \{U\}_{i_2}, \cdots, \{U\}_{i_m}$ 中集合的环积来表示, 因此 $\{U\}_{i_1}, \cdots, \{U\}_{i_m}, \{U\}_\varnothing$ 是线性相关的. 又显然

$$\{U\}_\varnothing \otimes \{U\}_\varnothing = \{S^0\} \quad (5-3-8)$$

因此, 我们有定理5-3-4.

定理5-3-4 在 $[\{U\}, \{S^0\}]$ 中恰有 $n_e - n_v + \rho$ 个线性无关的集合.

这些集体有多种应用. 例如, $\{E, M_{ij}\}$ 类的集体与开关网络有关. $[\{\tau\}, \{C\}]$ 的一个有意思的应用是用来得到一个线图中所有可能的树. 因为一个树是一个有 $n_v - 1$ 条边, 且在任意一对顶点之间恰有一条路径的集合, $\{\tau_{(i_1, i_2, \cdots, i_r)}\}$ 中任何一个包含 $n_v - 1$ 条边的集合都是一个树. 于是, 知道了 $[\{\tau\}, \{C\}]$, 我们就可以得到所有可能的树.

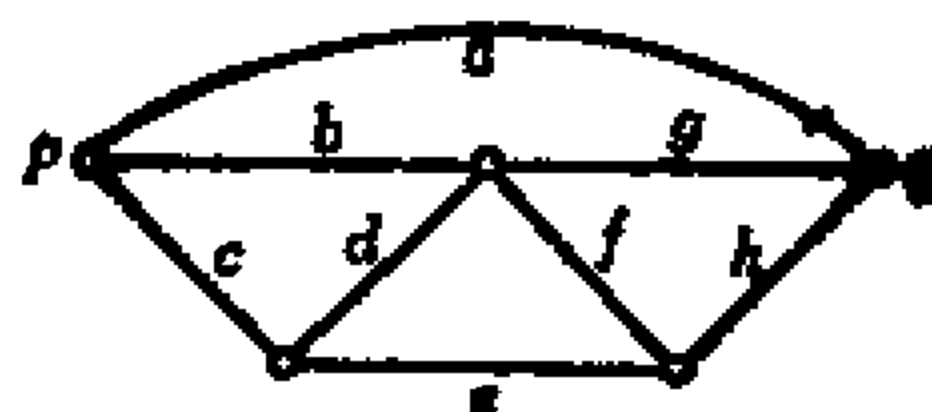
习 题

1. 图P-5-1中线图 G 的割集 $S_1 = (a, b, c)$, $S_2 = (c, d, f, h)$, $S_3 = (e, f, h)$, $S_4 = (b, d, f, g)$, 找出分离顶点 p 和 q 的所有可能的割集.

2. 设 S 是一个不分离顶点 i 和 j 的割集. 证明存在一条从 i 到 j 的路径 P , 使得 P 和 S 没有公共边.

3. 设 S 是一个分离顶点 i 和 j 的割集. 证明从 i 到 j 的任一路径都包含 S 中的一条边.

4. 设 $\{P_{ij}\}$ 是从 i 到 j 的所有路径的集合. 又设 S 是一个边集. 那么, 如果对于所有 $P \in \{P_{ij}\}$,



图P-5-1

$$S \cap P \neq \varnothing$$

而 S 的任一真子集 S' 具有这样的性质: 对于某个 $P \in \{P_{ij}\}$,

$$S' \cap P = \emptyset$$

证明 S 是一个割集.

5. 假定 $S(i; j) \oplus S(j; k)$ 是一个割集, 证明或否定

$$S(i; j) \oplus S(j; k) = S(i; k)$$

6. 求出图 $P-5-1$ 中线图关于 $u = (e, f)$ 的所有可能的伪割.

7. 哪一种线图和边集从 u 满足: 对于 $\{U\}_u$ 中所有的 U_1 和 U_2 , $U_1 \oplus U_2$ 是一个割集?

8. 下式是否成立?

$$\{U\}_{u_1} \otimes \{U\}_{u_2} = \{S\}$$

其中 $\{U\}_{u_1} \neq \{U\}_{u_2}$.

9. 设 e_1, e_2, \dots, e_n 都是一个线图 G 中的边.

$$\{U\}_{(e_1)} \otimes \{U\}_{(e_2)} \otimes \dots \otimes \{U\}_{(e_n)}$$

是伪割的集合或 $\{S\}$ 吗?

10. 证明定理 5-1-8.

11. 证明定理 5-2-3.

12. 证明定理 5-2-4.

13. 证明定理 5-2-7.

第六章 有向线图

6-1 有向线图的关联矩阵和回路矩阵

当一条边的两个端点是有序的时,我们称这条边是有向的,或称此边为有向边。通常采用线段上的一个箭头来表示一条有向边的方向,如图6-1-1(a)所示。如果一个线图的所有边都具有方向,则说此线图是有向的,或称为有向线图(简称为有向图)。图6-1-2所示的线图就是一个有向图。为了定义回路,割集等,我们定义有向图的对应无向图如下。

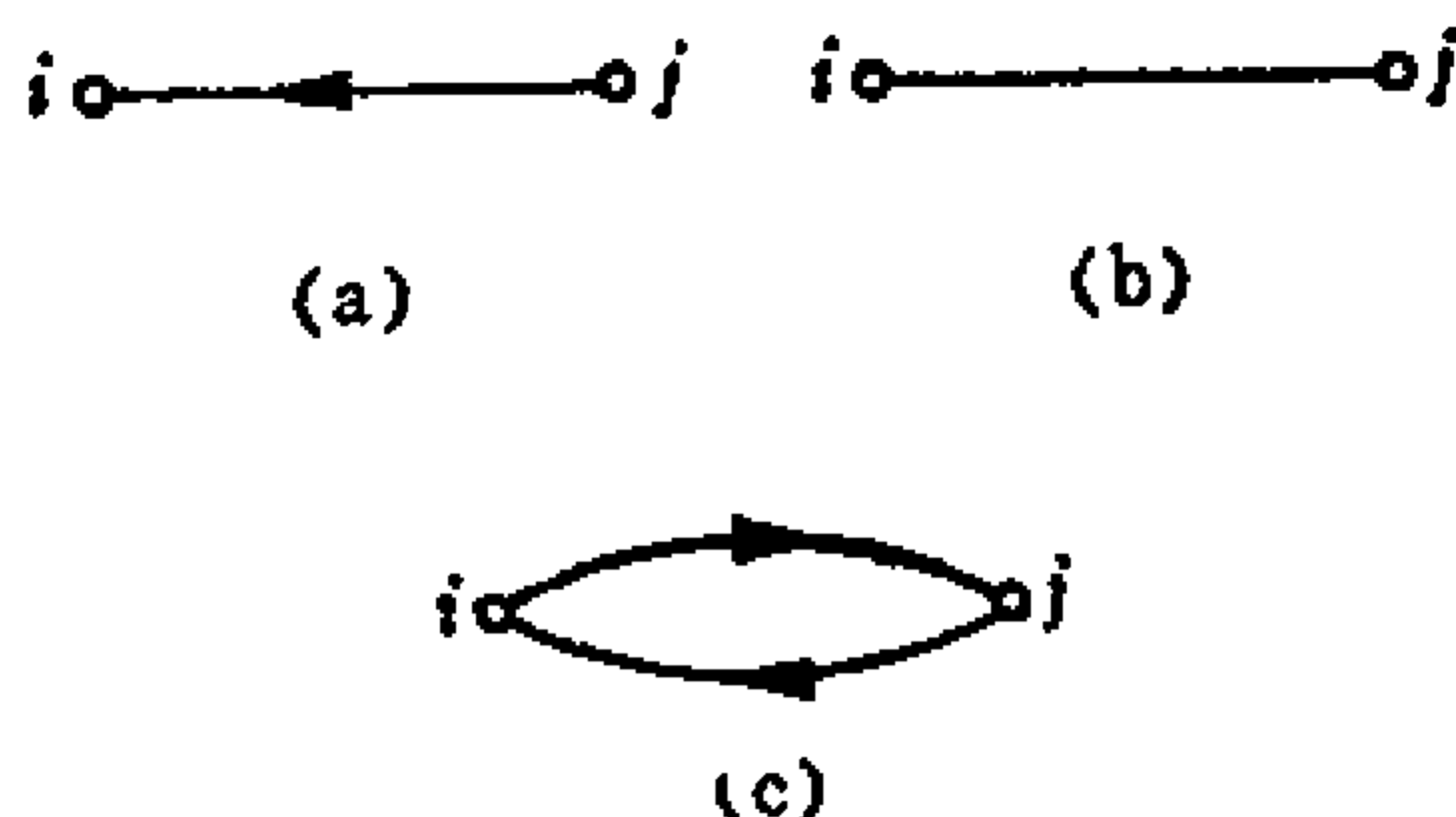


图6-1-1

(a)有向边; (b)无向边; (c)两条有向边

定义6-1-1 把有向图 G_d 的每一条有向边用无向边替换得到无向图 G_u ,我们称线图 G_u 为有向图 G_d 的对应无向图。

作为一个例子,图6-1-3所示的线图就是图6-1-2所示有向图的对应无向图。

定义6-1-2 如果一个有向图的对应无向图是连通的,则称

此有向图是连通的。

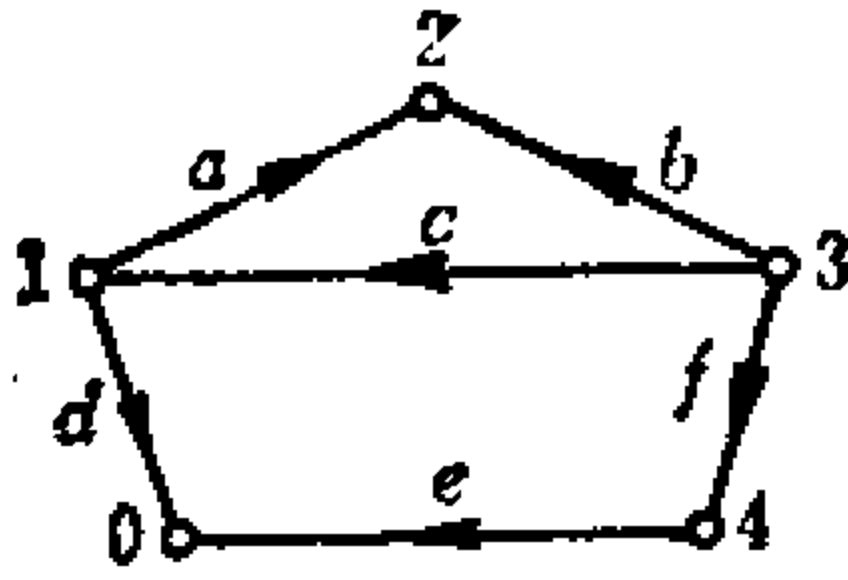


图6-1-2 有向图

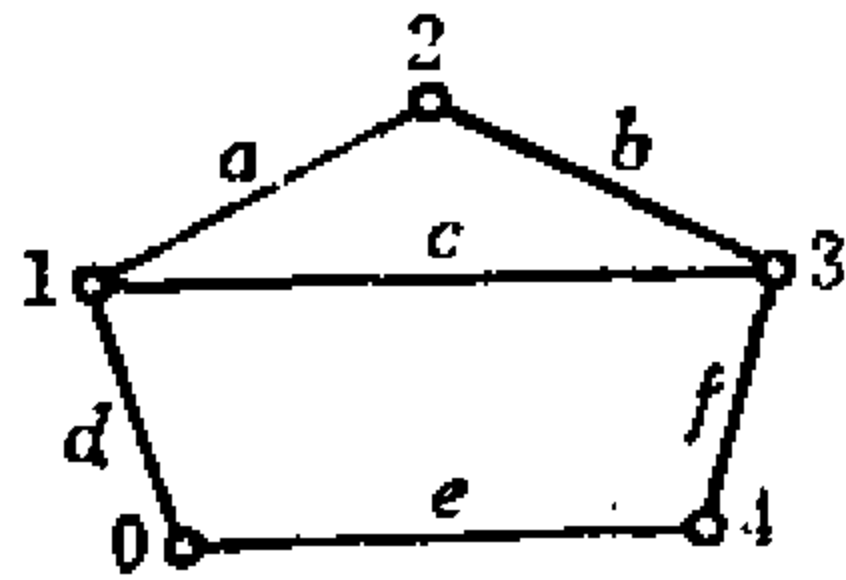


图6-1-3 对应的无向图

例如，图6-1-2中的有向图是连通的，因为图6-1-3中对应的无向图是连通的。用同样的方法，我们还可以定义可分图，分离图和最大连通子图。

由于有向图和无向图之间的区别在于边是否有方向，那么，适当地定义有向图的回路，割集，路径等等，我们将会看到，无向图的所有这些性质在有向图中也适用。另一方面，有向图的某些特殊子图，如有向回路，有向路径，半割等，在有向图的应用中是非常重要的，当然它们与回路，路径，割集是有差别的，这些将在本章的后面进行研究。

重要的是要注意这样的场合：有向边可用无向边来替换，反之亦然。例如，我们会看到，对于集中线性双向的电网络，每条有向边都能用无向边代替。如果我们研究从一个顶点到另一个顶点的流，则图6-1-1(c)的两条有向边可以用图6-1-1(b)中的一条无向边代替。然而，也有这样的情况，有向边和无向边具有完全不同的性质，因而这些边的交换几乎是不可能的。作为一个例子，如果我们研究通讯网中的同步流，则图6-1-1所有的结构是不同的，这些将在后面的章节中看到。我们首先研究有向图与无向图类似的部分。

表示有向图中每一条边的位置和方向的一种方法，是采用穷举关联矩阵，其定义如下。

定义6-1-3 一个有 n_v 个顶点和 n_e 条边的有向线图的穷举关

联矩阵，是 $n_v \times n_e$ 阶矩阵 $A_c = [a_{ij}]$ ，其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若边 } j \text{ 与顶点 } i \text{ 关联，且方向离开顶点 } i \\ -1 & \text{若边 } j \text{ 与顶点 } i \text{ 关联，且方向指向顶点 } i \\ 0 & \text{若边 } j \text{ 不与顶点 } i \text{ 关联} \end{cases}$$

例如，图6-1-2中有向图的穷举关联矩阵 A_c 是

$$A_c = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e & f \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

注意，对于一个有向图来说， A_c 的每列中恰有两个非零元（一个是+1，另一个是-1）。而一个无向图的 A_c 中每列中恰有两个1。

在前面已经看到，一个无向图的穷举关联矩阵的秩是 $n_v - \rho$ ，这一结论对有向图也适用。

定理6-1-1 一个有向图穷举关联矩阵的秩是 $n_v - \rho$ ，这里 n_v 是线图的顶点数， ρ 是最大连通子图的数目。

证明的方法与无向图的相同，只是把各元素作为实整数。

定义6-1-4 把一个连通有向图的穷举关联矩阵 A_c 删去一行得到的矩阵 A 称为关联矩阵，与 A_c 中被删去的行对应的顶点称为参考点。

前面我们曾用同样的方法对无向图的关联矩阵作了定义，当 $\rho > 1$ 时，我们定义关联矩阵如下。

定义6-1-5 由删去一个有向图的 A_c 的 ρ 行得到矩阵 A ，若其秩为 $n_v - \rho$ ，则称 A 为关联矩阵，这里 ρ 是有向图中最大连通子图的数目。

有向图关联矩阵的这个定义和无向图关联矩阵的定义也是相同的。

前面讨论过，在无向图的情况下，一个关联矩阵的任一非奇异主子阵的行列式等于 1。但是，一个有向图关联矩阵的非奇异主子阵的行列式不一定等于 1。

设 G 是一个由 ρ 个最大连通子图组成并含有 n_v 个顶点的有向图， A_s 是其关联矩阵 A 的一个 $n_v - \rho$ 阶的非奇异子矩阵，则在 A_s 中至少存在一列，其中仅包含一个非零元素。因为若不是这样，则 A_s 中的每列都有两个非零元素，一个是 +1，另一个是 -1，这样 A_s 的行列式是零，这与 A 是非奇异的假设矛盾。设 $a_{ik} = \pm 1$ ，而在 A_s 的第 k 列中除 a_{ik} 外所有元素是零。由 $|A_s|$ 按第 k 列元素展开的展开式，有

$$|A_s| = \pm (-1)^{i+k} |A_{s_{ik}}| \quad (6-1-1)$$

其中 $A_{s_{ik}}$ 是由 A_s 删去第 i 行和第 k 列得到的方子阵。如果 $A_{s_{ik}}$ 中没有恰含一个非零元的列，则 $|A_{s_{ik}}| = 0$ ，据式 (6-1-1)，就有 $|A_s| = 0$ 。但由假设， $|A_s| \neq 0$ ，因此，在 $A_{s_{ik}}$ 中必至少有一列只含一个非零元。

设 $A_{s_{ik}}$ 的 (p, q) 元是 ± 1 ，则

$$|A_s| = \pm (-1)^{i+k} (\pm 1) (-1)^{p+q} |A_{s_{ik}, pq}| \quad (6-1-2)$$

其中 $A_{s_{ik}, pq}$ 是由 $A_{s_{ik}}$ 删去行 p 和列 q 得到的方子阵，现在，我们可以看出 A_s 的行列式或者为 +1，或者为 -1。

在一个连通有向图中，设子图 T 代表一个树，线图 T 的关联矩阵 A_T 是 $n_v - 1$ 阶方阵， n_v 是 T 中的顶点数。因为连通有向图的关联矩阵的秩是 $n_v - 1$ ，故 A_T 是非奇异的，所以在一个连通有向图的关联矩阵中，如果一个 $n_v - 1$ 阶子阵的各列对应于一个树的树枝，则这个子阵是非奇异的。反过来，一个连通有向图 G 的关联矩阵中，如果一个 $n_v - 1$ 阶方子阵 A_s 是非奇异的，则对应于 A_s 的子图（即由 A_s 的列所对应的边构成的子图）必然连通，且

必包含 n_v-1 条边和 n_v 个顶点。因此，对应于 A_s 的 n_v-1 阶非奇异子阵的子图，是 G 中的一个树。现在，我们进一步把这个结论推广。

定理6-1-2 设 A 是一个包含 ρ 个最大连通子图的有向图的关联矩阵，当且仅当一个子图是林($\rho=1$ 时是树)时， A 的与此子图相对应的大子阵是非奇异的，这样的非奇异大子阵的行列式是 $+1$ 或 -1 。

例6-1-1 图6-1-2所示线图的关联矩阵 A 是

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e & f \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

这里顶点0是参考点。如果我们取 A 的方子阵

$$A_s = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

则

$$A_{s_{11}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

和

$$A_{s_{11,22}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

最后,

□

$$A_{s_{44},12,12} = 2[-1]$$

因此,

$$|A_s| = |A_{s_{44}}| = -|A_{s_{44},32}| = |A_{s_{44},32,12}| = -1$$

注意, 边 a, b, d, e 组成一个树.

如果我们取矩阵 A 的 A_s 为

$$A_s = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & d & f \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

则可发现

$$|A_s| = 1$$

其中, 边 a, b, d, f 组成一个树.

如果我们取 A_s 为

$$A_s = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

则 A_s 的行列式是零, 而边 a, b, c, d 不构成树.

为了使有向图和无向图中的回路能有相同的性质, 我们象定义无向图中的回路那样来定义有向图中的回路. 因为一个无向图的回路矩阵中每一行表示一个回路, 我们也用有向图的回路矩阵的每一行来表示一个回路. 我们采用如下定义.

定义6-1-6 有向图的回路是对应无向图的回路加上一个由顶点循环次序确定的方向. 我们用一个箭头来代表回路的方向.

例如，在图6-1-4中， C_1, C_2, C_3 表示回路。类似地，可以定义回路的无重边并。

定义6-1-7 有向图中回路的无重边并是若干回路的并集，其中任两个回路都没有公共边。

定义6-1-8 有向图的穷举回路矩阵 $B_c = [b_{ij}]$ 的元素 b_{ij} 定义为

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若边 } j \text{ 在回路 } i \text{ (或回路的无重边并 } i \text{) 中,} \\ & \text{且边的方向和回路(回路的无重边并)方向一致} \\ -1 & \text{若边 } j \text{ 在回路 } i \text{ (或回路的无重边并 } i \text{) 中,} \\ & \text{且边的方向和回路(回路的无重边并)方向相反} \\ 0 & \text{若边 } j \text{ 不在回路 } i \text{ (或回路的无重边并 } i \text{) 中} \end{cases}$$

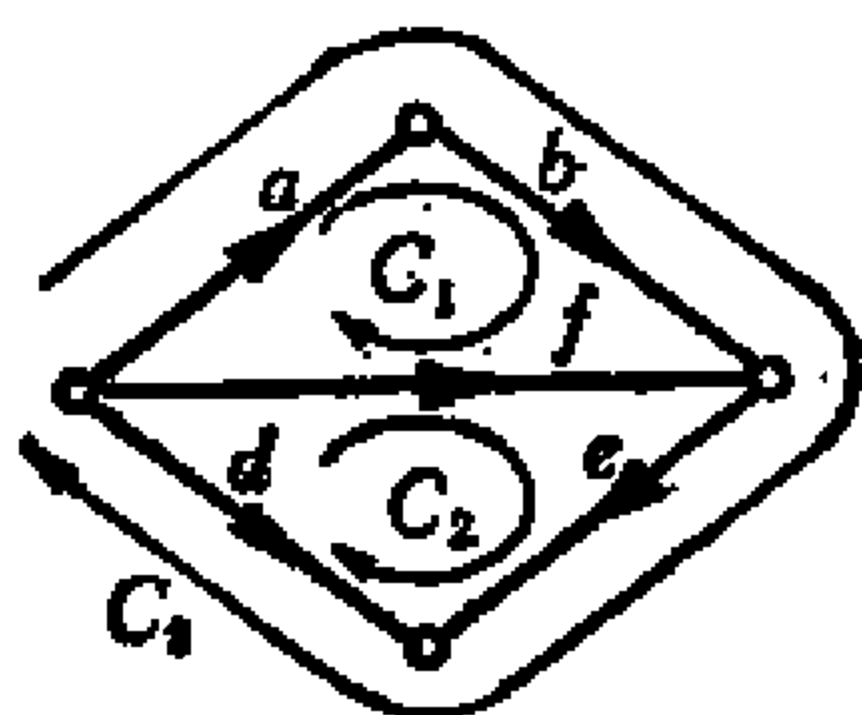


图6-1-4 有向回路的表示法

例如，图6-1-4所示有向图的穷举回路矩阵是

$$B_c = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e & f \end{matrix} \\ \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

与无向图的情况一样，我们定义一个有向图的基本回路集合和基本回路矩阵如下。

定义6-1-9 设 G 是一个包含 n_v 个顶点和 n_e 条边的连通有向图，又设 t 是 G 中的一个树， e_p 是弦， $p = 1, 2, \dots, n_e - n_v + 1$ ，关于树 t 的基本回路 C_p 是 $t \cup (e_p)$ 中一回路，其方向与弦 e_p 的方向一致。

所有基本回路 $C_1, C_2, \dots, C_{n_e - n_v + 1}$ 的集合称为关于树 t 的基本回路集。

例6-1-2 在图6-1-5所示的连通有向图中，设树 t 是 (a, b, c) ，则子图 $t \cup (e_1)$ 中的回路 C_1 加上与弦 e_1 的方向一致的方向，如图6-1-6(a)所示，它在关于 t 的基本回路集之中。可以看出，图6-1-6中的回路 C_1, C_2 和 C_3 构成关于 t 的基本回路集。

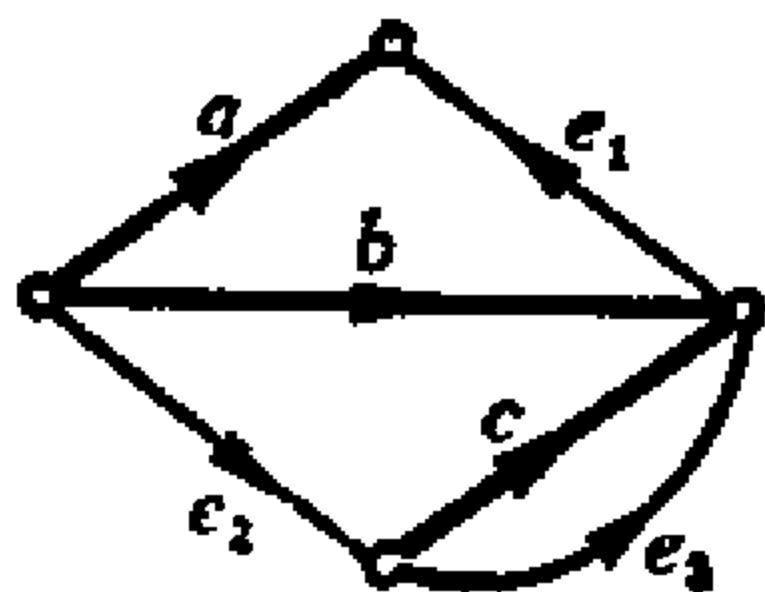


图6-1-5 一个有向图

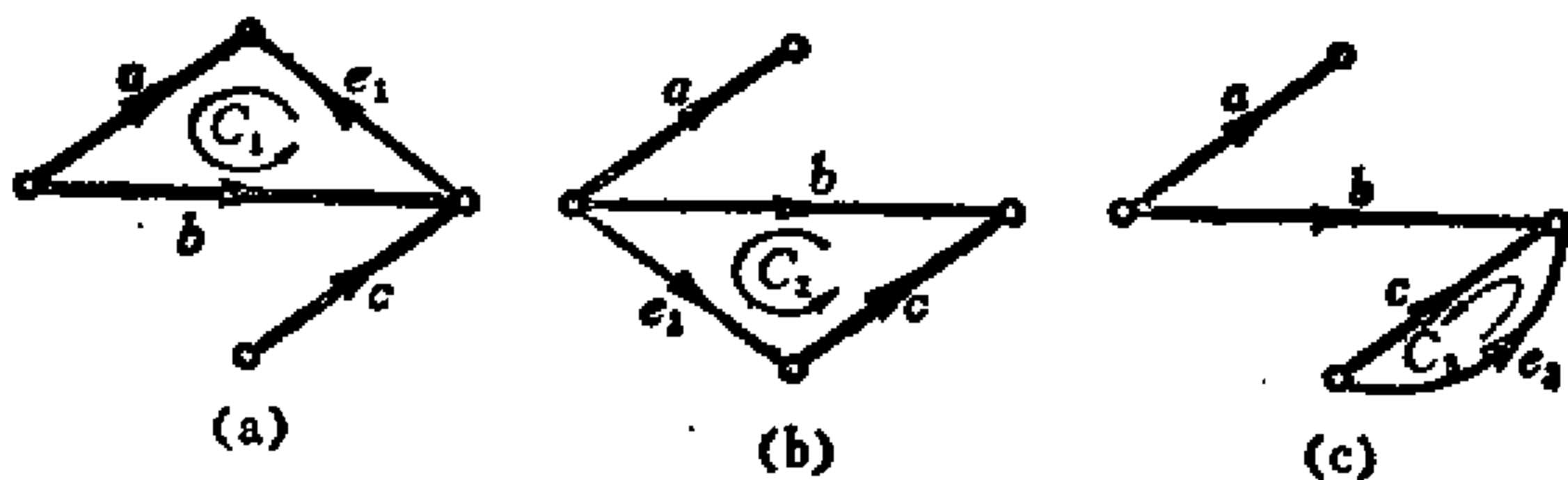


图6-1-6 关于树 $t = (a, b, c)$ 的基本回路集

(a) $t \cup (e_1)$ 和 C_1 ; (b) $t \cup (e_2)$ 和 C_2 ; (c) $t \cup (e_3)$ 和 C_3

对于分离有向图，我们定义关于一个林的基本回路集如下。

定义6-1-10 设 G 是一个包含 n_v 个顶点， n_e 条边和 p 个最大连通子图的有向图。设 t 是林， e_p 是弦， $p = 1, 2, \dots, n_e - n_v + p$ 。关于林 t 的基本回路 C_p 是 $t \cup (e_p)$ 中的一回路，其方向与弦 e_p 的方向一致。所有基本回路 $C_p (p = 1, 2, \dots, n_e - n_v + p)$ 的集合称为关于林 t 的基本回路集。

下面将会看到, 选取弦的方向作为包含该弦的基本回路的方向, 就使得在构成一个基本回路矩阵时, 得到一个单位阵。

定义6-1-11 设 G 是一个包含 n_v 个顶点, n_e 条边和 ρ 个最大连通子图的有向图. 设 $(e_1, e_2, \dots, e_{n_e-n_v+\rho})$ 是关于林 t (当 $\rho=1$ 时即为树 t) 的弦集, 又设 B_e 是 G 的穷举回路矩阵, 调整其列, 使得前面 $n_e-n_v+\rho$ 个列对应于弦 $e_1, e_2, \dots, e_{n_e-n_v+\rho}$, 则 B_e 的子矩阵 B_f 称为关于林 t 的基本回路矩阵, 如果 B_f 的行 p 对应于 $t \cup (e_p)$ 中基本回路 $C_p, p=1, 2, \dots, n_e-n_v+\rho$.

由此定义容易看出, 基本回路矩阵 B_f 可表示为

$$B_f = [U B_{f1}] \quad (6-1-3)$$

其中的 U 是单位矩阵。

例6-1-3 图6-1-7中有向图关于树 $t=(e, f, g, h)$ 的基本回路矩阵 B_f 是

$$B_f = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

因为一个有向线图的基本回路矩阵 B_f 是穷举回路矩阵 B_e 的子矩阵, 故 B_e 的秩至少是 $n_e-n_v+\rho$, 这里 n_e 是边数, n_v 是顶点数, ρ 是此有向线图中最大连通子图的个数。

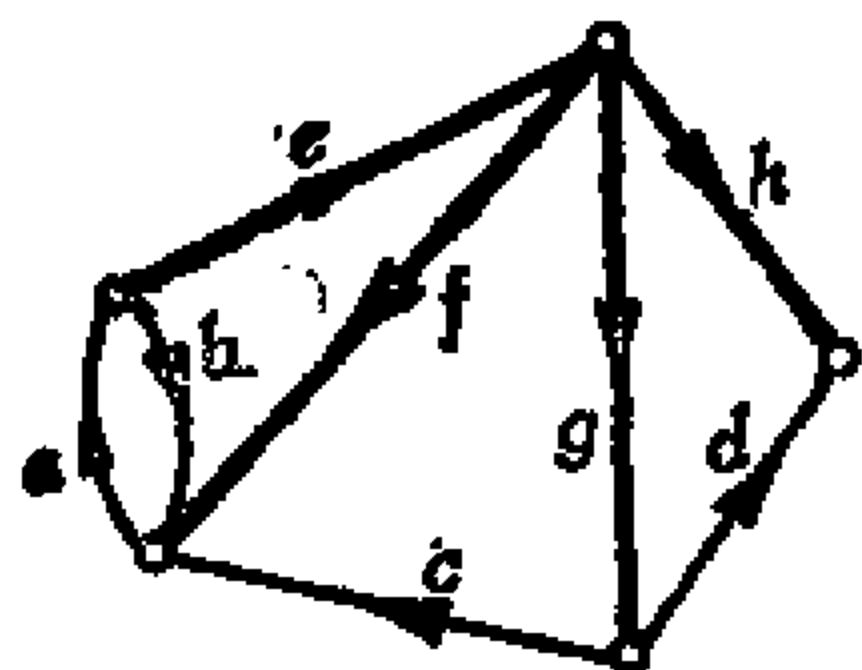


图6-1-7 一个有向图

为了求出穷举回路矩阵的秩, 我们要利用有向线图的关联矩阵和回路矩阵的正交性。注意, 对于一个无向图, $B_e A' = 0$ 是建立在模2代数上的, 但是, 这里我们用的是实整数。

设

$$A_e = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{n_e} \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad B_e = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{n_e} \end{bmatrix}$$

分别为一个有向图的穷举关联矩阵和穷举回路矩阵，则乘积 $A_e B_e^t$ 是

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{n_e} \end{bmatrix} [B_1^t B_2^t \cdots B_{n_e}^t] = \begin{bmatrix} A_1 B_1^t & A_1 B_2^t & \cdots & A_1 B_{n_e}^t \\ A_2 B_1^t & A_2 B_2^t & \cdots & A_2 B_{n_e}^t \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n_e} B_1^t & A_{n_e} B_2^t & \cdots & A_{n_e} B_{n_e}^t \end{bmatrix} \quad (6-1-4)$$

$$\text{其中} \quad A_i B_j^t = \sum_{k=1}^{n_e} a_{ik} b_{jk} \quad (6-1-5)$$

可以看出，只有当边 p 与顶点 i 关联，且在回路 j （或回路的无重边并 j ）中时， $a_{ip} b_{jp}$ 才非零。假定边 p 与顶点 i 关联且在回路 j 中，则除 p 外至少还有一条边与顶点 i 关联且在回路 j 中，设 q 是这样的一条边，如图6-1-8所示。



图6-1-8 回路 j 与边 p, q

a_{ip} （以及 a_{iq} ）的正负取决于边 p （边 q ）的箭头是指向顶点 i 还是离开 i 。另一方面， b_{jp} （ b_{jq} ）的正负取决于边 p （边 q ）的箭头方向与回路 j （或回路的无重边并 j ）的箭头方向是否一致。因此，如果 a_{ip} 的符号和 b_{jp} 的符号相同，则 a_{iq} 的符号必与 b_{jq} 的符号相反，而且在一个回路或回路的无重边并中，每一个顶点的度都是偶数。这样，在式(6-1-5)中，如果存在非零项，总是成对出现的，

其中一个为 +1, 另一个就是 -1. 因此

$$A_c B_c^t = 0 \quad (6-1-6)$$

且

$$B_c A_c^t = 0 \quad (6-1-7)$$

例如, 图6-1-4中有向图 G 的穷举关联矩阵是

$$A_c = \begin{matrix} & a & b & d & e & f \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

G 的穷举回路矩阵是

$$B_c = \begin{matrix} & a & b & d & e & f \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

因此

$$A_c B_c^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

注意, 上式右边的 0 表示一个元素全为零的矩阵。

我们知道, 一个穷举关联矩阵 A_c 的秩是 $n_e - \rho$, 由式(6-1-7)和西勒维斯特的零度定理 (定理3-3-4), 可以看出穷举回路矩阵 B_c 的秩最多是 $n_e - n_v + \rho$. 我们又知道, 基本回路矩阵 B_f 的秩是 $n_e - n_v + \rho$, 而它又是 B_c 的子矩阵。

定理6-1-3 一个有向图的穷举回路矩阵 B_c 的秩是 $n_e - n_v + \rho$, 这里 n_e 是有向图的边数, n_v 是顶点数, ρ 是最大连通子图的数目。

由于穷举回路矩阵 B_c 的秩是 $n_c - n_v + \rho$, 故在 B_c 中有着 $n_c - n_v + \rho$ 行, 使得其他各行都可以由这些行得到. 这就说明, 由 $n_c - n_v + \rho$ 行就足以知道一个有向图中所有回路的情况, 因此, 我们定义一个由 B_c 的这 $n_c - n_v + \rho$ 行组成的回路矩阵 B 如下.

定义6-1-12 用符号 B 表示阶为 $(n_c - n_v + \rho) \times n_c$ 的回路矩阵. B 是取 B_c 的 $n_c - n_v + \rho$ 行组成的, 并且 B 的秩是 $n_c - n_v + \rho$.

由这个定义, 我们得到下面的有向图回路矩阵的重要性质.

定理6-1-4 有向图回路矩阵 B 的一个主子矩阵是非奇异的, 当且仅当它的列对应于一个林 (当 $\rho = 1$ 时是树) 的所有弦.

回忆无向图的情况, 正好有与此相同的性质.

证明: 设有向图 G 的关联矩阵 A 分块为

$$A = [A_{11} A_{12}] \quad (6-1-8)$$

其中 A_{12} 对应林. 又设回路矩阵 B 分块为

$$B = [B_{11} B_{12}] \quad (6-1-9)$$

这里, 对所有的 $i = 1, 2, \dots, n_c$, B 的第 i 列和 A 的第 i 列对应于 G 中同一条边. 由式 (6-1-7), 我们有

$$BA' = [B_{11} B_{12}] \begin{bmatrix} A'_{11} \\ A'_{12} \end{bmatrix} = B_{11}A'_{11} + B_{12}A'_{12} = 0 \quad (6-1-10)$$

由定理 6-1-2, A_{12} 是非奇异的, 于是我们可以用 $(A'_{12})^{-1}$ 乘式 (6-1-10), 得到

$$B_{11}A'_{11}(A'_{12})^{-1} + B_{12} = 0 \quad (6-1-11)$$

或

$$B_{12} = -B_{11}A'_{11}(A'_{12})^{-1} \quad (6-1-12)$$

这样, B 可表示为

$$B = B_{11}[U - A'_{11}(A'_{12})^{-1}] \quad (6-1-13)$$

由于 B 是回路矩阵, 要使 B 的秩等于 B 的行数, 则 B_{11} 必为

非奇异的. 另一方面, B_{11} 的列对应于 A_{11} 的列, 而 A_{11} 的列对应于关于一个林的所有弦, 因此, 如果 B 的一个大子阵的列对应于所有的弦, 则此大子阵是非奇异的.

下面, 假定回路矩阵 B 被分块为

$$B = [\underline{B}_{11} \quad \underline{B}_{12}] \tag{6-1-14}$$

其中 \underline{B}_{11} 是非奇异的, 现在我们把一个关联矩阵 A 分块为

$$A = [\underline{A}_{11} \quad \underline{A}_{12}] \tag{6-1-15}$$

使得对所有的 $i = 1, 2, \dots, n_e$, A 的第 i 列和 B 的第 i 列对应 G 中同一条边. 由式(6-1-5), 有

$$AB^t = \underline{A}_{11} \underline{B}_{11}^t + \underline{A}_{12} \underline{B}_{12}^t = 0 \tag{6-1-16}$$

因此

$$\underline{A}_{11} = -\underline{A}_{12} \underline{B}_{12}^t (\underline{B}_{11}^t)^{-1} \tag{6-1-17}$$

由此式得到

$$A = \underline{A}_{12} [-\underline{B}_{12}^t (\underline{B}_{11}^t)^{-1} \quad U] \tag{6-1-18}$$

因为 A 是关联矩阵, \underline{A}_{12} 必为非奇异的. 这样, 据定理6-1-2, \underline{A}_{12} 的列对应一个林, 因此 \underline{B}_{11} 的列对应关于林的所有弦. (证毕)

例6-1-4 考虑图6-1-9中有向图的回路矩阵 B :

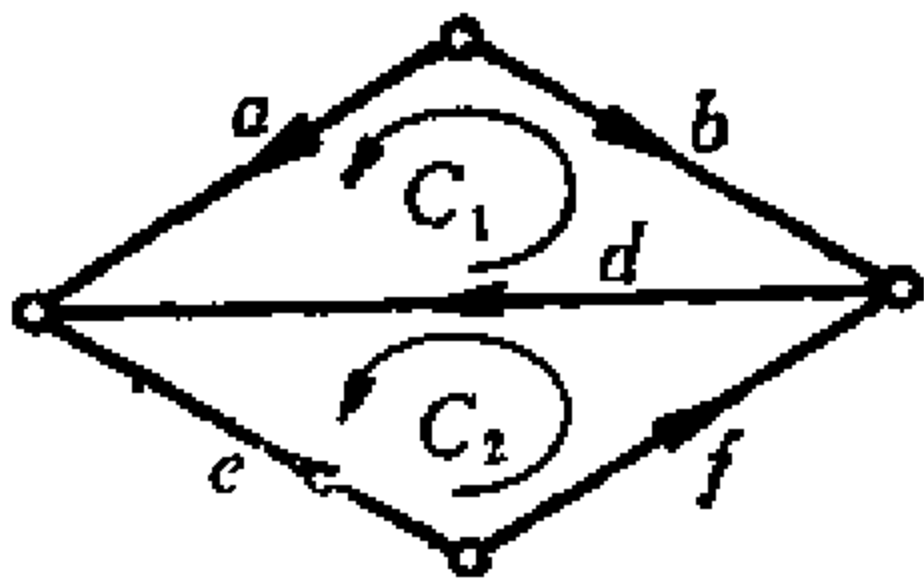


图6-1-9 有向图

$$B = \begin{matrix} & a & b & d & e & f \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

由列 a 和 b 组成的大子阵是奇异的, 故边 a 和 b 不能构成关于任何一个树的弦集. 另一方面, 由列 a 和 d 组成一个非奇异大子阵, 即

$$\begin{vmatrix} a & d \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

边 a 和 d 组成关于树 $t = (b, e, f)$ 的弦集。另一个非奇异的六子阵由列 a 和 e 组成，它的行列式是

$$\begin{array}{cc} a & e \\ \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right| = -1 \end{array}$$

边 a 和 e 组成关于树 (b, d, f) 的弦集。注意在这种情况下行列式是 -1 。

6-2 初等树变换

在这一节里，我们要讨论线图的树的一个普遍性质，不论这个线图是有向的还是无向的，都具有这个性质。不过，我们只在讨论有向图的回路矩阵和割集矩阵的大子式的不变性时，才用到这个性质。

定义6-2-1 设 t_1 和 t_2 是线图 G 的树，两个树 t_1 和 t_2 之间的距离记为 $d(t_1, t_2)$ ，定义为

$$d(t_1, t_2) = \text{在 } t_1 \text{ 内但不在 } t_2 \text{ 内的边的数目} \quad (6-2-1)$$

例如，假定

$$t_1 - t_2 = (e_1, e_2, \dots, e_k) \quad (6-2-2)$$

则

$$d(t_1, t_2) = k \quad (6-2-3)$$

因为在任一个树中，边的数目都是 $n_v - 1$ ，所以

$$d(t_1, t_2) = d(t_2, t_1) \quad (6-2-4)$$

假定 t_1 和 t_2 的距离是 1，即

$$d(t_1, t_2) = 1 \quad (6-2-5)$$

设

$$t_1 - t_2 = (e) \quad (6-2-6)$$

而

$$t_2 - t_1 = (e') \quad (6-2-7)$$

显然

$$t_1 \oplus (e, e') = t_2 \quad (6-2-8)$$

由式(6-2-8)确定的从树 t_1 到树 t_2 的变换, 称为初等树变换。

定义6-2-2 如果边集 \mathcal{E} 中恰好包含两条边, 则变换

$$t_1 \oplus \mathcal{E} = t_2 \quad (6-2-9)$$

称为从树 t_1 到 t_2 的初等树变换。

注意, 集合 \mathcal{E} 必须是如下的集合:

$$\mathcal{E} = t_1 \oplus t_2 = (t_1 - t_2) \cup (t_2 - t_1) \quad (6-2-10)$$

因此, 要使 \mathcal{E} 由两条边组成, 这两个树的距离 $d(t_1, t_2)$ 必定是1。而且, 如果两个树 t_1 和 t_2 相互距离为1, 则能给出由 t_1 到 t_2 的初等树变换。若 t_2 可以从 t_1 经初等树变换得到, 则 t_1 显然也能从 t_2 经初等树变换得到。例如, 考虑图6-1-7中线图的两个树 t_1 和 t_2 , 这里 $t_1 = (e, f, g, h)$, $t_2 = (d, e, f, g)$, 因为 t_1 和 t_2 的距离是 $d(t_1, t_2) = 1$, 我们能从 t_1 经过初等树变换得到 t_2 :

$$t_2 = t_1 \oplus (d, h)$$

同样,

$$t_1 = t_2 \oplus (d, h)$$

假定 t_1 和 t_k 都是线图 G 的树, 设

$$t_1 - t_k = (e_1, e_2, \dots, e_k) \quad (6-2-11)$$

$$t_k - t_1 = (a_1, a_2, \dots, a_k) \quad (6-2-12)$$

则 t_1 与 t_k 的距离是 k , 即

$$d(t_1, t_k) = k \quad (6-2-13)$$

假定我们在树 t_1 中添加边 a_1 , 如图6-2-1所示。设 C 是由边 a_1 和树 t_1 一起构成的基本回路。树 t_k 不可能包含 C 中所有的边, 因为据

定义，树中没有回路。于是， C 中至少有一条边不在 t_k 中（这条边不会是 a_1 ，因为 a_1 在 t_k 中），或

$$C - t_k \subset t_1 - t_k \quad (6-2-14)$$



图6-2-1 树 t_1 与边 a_1

设 $e_1 \in (C - t_k)$ ，则从 $t_1 \cup (a_1)$ 删除 e_1 ，将产生一个树，这是因为 $e_1 \in C$ ，而从 $t_1 \cup (a_1)$ 中删除边 e_1 ，只破坏 $t_1 \cup (a_1)$ 中的回路 C 。设这个树是 t_2 ，则

$$t_2 = t_1 \oplus (a_1, e_1) \quad (6-2-15)$$

是一个初等树变换。进一步

$$t_2 - t_k = (e_2, \dots, e_k) \quad (6-2-16)$$

$$t_k - t_2 = (a_2, \dots, a_k) \quad (6-2-17)$$

$$d(t_2, t_k) = k-1 \quad (6-2-18)$$

由此，我们可以看到，存在一个树的序列 $t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, t_k$ ，使得所有相邻的树距离为1。换句话说， t_k 可以由 t_1 经过逐次进行初等树变换得到。

定理6-2-1 设 t_1 和 t_k 都是连通图的树，如果 $d(t_k, t_1)$ 为 k ，则 t_k 可以从 t_1 正好经过 k 次初等树变换得到。

例6-2-1 考虑图6-1-7中的线图，假定我们选取 $t_1 = (e, f, g, h)$ 和 $t_k = (a, c, d, h)$ ，则

$$d(t_1, t_k) = 3$$

且

$$t_k - t_1 = (a, c, d)$$

添加边 a 到树 t_1 中，如图6-2-2所示，我们可以看到，有一个基本回路 $C = (a, e, f)$ ，从 $t_1 \cup (a)$ 中删去边 e ，就得到一个树 $t_2 = (a, f, g, h)$ 。

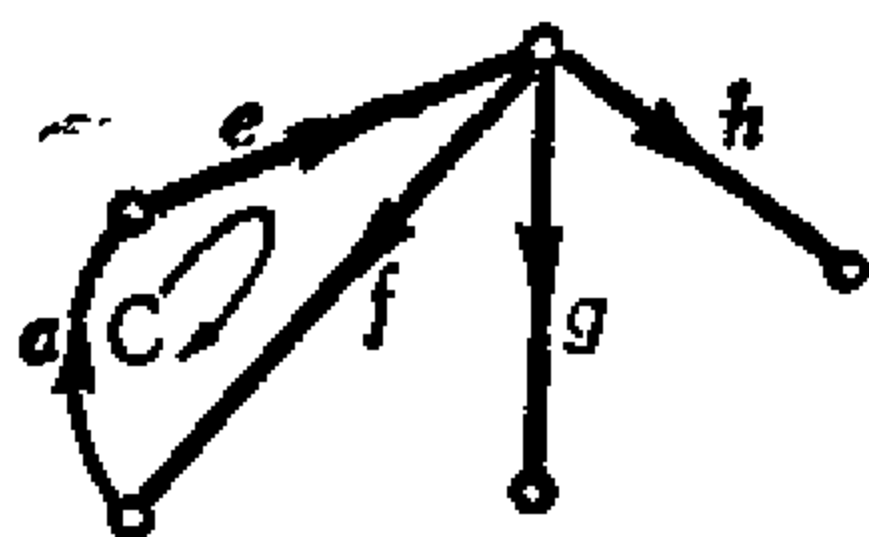


图6-2-2 树 t_1 和边 a

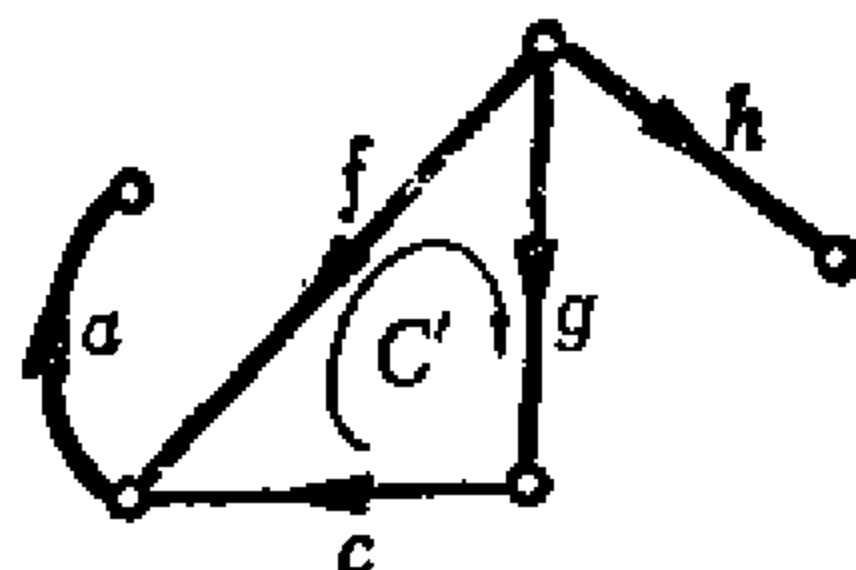


图6-2-3 树 t_2 和边 c

因此

$$t_2 = t_1 \oplus (a, e)$$

是一个初等树变换。现在，我们有

$$t_k - t_2 = (c, d)$$

添加边 c 到树 t_2 中，如图6-2-3所示，可以得到关于树 t_2 的基本回路 C' ，这里

$$C' = (c, f, g)$$

于是，从 $t_2 \cup (c)$ 中删去边 f ，得到由边 a, c, g, h 组成的树 t_3 。因此

$$t_3 = t_2 \oplus (c, f)$$

是一个初等树变换，对于 t_3 ，我们有

$$t_k - t_3 = (d)$$

经过同样的过程，得到

$$t_k = t_3 \oplus (d, g)$$

显然，这是一个初等树变换。这样，我们得到树 t_1, t_2, t_3, t_k 的序列，其中每两个相邻树距离为1。我们已经说明， t_k 可以由 t_1 经过三次初等树变换得到，这里 t_1 和 t_k 的距离是3。可以看出，对于分离线图，我们也可以定义一个初等林变换，并且可以说明，

任一林可以由另一个林经过逐次初等林变换得到。

6-3 回路矩阵的非零主子式的值

在6-1节中，我们发现一个关联矩阵的任一非奇异主子阵的行列式不是+1就是-1，然而，一个回路矩阵的非奇异主子阵的行列式可能既不是+1，也不是-1。例如，图6-3-1中有向图的一个回路矩阵是

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

由列 a 和 d 组成的大子阵的行列式是

$$\begin{vmatrix} a & d \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

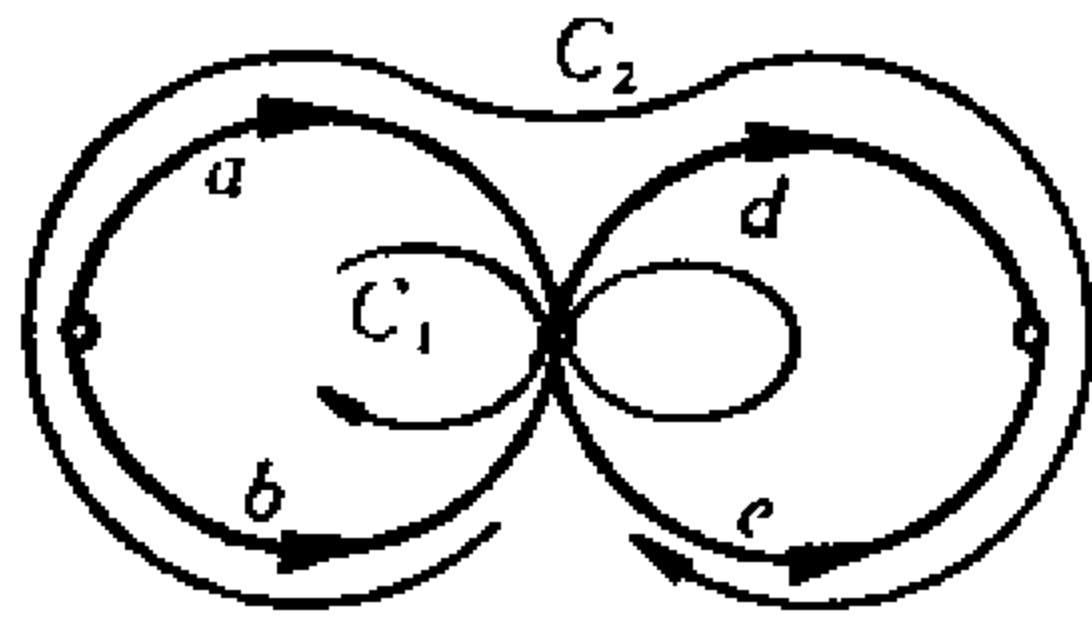


图6-3-1 有向图 and 回路 C_1, C_2

但是，我们将看到，一个回路矩阵的所有非奇异主子阵的行列式的绝对值是相同的，这对于许多应用来说，是非常重要的性质。

设 $B_f = [U B_{f12}]$ (6-3-1) 是一个有向图 G 关于树 t_1 的

基本回路矩阵，前面说过， B_{f12} 的列对应于树 t_1 的树枝。设 B_{11} 是 B_f 的一个非奇异主子阵，调整 B_f 的列，我们得到一个回路矩阵 B_2

$$B_2 = [\underline{B_{11}} \quad \underline{B_{12}}]$$

如果我们能说明，只要将 B_2 的行与行相加或者相减，如果需要的

话，在所得矩阵的某些行上乘上 -1 ，就能使 B_2 变成一个基本回路矩阵，那么我们就知道， B_{11} 的行列式或者为 $+1$ ，或者为 -1 。

因为我们已假定 B_{11} 是非奇异的，故据定理 6-1-4， B_{12} 的列对应于一个树的枝，设此树为 t_2 。假定

$$d(t_1, t_2) = 1 \quad (6-3-3)$$

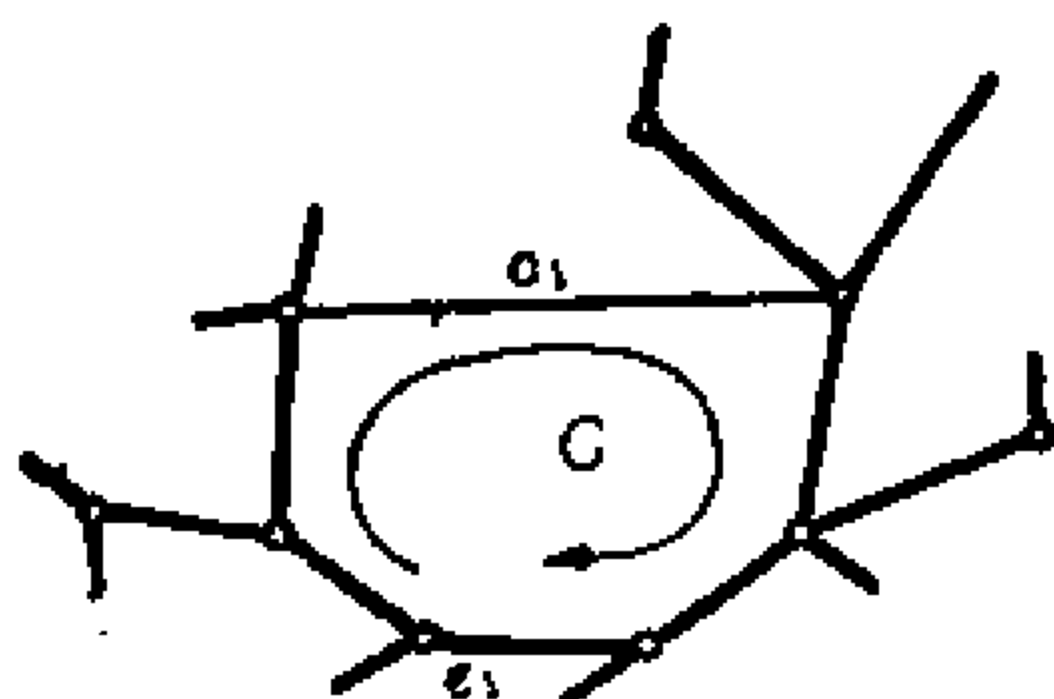
则可知道，应有边 e_1 和 a_1, e_1 在 t_1 中， a_1 在 t_2 中，使得

$$t_2 = t_1 \oplus (a_1, e_1) \quad (6-3-4)$$

这是一个初等树变换。

考虑子图 $t_1 \cup (a_1)$ ，这个子图中的回路是 C ，如图 6-3-2 所示。注意，据式 (6-3-4)，有

$$t_1 \cup (a_1) = t_2 \cup (e_1) \quad (6-3-5)$$



设 $\{C_1\}$ 是关于 t_1 的基本回路集合，注意 B_1 的行代表 $\{C_1\}$ 中所有回路。设 $\{C_2\}$ 是关于 t_2 的基本回路集合。显然，回路 C 既在 $\{C_1\}$ 中又在 $\{C_2\}$ 中。

设 $C_{12}, C_{13}, \dots, C_{1k}$ 是 $\{C_1\}$ 中不含边 e_1 的回路， C_{1k+1}, \dots, C_{1m} 是 $\{C_1\}$ 中包含边 e_1 的诸回路，这里的 m 是线图 G 中基本回路的数目。则容易看出 $C_{12}, C_{13}, \dots, C_{1k}$ 也在 $\{C_2\}$ 中。

考虑 $\{C_1\}$ 中的回路 C_{1p} ($k+1 \leq p \leq m$)，如图 6-3-3 所示，可以看出 C_{1p} 不是关于 t_2 的基本回路，因为对于 t_2 来说，它包含两条弦 e_1 和 h_p 。但是，对于同一条弦 h_p ，在 $\{C_2\}$ 中有一个包含它的相应的基本回路 C_{2p} ，注意 h_p 既是关于 t_1 的弦，又是关于 t_2 的弦，并且，我们可以看到

$$C_{2p} = C_{1p} \oplus C \quad (6-3-6)$$

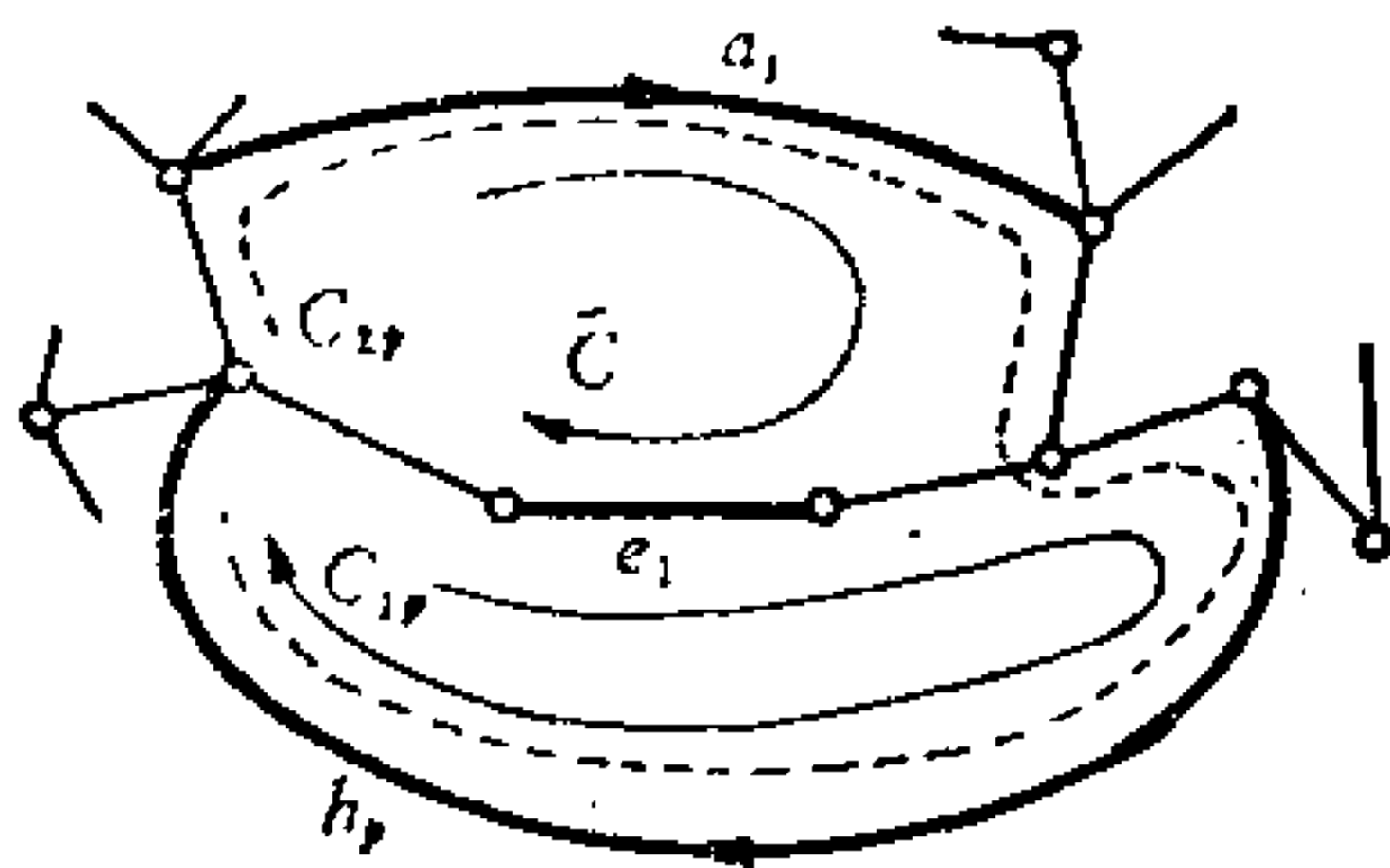


图6-3-3 回路 C_{1p}

现在考虑矩阵 B_2 ，为了简便，我们设 B_2 的第一行代表回路 C ，而第 p 行代表回路 C_{1p} ， $p = 2, 3, \dots, m$ 。在 B_2 中，规定 C 的方向与 a_1 的方向一致，因为 a_1 是关于 t_1 的弦。为了使 B_2 成为一个关于 t_2 的基本回路矩阵，要用 e_1 来代替 a_1 作为弦。这样，要使 B_2 的第一行代表关于 t_2 的回路 C ，必须使 C 的方向与 e_1 的一致。如果关于 t_2 的 C 和关于 t_1 的 C 方向不一致，则在第一行上乘上-1。

因为对 $2 \leq p \leq k$ ，关于 t_1 的基本回路 C_{1p} 也是关于 t_2 的基本回路，故对 $2 \leq p \leq k$ ， B_2 的这些行代表关于 t_2 的基本回路 C_{2p} 。

最后，对于 $k+1 \leq p \leq m$ ，由 B_2 的第 p 行代表的回路 C_{1p} 包含边 e_1 ，因此 C_{1p} 不是关于树 t_2 的基本回路，所以，我们必须把 C_{1p} 变成对应的回路 C_{2p} 。由于 C_{1p} 和 C_{2p} 的方向都与弦 h_p 一致，而式(6-3-6)表明，从第 p 行中加上或者减去第一行（代表回路 C ），将得到一个新的第 p 行，它代表回路 C_{2p} 。因此，用把一行加或者减去其他行，必要时用-1乘上一行，以及调整行次序的方法，可以把式(6-3-2)中的回路矩阵 B_2 变成基本回路矩阵

$$B_{2f} = [U \quad B_{2f,12}] \quad (6-3-7)$$

这些运算不改变 B_1 的任一非奇异主子阵行列式的绝对值。因此， B_1 的一个非奇异主子阵和 B_2 的对应非奇异主子阵（它们的列代表边的相同的集合）具有这样的性质：它们的行列式相同，但符号不同。并且，由于 B_2 的主子阵 \underline{B}_{11} 变成了 B_2 中的 U ，可以看出， \underline{B}_{11} 的行列式或者为 $+1$ ，或者为 -1 。一般说来，若一个树与 t_1 距离为 1 ，则 B_1 与关于此树的弦集对应的任一主子式或为 $+1$ ，或为 -1 。

调整 B_2 的行和列，可以得到

$$B_3 = [\underline{\underline{B}}_{11} \quad \underline{\underline{B}}_{12}] \quad (6-3-8)$$

其中 $\underline{\underline{B}}_{11}$ 是非奇异的。假定对应于 $\underline{\underline{B}}_{12}$ 的列是树 t_3 ，它与 t_2 距离为 1 。则可以看出， $\underline{\underline{B}}_{11}$ 的行列式或为 $+1$ ，或为 -1 。因此 B_2 的对应于关于树 t_3 （它与 t_1 距离为 2 ）的弦集的主子式或为 $+1$ ，或为 -1 。一般来说，对于一个与 t_2 距离为 1 的树， B_2 的任一个与关于此树的弦集对应的主子式，可选取为式(6-3-8)中的 $\underline{\underline{B}}_{11}$ 。现在我们可以说，对于一个与 t_1 距离为 2 的树， B_1 的任一个与关于此树的弦集对应的非零主子式或为 $+1$ ，或为 -1 。

任何树均可由 t_1 经过逐次初等树变换得到，由这一事实，我们得到下面定理。

定理6-3-1 基本回路矩阵的任一非奇异主子阵的行列式或为 $+1$ ，或为 -1 。

例6-3-1 图6-3-4所示有向图关于树 $t_1 = (g, h, i, j)$ 的基本回路矩阵 B_1 是

$$B_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & d & f & g & h & i & j \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

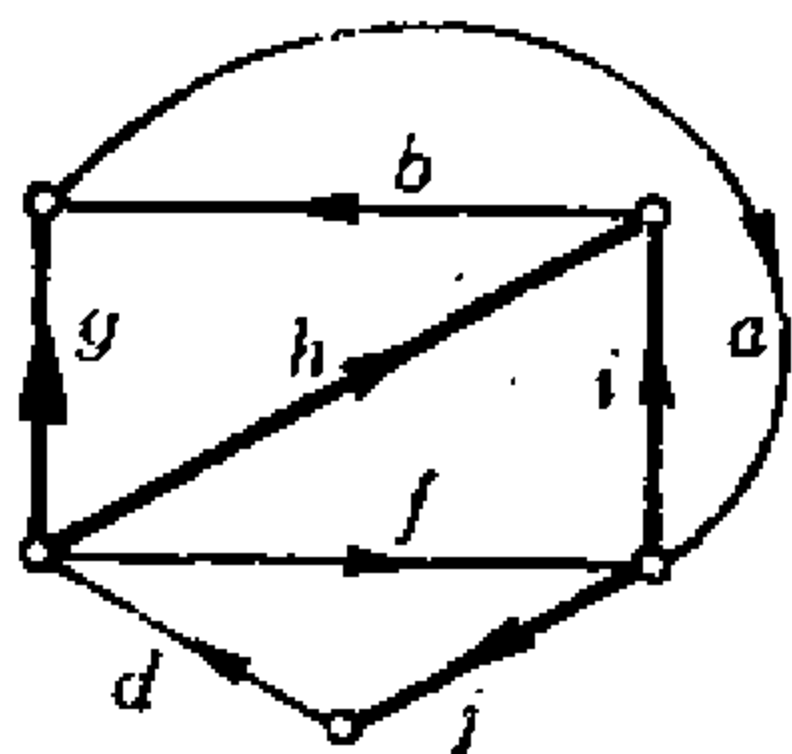


图6-3-4 有向线图

关于树 $t_2 = (g, h, d, j)$ 的基本回路矩阵 B_{2f} 可由 B_f 经以下步骤得到:

1. 交换列 d 和 i , 并以 -1 乘第三行:

$$\begin{array}{c} a \quad b \quad i \quad f \quad g \quad h \quad d \quad j \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

2. 因为 $t_2 = t_1 \oplus (i, d)$, 故第三行对应于关于 t_1 和 t_2 二者的基本回路。利用这个回路, 我们要把上述矩阵中的行 (除第三行外) 所表示的包含边 i 的回路变成不包含边 i 的回路。为此, 我们把第三行乘上 -1 , 加到第一行和第四行, 所得的矩阵就是关于 t_2 的基本回路矩阵:

$$B_{2f} = \begin{array}{c} a \quad b \quad i \quad f \quad g \quad h \quad d \quad j \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

我们知道, 与穷举回路矩阵 B_f 中的行相对应的任一回路, 可以用基本回路矩阵 B_f 的行作线性组合得到。因此, 有向图中秩为 $n_e - n_v + \rho$ 的任一回路矩阵 B 可以表示为

$$B = DB_f \quad (6-3-9)$$

这里 D 是一个非奇异矩阵, 因此, B 的任一个非奇异大子阵的行列式等于 $\pm |D|$ 。

定理6-3-2 设 B 是一个回路矩阵, 又设 B_{11} 是 B 的一个非奇异大子阵, $|B_{11}| = k$, 则 B 的任何非奇异大子阵的行列式等于 $\pm k$ 。

例如, 图6-3-1中有向图的回路矩阵是

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

这个矩阵的非奇异子阵的行列式的绝对值是

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & d & a & e & b & d & b & e \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{array} \right\| = 2 \end{array}$$

关于 $t = (b, e)$ 的基本回路矩阵 B_f 是

$$B_f = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & d & b & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

选矩阵 D 为

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

我们有

$$DB_f = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & d & b & e \end{array} \quad \begin{array}{cccc} a & d & b & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = B \end{array}$$

列 b 和 d 交换了位置。注意, $|D| = 2$ 。

6-4 割集矩阵

我们已用符号 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ 来表示从 Ω_1 中的一个顶点连到 Ω_2 中的一个顶点的边集合。在无向图中, 由于边没有方向, 故

$$\mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_2) = \mathcal{E}(\Omega_2 \times \Omega_1) \quad (6-4-1)$$

然而, 在有向图的情况下,

$$\mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_2) \neq \mathcal{E}(\Omega_2 \times \Omega_1) \quad (6-4-2)$$

例如，在图6-4-1的有向图中，若 $\Omega_1 = (1, 2)$ ， $\Omega_2 = \overline{\Omega}_1$ ，则 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \overline{\Omega}_1)$ 是 (b, d, e) ，而 $\mathcal{E}(\overline{\Omega}_1 \times \Omega_1)$ 是空集。

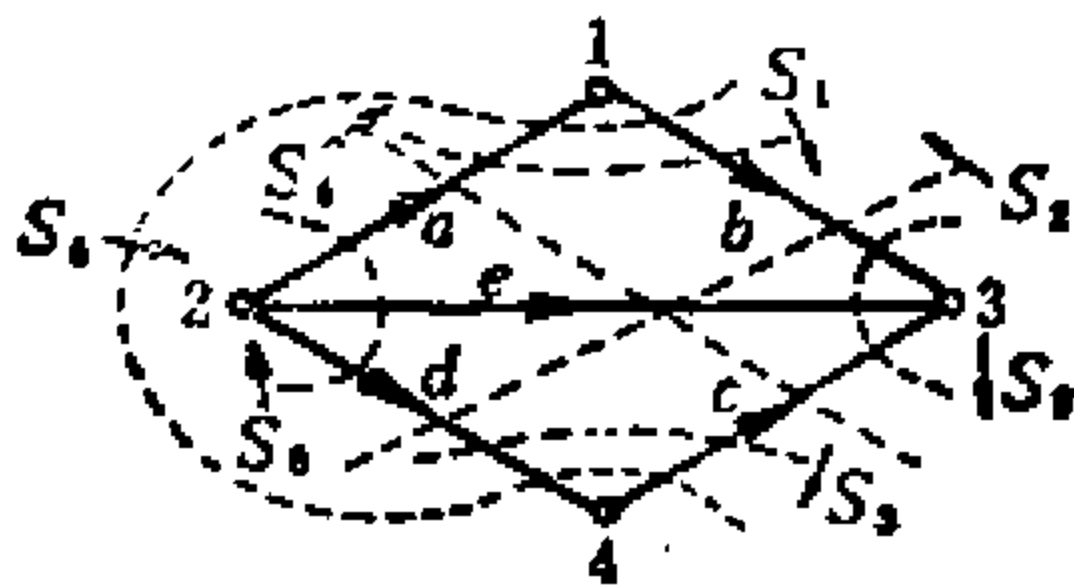


图6-4-1 有向图中的割集

假定删去线图 G 中割集 S 的所有边，得到两个连通子图 G_1 和 G_2 。设 Ω_1 是 G_1 中所有顶点的集合， $\overline{\Omega}_1$ 是 G_2 中所有顶点的集合。如果 G 是无向的，我们知道， $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \overline{\Omega}_1)$ 是割集 S 。但是，如果 G 是有向的， $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \overline{\Omega}_1)$ 就不一定是割集 S 了。在一个有向图中，割集 S 可以由下式表示：

$$S = \mathcal{E}(\Omega_1 \times \overline{\Omega}_1) \cup \mathcal{E}(\overline{\Omega}_1 \times \Omega_1) \quad (6-4-3)$$

定义6-4-1 在式(6-4-3)里，若割集 S 的 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \overline{\Omega}_1)$ 和 $\mathcal{E}(\overline{\Omega}_1 \times \Omega_1)$ 中，有一个(而不是两个)为空集，就称 S 为有向割集。

由于边有方向，故割集也具有方向。考虑割集 $S = \mathcal{E}(\Omega_1 \times \overline{\Omega}_1) \cup \mathcal{E}(\overline{\Omega}_1 \times \Omega_1)$ ， S 的方向或者是从 Ω_1 到 $\overline{\Omega}_1$ ，或者是从 $\overline{\Omega}_1$ 到 Ω_1 。为了简便，我们用一个箭头来表示割集的方向。例如，图6-4-2所示割集 S 的箭头表示 S 的方向是从 Ω_1 到 $\overline{\Omega}_1$ ，这里 Ω_1 是 G_1 中所有顶点的集合。即使 $S = \mathcal{E}(\Omega_1 \times \overline{\Omega}_1) \cup \mathcal{E}(\overline{\Omega}_1 \times \Omega_1)$ 是一个割集的无重边并，对 S 也只给出一个方向，或者是从 Ω_1 到 $\overline{\Omega}_1$ ，或者是从 $\overline{\Omega}_1$ 到 Ω_1 。

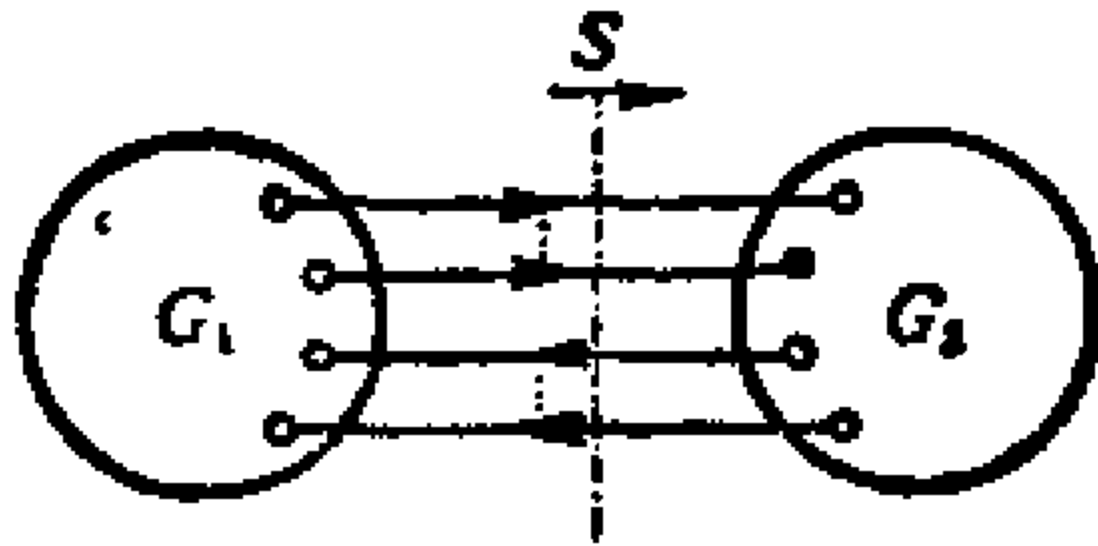


图6-4-2 割集及其方向

我们也可以不用 Ω_1 和 $\bar{\Omega}_1$,而用两个顶点 p 和 q , $p \in \Omega_1, q \in \bar{\Omega}_1$,来表示割集(或割集的无重边并)的方向.即我们可以说,割集 S 的方向是从顶点 p 到顶点 q ,这就暗示了, p 和 q 是被 S 分离开的.

例6-4-1 图6-4-1中有向图的割集和割集的无重边并是

$$S_1 = \mathcal{E}((1) \times (1)) \cup \mathcal{E}((1) \times (1)) = (a, b)$$

$$S_2 = \mathcal{E}((1, 2) \times (\bar{1}, 2)) \cup \mathcal{E}((\bar{1}, 2) \times (1, 2)) = (b, d, e)$$

$$S_3 = \mathcal{E}((4) \times (\bar{4})) \cup \mathcal{E}((\bar{4}) \times (4)) = (c, d)$$

$$S_4 = \mathcal{E}((1, 3) \times (\bar{1}, 3)) \cup \mathcal{E}((\bar{1}, 3) \times (1, 3)) = (a, c, e)$$

$$S_5 = \mathcal{E}((1, 4) \times (\bar{1}, 4)) \cup \mathcal{E}((\bar{1}, 4) \times (1, 4)) = (a, b, c, d)$$

$$S_6 = \mathcal{E}((2) \times (\bar{2})) \cup \mathcal{E}((\bar{2}) \times (2)) = (a, d, e)$$

$$S_7 = \mathcal{E}((3) \times (\bar{3})) \cup \mathcal{E}((\bar{3}) \times (3)) = (b, c, e)$$

S_2, S_4, S_6, S_7 都是有向割集, S_5 是割集的无重边并, 这些割集的方向可以象图6-4-1中那样选取.例如, S_5 的方向是从 $(1, 4)$ 到 $(2, 3)$.如果用顶点1和2比用顶点集合 $(1, 4)$ 和 $(2, 3)$ 更简便,那么我们可以说, S_5 的方向是从1到2.

现在,我们可以定义穷举割集矩阵如下.

定义6-4-2 有向图 G 的穷举割集矩阵 Q_e 的定义为

$$Q_e = [q_{ij}] \tag{6-4-4}$$

$$q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若边 } j \text{ 在割集 (或割集的无重边并) } \\ & i \text{ 中, 且边 } j \text{ 的方向与割集 (或} \\ & \text{割集的无重边并集) } i \text{ 一致} \\ -1 & \text{若边 } j \text{ 在割集 (或割集的无重边并) } \\ & i \text{ 中, 且边 } j \text{ 的方向与割集 (或} \\ & \text{割集的无重边并) } i \text{ 不一致} \\ 0 & \text{若边 } j \text{ 不在割集 (或割集的无重边并) } i \text{ 中} \end{cases} \tag{6-4-5}$$

G 中每一个割集和每个割集的无重边并由 Q_c 中的一行表示。

例如，图6-4-1中有向图的穷举割集矩阵 Q_c 是

$$Q_c = \begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

由穷举割集矩阵 Q_c 的定义，我们可以看出， Q_c 的每一行代表一个割集或一个割集的无重边并。为了简便，我们用符号 $R(S)$ 表示 Q_c 中代表割集（或割集的无重边并） S 的行。设一个割集（或割集的无重边并）是

$$S_c = \mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1) \cup \mathcal{E}(\bar{\Omega}_1 \times \Omega_1) \tag{6-4-6}$$

其中 $\Omega_1 = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ，则由定理2-4-1，我们知道：

$$S_c = S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_n \tag{6-4-7}$$

其中

$$S_r = \mathcal{E}((v_r) \times (\bar{v}_r)) \cup \mathcal{E}((\bar{v}_r) \times (v_r)) \tag{6-4-8}$$

是对应顶点 v_r 的关联集， $r = 1, 2, \dots, n$ 。我们要看看是否有

$$R(S_c) = \sum_{r=1}^n R(S_r) \tag{6-4-9}$$

其中 S_c 的方向是从 Ω_1 到 $\bar{\Omega}_1$ ，而 S_r 的方向是从 (v_r) 到 (\bar{v}_r) ， $r = 1, 2, \dots, n$ 。一种方法是检验 $R(S_c)$ 的每一列是否等于 $R(S_r)$ 中对应列的和。因为每一列代表一条边，故我们只要考虑两种类型的边，一种是 S_c 中的边，另一种不是 S_c 中的，而是 S_r 中的边。

类型1 设边 e 是 S_c 中的边， v_p 和 v_q 是边 e 的两个端点，且边 e

的方向是从 v_p 到 v_q 。则在 $R(S_c)$ 中,列 e 是1还是-1,取决于 $v_p \in \Omega_1$,还是 $v_q \in \Omega_1$ 。假定 $v_p \in \Omega_1$,则 $1 \leq p \leq n, q > n$ 。由于在 S_1, S_2, \dots, S_n 中只有一个关联集 S_p 包含 e ,且在 $R(S_p)$ 中列 e 为1,故对于这种情况,式(6-4-9)为真。我们容易证明,对于 v_q 在 Ω_1 中的情况,式(6-4-9)也为真。

类型 2 假定边 e 不在 S_c 中。显然,若边 e 不在 S_1, S_2, \dots, S_n 的任何一个中,则式(6-4-9)为真。因而,我们假设边 e 至少在关联集的一个之中,故边 e 的两个端点必在 Ω_1 中。设 v_p 和 v_q 是边 e 的两个端点,且边 e 的方向是由 v_p 到 v_q 。不失一般性,设 $1 \leq p < q \leq n$,则在 S_1, S_2, \dots, S_n 中,恰有两个关联集 S_p 和 S_q 包含边 e 。并且 $R(S_p)$ 的列 e 是+1, $R(S_q)$ 的列 e 是-1。因此在这种情况下,式(6-4-9)为真。我们已假设关联集 S_r 的方向是由 (v_r) 到 (\bar{v}_r) 。如果我们不作此假设,就必须将式(6-4-9)修改如下:

$$R(S_c) = \sum_{r=1}^n k_r R(S_r) \quad (6-4-10)$$

其中

$$k_r = \begin{cases} -1 & \text{若 } S_r \text{ 的方向是由 } (\bar{v}_r) \text{ 到 } (v_r) \\ 1 & \text{若 } S_r \text{ 的方向是由 } (v_r) \text{ 到 } (\bar{v}_r) \end{cases} \quad (6-4-11)$$

这是因为据 Q_c 的定义, -1乘 $R(S_r)$ 相当于改变 S_r 的方向。这一结果说明,一个穷举割集矩阵 Q_c 的任意一行,都可以由一个穷举关联矩阵 A_c 中若干行的线性组合得到。

定理6-4-1 一个有向图 G 的穷举割集矩阵的秩是 $n_v - \rho$,这里 n_v 是 G 的顶点数, ρ 是 G 中最大连通子图的数目。

由这个定理,我们可以看出, Q_c 的任一个秩为 $n_v - \rho$ 的子矩阵 Q 可表示为:

$$Q = D A \quad (6-4-12)$$

其中 D 是一个非奇异矩阵。

因为

$$AB' = 0 \quad (6-4-13)$$

由式(6-1-6), 我们有

$$QB' = DAB' = 0 \quad (6-4-14)$$

定义6-4-2 设 G 是由 ρ 个最大连通子图组成的有向图。 G 的穷举割集矩阵 Q_c 的一个子矩阵 Q 称为 G 的割集矩阵, 如果 Q 是由 Q_c 的 $n_v - \rho$ 行组成, 且 Q 的秩是 $n_v - \rho$ 。

定理6-4-2 设 Q 和 B 分别是一个有向图的割集矩阵和回路矩阵, 则有

$$QB' = 0 \quad (6-4-15)$$

$$BQ' = 0 \quad (6-4-16)$$

当一个割集矩阵是正规形式时, 我们称它为有向图的基本割集矩阵。

定义6-4-3 一个形如

$$Q_f = [Q_{f,1} U] \quad (6-4-17)$$

的割集矩阵 Q_f , 称为基本割集矩阵。

除了对基本割集规定一个方向以外 (这对于无向图是不需要的), 一个有向图的基本割集矩阵可以用与无向图完全相同的方法得到。换句话说, 对于一个给定的树 t (当 $\rho > 1$ 时是林), 我们可以用找出无向图的基本割集集合的方法, 找出有向图的基本割集集合, 然后我们选取基本割集的方向, 使其与 t 在此基本割集中的枝的方向一致。利用这个有向基本割集集合, 我们可以得到基本割集矩阵为

$$Q_f = [Q_{f,1} U] \quad (6-4-18)$$

其中单位矩阵 U 的列对应于 t 的枝。例如, 在图6-4-1所示的有向线图中, 如果我们选取树 t 为 $t = (a, d, e)$, 则基本割集的集合由以下三个基本割集组成:

$$S_a = \mathcal{E}((2, 3, 4) \times (1)) \cup \mathcal{E}((1) \times (2, 3, 4))$$

$$S_d = \mathcal{E}((1, 2, 3) \times (4)) \cup \mathcal{E}((4) \times (1, 2, 3))$$

$$S_e = \mathcal{E}((1,2,4) \times (3)) \cup \mathcal{E}((3) \times (1,2,4))$$

其中 S_a 的方向是由(2,3,4)到(1), S_d 的方向是由(1,2,3)到(4), S_e 的方向是由(1,2,4)到(3).因此,关于树 t 的基本割集矩阵 Q_f 是:

$$Q_f = \begin{matrix} & b & c & a & d & e \\ \begin{matrix} S_a \\ S_d \\ S_e \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

用关于同一个树(林)的基本割集矩阵和基本回路矩阵,由定理6-4-2得:

$$Q_f B_c' = [Q_{f1} U] \begin{bmatrix} U \\ B_{c'12} \end{bmatrix} = 0 \quad (6-4-19)$$

故

$$Q_{f1} = -B_{c'12} \quad (6-4-20)$$

也可以表示为

$$Q_f = [-B_{c'12} U] \quad (6-4-21)$$

类似地,我们可以将基本回路矩阵表示为:

$$B_c = [U - Q_{f1}'] \quad (6-4-22)$$

例如,在图6-4-1所示的有向线图中,根据关于树 $t = (a, d, e)$ 的基本割集矩阵,我们有

$$Q_{f1} = \begin{matrix} & b & c \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

因此,关于有向线图中树 t 的基本回路矩阵是

$$B_c = \begin{bmatrix} b & c & a & d & e \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

6-5 基本割集矩阵的可实现性

在3-5节中, 我们为了检验一个矩阵是否为一个无向图的基本割集矩阵, 使用了 M 子阵。这里我们将看到, 可以用同样的方法来检验有向图的基本割集矩阵。不过, 我们要先来研究有向图基本割集矩阵的一个性质。

定理6-5-1 设 G' 是将有向图 G 的所有边方向颠倒而得到的另一个有向图, 如果矩阵 $Q_1 = [Q_{11} U]$ 是 G 的基本割集矩阵, 那么 Q_1 也是 G' 的基本割集矩阵。

证明: 当每一条边的方向被颠倒时, 我们将割集的方向也颠倒, 就得到相同的割集矩阵。

(证毕)

下一个定理表明了 M 子阵对的一个重要性质, 它导出了有向图基本割集矩阵的一个可实现条件。

定理6-5-2 设矩阵 $M_{1+2} = [M_{11} U]$ 关于行 p 的 M 子阵对是 M_1 和 M_2 。假定存在有向图 $g_k (k=1, 2)$, 使得: (1) 对于 $k=1, 2$, g_k 的基本割集矩阵是 M_k ; (2) 对于 $k=1, 2$, 在 g_k 中存在顶点 p , 使得 M_k 中的行 p , 或 (-1) 乘行 p 代表关于顶点 p 的关联集。那么存在一个线图 g_{1+2} , 使得: (1) M_{1+2} 是 g_{1+2} 的基本割集矩阵; (2) 对于 $M_k (k=1, 2)$ 中除行 p 外的每一行 q , 如果行 q 或 (-1) 乘行 q 代表 g_k 中的一个关联集, 则 M_{1+2} 中的行 q 或 (-1) 乘行 q 代表 g_{1+2} 中的一个关联集。

证明: 我们用构造一个满足定理中条件的有向图 g_{1+2} 的方法, 来证明这个定理。

因为 $M_k (k=1, 2)$ 是 M_{1+2} 关于行 p 的一个 M 子阵, 所以在 g_k 中存在一个顶点 p , M_k 的行 p 或 (-1) 乘行 p 代表关于顶点 p 的关联集。换句话说, g_1 中连接到顶点 p 的边和 g_2 中连接到顶点 p 的边是相

同的。设 (e_1, e_2, \dots, e_m) 是 g_1 (及 g_2)中与顶点 p 连接的所有边的集合。为了简便, 如果 g_1 中 e 关于顶点 p 的方向与 g_2 中 e 关于顶点 p 的方向一致, 我们就说 g_1 和 g_2 中边 e 的方向“一致”。否则, 我们说 g_1 和 g_2 中边 e 的方向“不一致”。例如, 如果 g_1 中边 e 的方向是离开顶点 p , 而 g_2 中 e 的方向是指向顶点 p 的, 则 g_1 和 g_2 中 e 的方向不一致。另一方面, 如果 g_1 中 e 的方向是离开顶点 p , g_2 中 e 的方向也是离开顶点 p 的, 那么 g_1 和 g_2 中 e 的方向是一致的。

因为 $M_k(k=1, 2)$ 的行 p 或 (-1) 乘行 p 代表 g_k 中的一个关联集, 如果 g_1 和 g_2 中与顶点 p 相连的一条边的方向是一致的, 那么, 在 g_1 和 g_2 中, 与顶点 p 相连的每一条边方向都是一致的。反之, 如果 g_1 和 g_2 中与顶点 p 相连的一条边方向不一致, 则在 g_1 和 g_2 中, 与顶点 p 相连的每一条边方向都不一致。

情形 1 假定在 g_1 和 g_2 中, 与顶点 p 相连的一条边方向不一致, 如图6-5-1所示。设对 $r=1, 2, \dots, m$, 在 g_1 中 v_{1r} 和 p 是边 e_r 的端点, 在 g_2 中 v_{2r} 和 p 是边 e_r 的端点, 则我们可以这样来得到 g_{1+2} : 从 g_1 和 g_2 中删去边 e_1, e_2, \dots, e_m , 然后在 v_{1r} 和 v_{2r} 之间加上边 $e_r, r=1,$

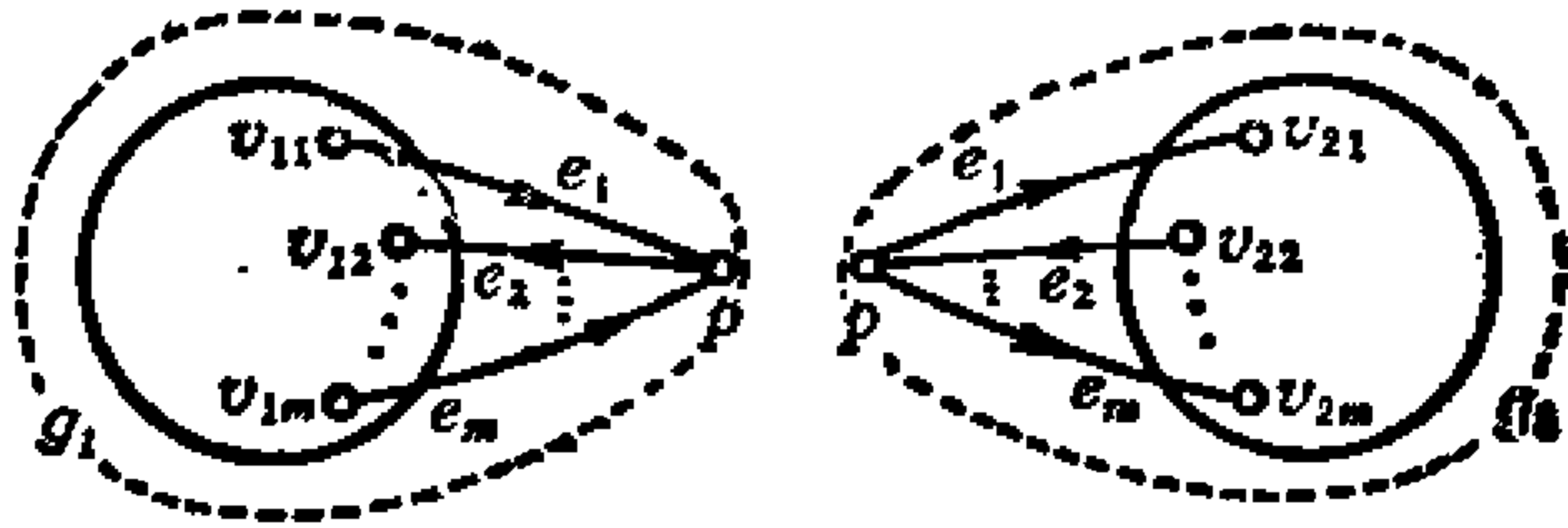


图6-5-1 线图 g_1 和 g_2

$2, \dots, m$, 使其方向与 g_1 中 e_r 关于 v_{1r} 的方向一致, 如图6-5-2所示。显而易见, 所得的图 g_{1+2} 满足定理的条件。

情形 2 假定在 g_1 和 g_2 中, 边 e_r 的方向是一致的, 如图6-5-3所示。则据定理6-5-1, 我们可以颠倒 g_2 中所有边的方向, 得到

一个新的线图 g_2' ，其基本割集矩阵仍为 M_2 。注意，如果 M_2 中的

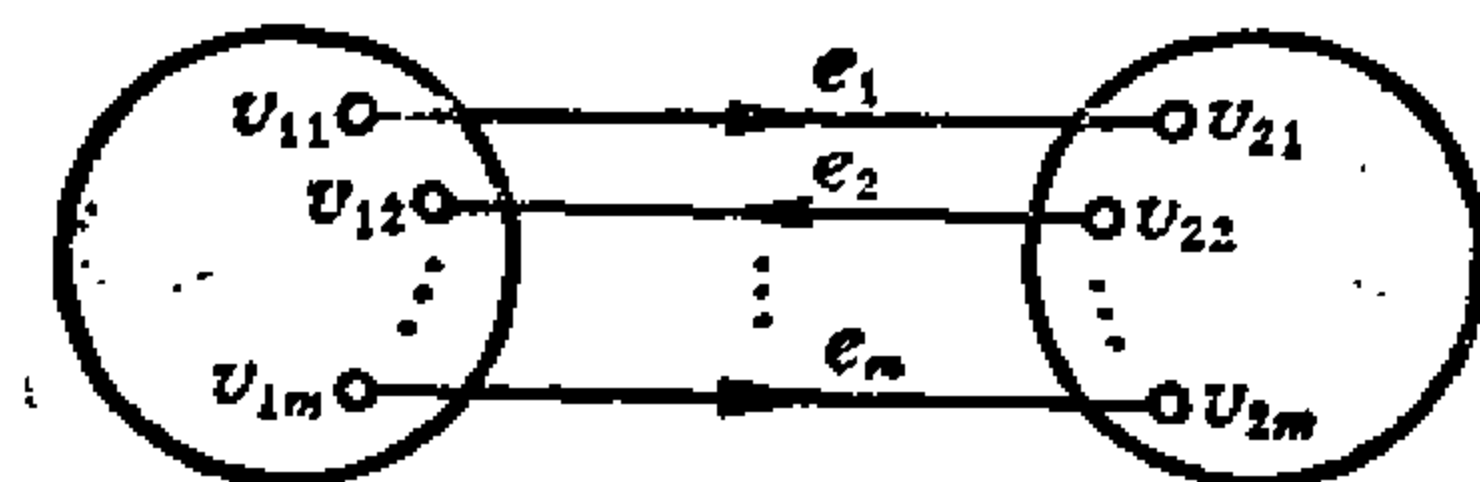


图6-5-2 线图 g_{1+2}

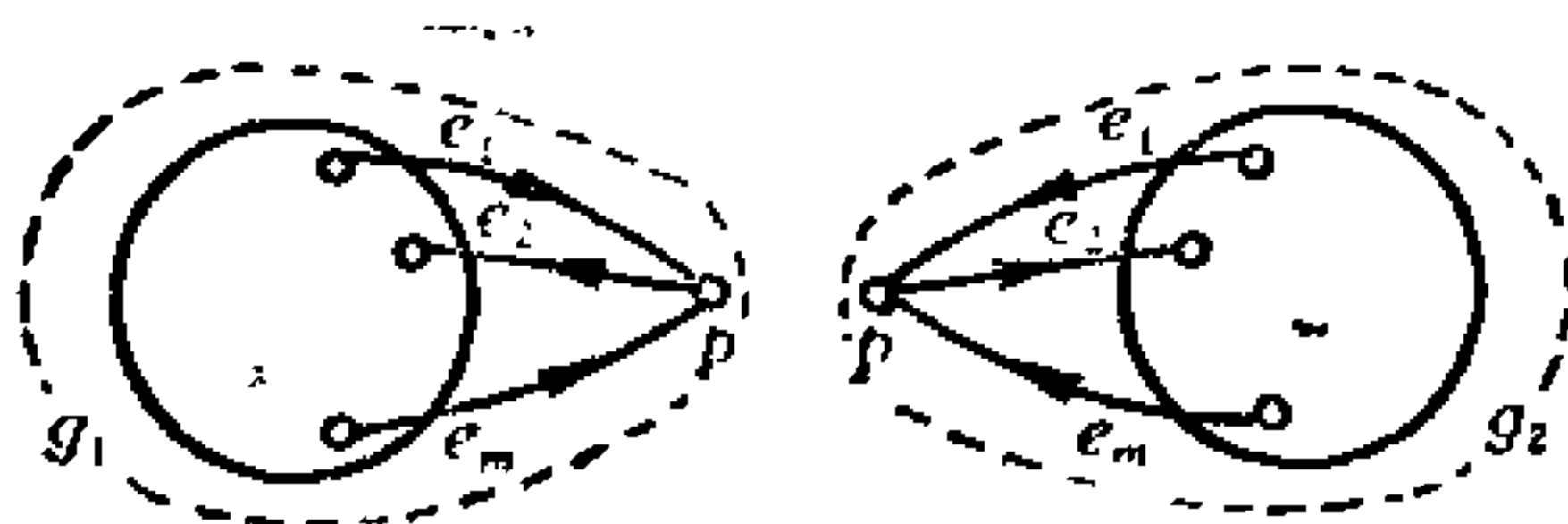


图6-5-3 线图 g_1 和 g_2

一行 q 代表 g_2 中关于顶点 q 的关联集，则 (-1) 乘行 q 代表 g_2' 中关于顶点 q 的关联集。同样，如果 (-1) 乘 M_2 中行 q 代表 g_2 中关于顶点 q 的关联集，则 M_2 中行 q 代表 g_2' 中关于顶点 q 的关联集。现在考虑 g_1 和 g_2' ，这种情形已经变成了上一种情形。因此我们可以得到所求的有向图 g_{1+2} 。 (证毕)

定理6-5-3与定理3-5-8相似，后者是无向图的可实现性条件。

定理6-5-3 矩阵 $R = [R_{11} U]$ 是一个有向图的基本割集矩阵，当且仅当存在 R 的一个最小 M 子阵集合，使得其中每一个最小 M 子阵，在某些行乘上 (-1) 后，变成关联矩阵。

注意，一个由 $+1$ ， -1 和 0 组成的矩阵是一个关联矩阵，当且仅当它的每一列有一个非零元或两个符号相反的非零元。我们知道，对于一个有向图来源，关于顶点 v 的关联集可以表示为 $\mathcal{S}((v) \times (\bar{v})) \cup \mathcal{S}((\bar{v}) \times (v))$ ，它的方向是从 (v) 到 (\bar{v}) 。我们还知

道, 对于一个顶点 p 来说, 集合 $\mathcal{E}((p) \times (\bar{p})) \cup \mathcal{E}((\bar{p}) \times (p))$ 或为割集, 或为割集的重边并. 假定 $\mathcal{E}((p) \times (\bar{p})) \cup \mathcal{E}((\bar{p}) \times (p))$ 的方向是从 (\bar{p}) 到 (p) , 则集合 $\mathcal{E}((p) \times (\bar{p})) \cup \mathcal{E}((\bar{p}) \times (p))$ 不是关联集, 因为它与我们所规定的关联集方向相反. 假定此集合由一个割集矩阵的行 p 表示, 我们知道, 用 (-1) 乘行 p 相当于颠倒这个集合的方向. 因此, 用 (-1) 来乘行 p , 就使行 p 所代表的集合 $\mathcal{E}((p) \times (\bar{p})) \cup \mathcal{E}((\bar{p}) \times (p))$ 变成了一个关联集. 根据这一事实, 并运用定理 6-5-2, 就可以证明定理 6-5-3 (我们将它留给读者).

例 6-5-1 考虑矩阵 R :

$$R = \begin{matrix} & a & b & c & d & e & f & g & h & i \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{matrix}$$

它的最小 M 子阵集合是

$$M_1 = \begin{matrix} & a & b & c & f & g \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \left[\begin{array}{ccccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{matrix}$$

$$M_2 = \begin{matrix} & a & c & g \\ [1 & -1 & 1] \end{matrix}$$

$$M_3 = \begin{matrix} & c & d & e & h \\ 3 [1 & -1 & -1 & 1] \end{matrix}$$

$$M_4 = \begin{matrix} & a & b & c & e & f & i \\ \begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{matrix}$$

$$M_5 = \begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} b \quad c \quad d \quad e \quad h \quad i \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

用 (-1) 乘 M_4 和 M_5 的行4，就得到

$$M'_4 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad e \quad f \quad i \\ \left[\begin{array}{cccccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right] \end{array}$$

和

$$M'_5 = \begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} b \quad c \quad d \quad e \quad h \quad i \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right] \end{array}$$

因为 M_1, M_2, M_3, M'_4 和 M'_5 都是关联矩阵，据定理6-5-3知，矩阵 R 是一个有向图的基本割集矩阵。

6-6 有向子图

在上一节中，我们发现，有向图的割集矩阵、回路矩阵和无向图的割集矩阵、回路矩阵，有许多相同的性质。换句话说，在一个有向图中，象割集，回路和路径这样一些子图，除了我们对它们规定有方向，使得子图中边的方向可以和子图的方向作比较这一点外，其余性质都与对应无向图中的子图相同。因此，我们在前几章中所研究的，关于无向线图的性质，几乎都可以变成有向图的性质，而无需作较大的修改。另外，还有一些有向图的重要子图，它们的特殊性质不能由对应无向图得到。这些子图就是所谓有向回路，有向路径和有向树。为了研究这些子图，需要对它们作出确切的定义。

定义6-6-1 有向边列是满足以下条件的边列，它具有从始点到终点的方向，并且边列中每条边的方向与此边列的方向一致。

例如，在图6-6-1所示的有向线图中， $(abcde)$ 是一个有向边列，而 (abf) 不是有向边列。

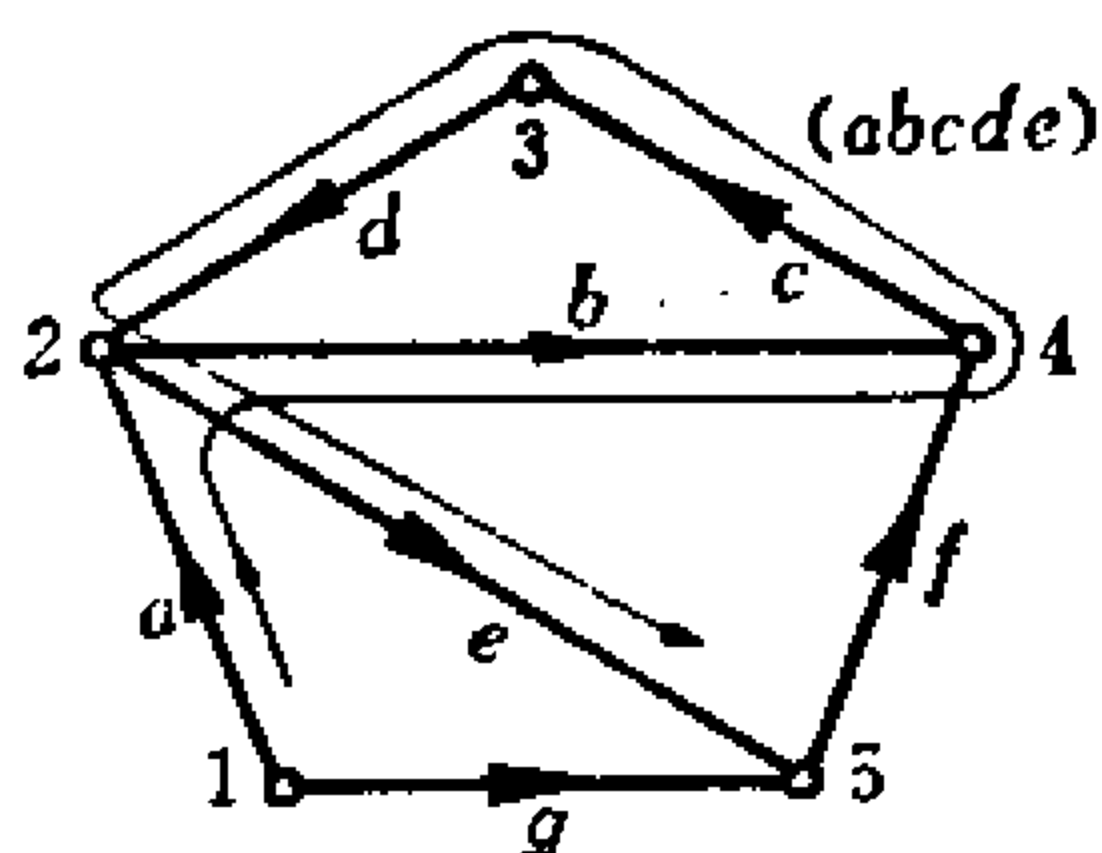


图6-6-1 一个有向图

定义6-6-2 如果一个有向边列的始点和终点相同，则称此边列为有向闭边列。否则，称为有向开边列。

例如，图6-6-1中的 $(bcde)$ 是一个有向闭边列，而 $(abcde)$ 是一个有向开边列。

列。

与无向图中顶点的度类似，我们定义有向图顶点的出度和入度。

定义6-6-3 顶点 v 的出度 $d^+(v)$ ，是与顶点 v 连接且方向为离开顶点 v 的边的数目。顶点 v 的入度 $d^-(v)$ ，是与顶点 v 连接且方向为指向顶点 v 的边的数目。

例如，在图6-6-1中顶点2的出度 $d^+(2)$ 和入度 $d^-(2)$ 分别为：

$$d^+(2) = 2$$

和

$$d^-(2) = 2$$

顶点5的出度 $d^+(5)$ 和入度 $d^-(5)$ 分别为

$$d^+(5) = 1$$

和

$$d^-(5) = 2$$

根据这个定义，可以看出

$$d(v) = d^+(v) + d^-(v) \quad (6-6-1)$$

其中 $d(v)$ 是顶点 v 的度。

定义6-6-4 一个有向图称为有向欧拉图，如果对于每一个顶点 v ，其出度 $d^+(v)$ 等于入度 $d^-(v)$ 。

例如，图6-6-2中的有向图是一个有向欧拉图，而图6-6-3中的有向图不是有向欧拉图。

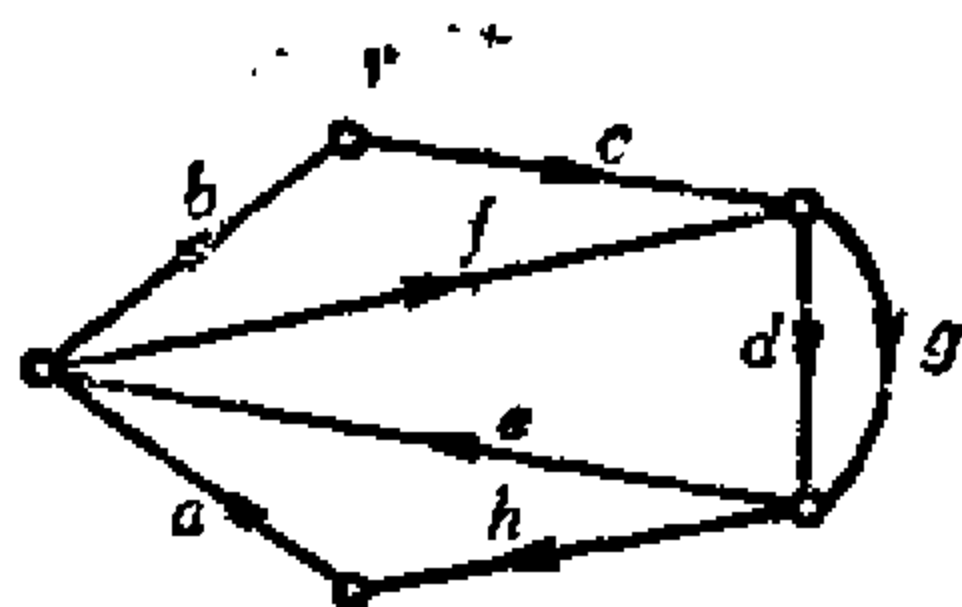


图6-6-2 有向欧拉图

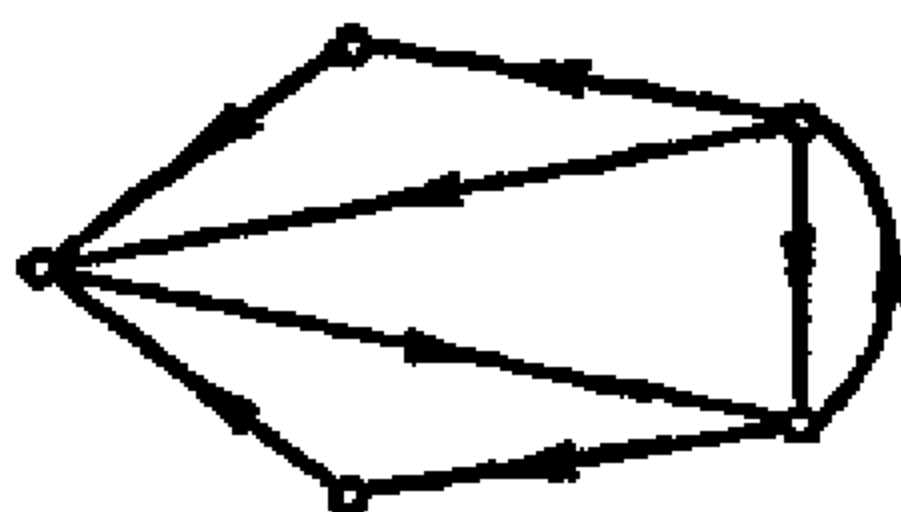


图6-6-3 欧拉图

现在，容易证明下列定理。

定理6-6-1 一个连通有向图是有向欧拉图，当且仅当存在一条包含图中所有边的有向闭边列。

例如，图6-6-2中有向欧拉图的闭边列 $(abcdefgh)$ 包含了图中所有的边。

定义6-6-5 如果一个连通有向欧拉图具有这样的性质：它的每个顶点的度为 2（即与每个顶点恰有两条边相连），则称此连通有向欧拉图为有向回路。

例如，图6-6-2中所有的有向回路是 (a, b, c, d, h) , (a, b, c, g, h) , (a, d, f, h) , (a, f, g, h) , (b, c, d, e) , (b, c, e, g) , (d, e, f) , (e, f, g) 。

容易看出，如果 C_1 和 C_2 是有向回路，且 $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ ，那么 $C_1 \oplus C_2$ 就不是有向回路。一般地说，两个有向欧拉图的环和可能不

是一个有向欧拉图。但是，我们有以下情形。

定理6-6-2 设 G 是一个有向欧拉图，则对任一个作为 G 的真子图的有向回路，存在 G 的子图 E_1 和 E_2 ，二者均为非空有向欧拉图，使得

$$E_1 \oplus E_2 = C \quad (6-6-2)$$

在证明这个定理之前，我们先来研究另一个定理。

定理6-6-3 设 E 是一个有向欧拉图， E_1 是 E 的真子图，它也是一个有向欧拉图，则

$$E \oplus E_1 = E - E_1 \quad (6-6-3)$$

是一个有向欧拉图。

这个定理可以用考虑 $E - E_1$ 中每个顶点的入度和出度的方法来证明。再根据定理6-6-3，令 $E_1 = E - C$ 及 $E_2 = C$ ，我们就可得到定理6-6-2的证明。

定理6-6-4 一个有向欧拉图至少包含一个有向回路。

这个定理很容易用构造一个有向闭边列的方法来证明。下一个定理相当明显，但非常重要。

定理6-6-5 有向欧拉图或者是有向回路，或者是有向回路的无重边并。

证明： 据定理6-6-4，在一个有向欧拉图 G 中，至少存在一个有向回路。设此有向回路为 C_1 ，那么，据定理6-6-3， $G - C_1$ 是一个有向欧拉图。因此，在 $G - C_1$ 中至少存在一个有向回路，如此类推，最后， $G - C_1 - C_2 - \cdots - C_k$ 变为空图。于是，我们可以断定， G 是有向回路 C_1, C_2, \cdots, C_k 的无重边并。当 $k = 1$ 时，显然 G 就是一个有向回路。 (证毕)

例如，图6-6-2中的有向欧拉图可以看作有向回路 (a, d, f, h) 和 (b, c, e, g) 的无重边并。

对于无向图来说，我们已经研究过 M 图，它是一条路径和若干回路的无重边并。这里，我们要介绍有向 M 图和有向路径。下

面，我们要证明，一个有向 M 图是一条有向路径和若干有向回路的无重边并。

定义6-6-6 一个有向图称为 $M(i \times j)$ 类的有向 M 图，如果它满足以下三个条件：

1. 对除 i 和 j 以外的所有顶点， $d^+(v) = d^-(v)$ ；
2. $d^+(i) = d^-(i) + 1$ ；
3. $d^-(j) = d^+(j) + 1$ 。

设 G 由一个始点为 i ，终点为 j 的有向开边列的所有边组成，则 G 是一个 $M(i \times j)$ 类的有向 M 图。例如，图6-6-4中的有向图就是一个 $M(i \times j)$ 类的有向 M 图。

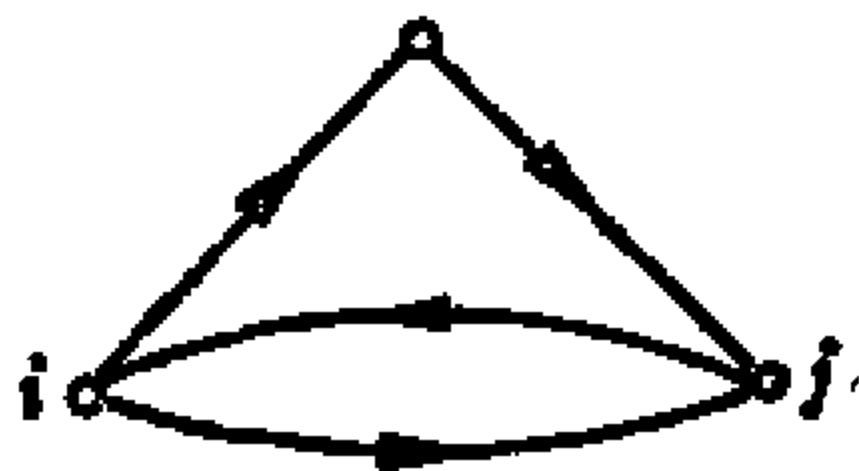


图6-6-4 一个 $M(i \times j)$ 类的 M 图

当一个 $M(i \times j)$ 类的有向 M 图不连通时，它的最大连通子图中必然有一个是 $M(i \times j)$ 类的有向 M 图，而其他的则是有向欧拉图。例如，图6-6-5中的有向图是一个 $M(i \times j)$ 类的分离有向 M 图。注意，其中除了一个最大连通子图外，其余所有最大连通子图都是有向欧拉图。



图6-6-5 一个 $M(i \times j)$ 类的分离有向 M 图

有向路径是一种特殊的有向 M 图。

定义6-6-7 设 P 是一个 $M(i \times j)$ 类的连通有向 M 图。如果对

除 j 外所有的顶点, $d^+(v) = 1$, 而 $d^+(j) = 0$, 则称 P 为从 i 到 j 的有向路径。

根据这个定义, 就得到定理 6-6-6。

定理 6-6-6 一个 $M(i \times j)$ 类的有向 M 图或为从 i 到 j 的一条有向路径, 或为从 i 到 j 的一条有向路径与若干有向回路的无重边并。

可以用一个有向边列来完成这个定理的证明。下面, 我们发现一个与无向情形的 M 图相似的性质, 这个性质是说, 两个具有相同端点的 M 图的和是一个欧拉图。

定理 6-6-7 设 $M(i \times j)$ 是一个 $M(i \times j)$ 类的有向 M 图, $M(j \times i)$ 是一个 $M(j \times i)$ 类的有向 M 图。假定

$$M(i \times j) \cap M(j \times i) = \phi \quad (6-6-4)$$

则

$$M(i \times j) \oplus M(j \times i) = E \quad (6-6-5)$$

是一个有向欧拉图。

用检查 E 中每个顶点的入度和出度的办法, 很容易完成这个定理的证明。

现在, 我们可以将有向 M 图加以推广。

定义 6-6-8 $M[i(k) \times j(k)]$ 类的有向 M 图定义为满足以下条件的有向图:

1. 对除 i 和 j 外的所有顶点, $d^+(v) = d^-(v)$;
2. $d^+(i) = d^-(i) + k$;
3. $d^-(j) = d^+(j) + k$ 。

例如, 图 6-6-6 中的有向图是一个 $M[i(2) \times j(2)]$ 类的有向 M 图。

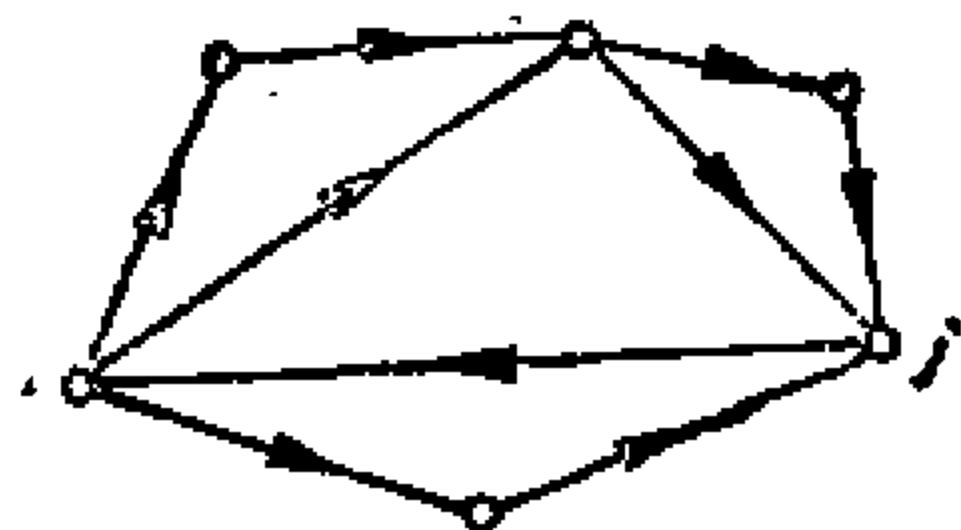


图 6-6-6 一个 $M[i(2) \times j(2)]$ 类的有向 M 图

定理 6-6-8 $M[i(k) \times$

$j(k)$ 类的有向 M 图或为从 i 到 j 的 k 条有向路径的无重边并,或为从 i 到 j 的 k 条有向路径和若干有向回路的无重边并。

对 k 作数学归纳法,并利用有向边列,即可完成这个定理的证明。

知道一个有向图是否包含有向回路,是相当重要的。下面的定理给出了一个有向回路存在的充分条件。

定理6-6-9 如果一个有限连通有向图 G 的每个顶点的出度为1,则 G 中恰含有一个有向回路。

证明: 设 G 是一个有向图,其中,所有的顶点的出度 $d^+(v)=1$ 。首先,我们要证明 G 最多有一个有向回路。短路 G 中一条边,显然所得图 G_1 中所有顶点仍满足 $d^+(v)=1$ 。只要不产生任何自环,我们可以继续把边短路。注意在所有顶点满足 $d^+(v)=1$ 的任一有向图中,不会有两条以上的边并联。又注意到只有当两条边是并联的,如图6-6-7所示时,我们短路这两条边中的一条才会形成自环。用 g_p 表示一个由两条并联边构成的图。考虑在不产生自环的情况下,将所有边短路后所得的图 G_k 。因为有向图 G 是连通的,而短路边不会产生分离图,故 G_k 必与 g_p 同构。我们还知道,短路边不会减少有向回路的数目。因此有向图 G 最多有一个有向回路。



图6-6-7 有向图 g_p

现在,我们要证明,有向图 G 至少有一个有向回路。从顶点 v 出发,可以得到一个有向边列,因为对于所有的顶点有 $d^+(v)=1$ 。故这个边列只会终止于一个此边列前面已经经过的顶点。因此,如果此有向边列终止了,就至少有一个有向回路。而由于 G 是有限的,这个边列必然终止。(证毕)

定理6-6-10 设 G 是一个连通有向线图,对于所有顶点,有 $d^-(v)=1$,则 G 恰包含一个有向回路。

证明: 将 G 中每条边的方向颠倒,所得的有向图满足定理

6-6-9的条件，故 G 恰有一个有向回路。 (证毕)

例如，图 6-6-8 中的连通有向图 G 满足定理6-6-10的条件，故其中恰存在一个有向回路。

定理6-6-11 如果一个有向图满足以下条件：对所有的顶点有

$$d^+(v) > 0$$

或对所有的顶点有

$$d^-(v) > 0$$

则此有向图至少包含一个有向回路。

这个定理易由有向边列证明。

考虑图6-6-9所示的有向图。可以看出，此有向图不满足定理6-6-11的条件。但是，这个有向图包含一个有向回路。这个例子给我们提示了修改上述定理使之变成充分必要条件的一种方法。

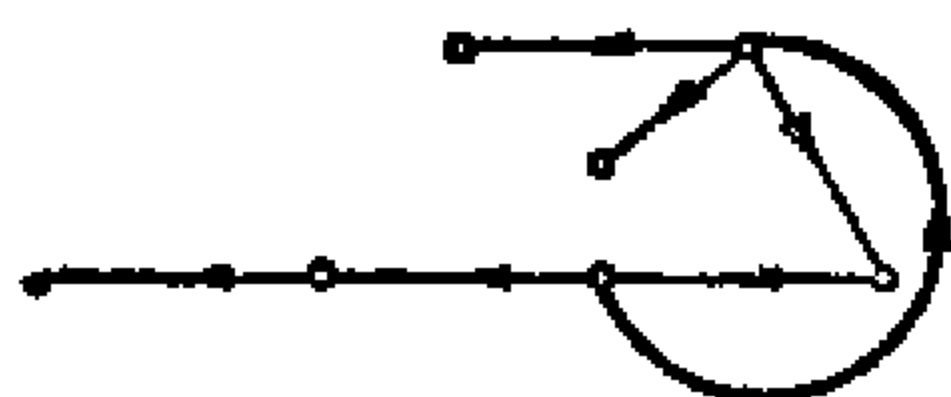


图6-6-8 一个连通有向图

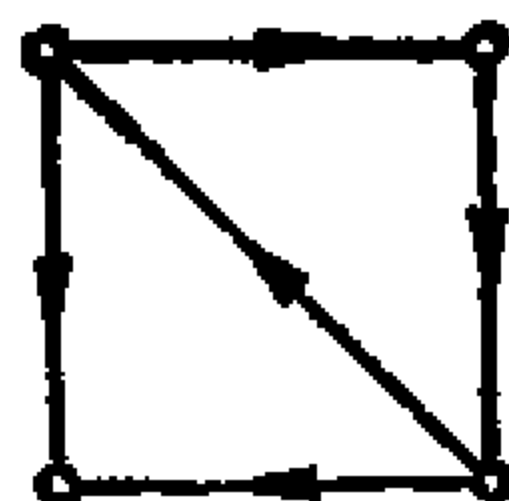


图6-6-9 包含一个有向回路的有向图

定理6-6-12 一个有向图至少包含一个有向回路的充分必要条件是存在一个子图，对于该子图中的所有顶点，满足

$$d^+(v) > 0$$

或对该子图中所有的顶点有

$$d^-(v) > 0$$

虽然这个定理给出了一个充分必要条件，但是，考查所有可能的子图来判断一个有向图是否包含有向回路的方法，不是一个有效的方法。为了更有效地判断有向回路的存在性，我们定义消

去顶点的 W 过程如下。

定义6-6-9 设 v 是有向图 G 的一个顶点。假定有 $d^+(v) = 0$ ，或者 $d^-(v) = 0$ 。则删除与顶点 v 相连接的所有边的过程称为消去顶点 v 的 W 过程。

注意，如果顶点 v 可以经 W 过程消去，则不会有有向路径通过顶点 v 。换句话说，如果顶点 v 在一个有向回路中，则我们不可能用 W 过程将顶点 v 消去。运用这一过程，我们得到以下定理。

定理6-6-13 当且仅当有向图 G 不含有向回路时，连续运用 W 过程可以消去 G 中所有的顶点。

这个定理的证明可以用定理6-6-11来完成。从下面的例子容易看出，这个定理给出了一种判断有向回路存在性的算法。

例6-6-1 考虑图6-6-10所示的有向图 G 。因为 $d^+(1) = 0$ ， $d^-(2) = 0$ ，故我们可以用 W 过程将顶点1和2消去。所得的图 G_1 如图6-6-11(a)所示。

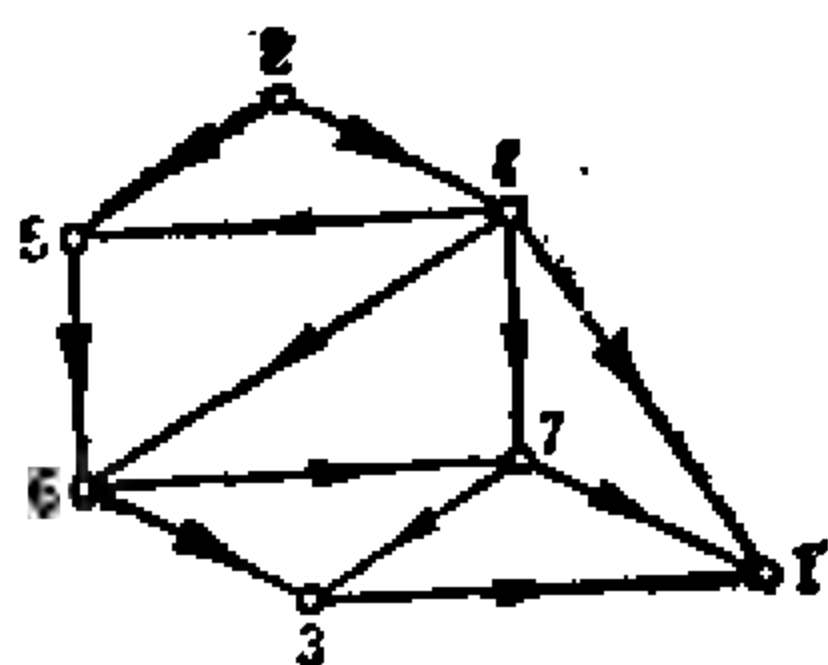


图6-6-10 一个有向图

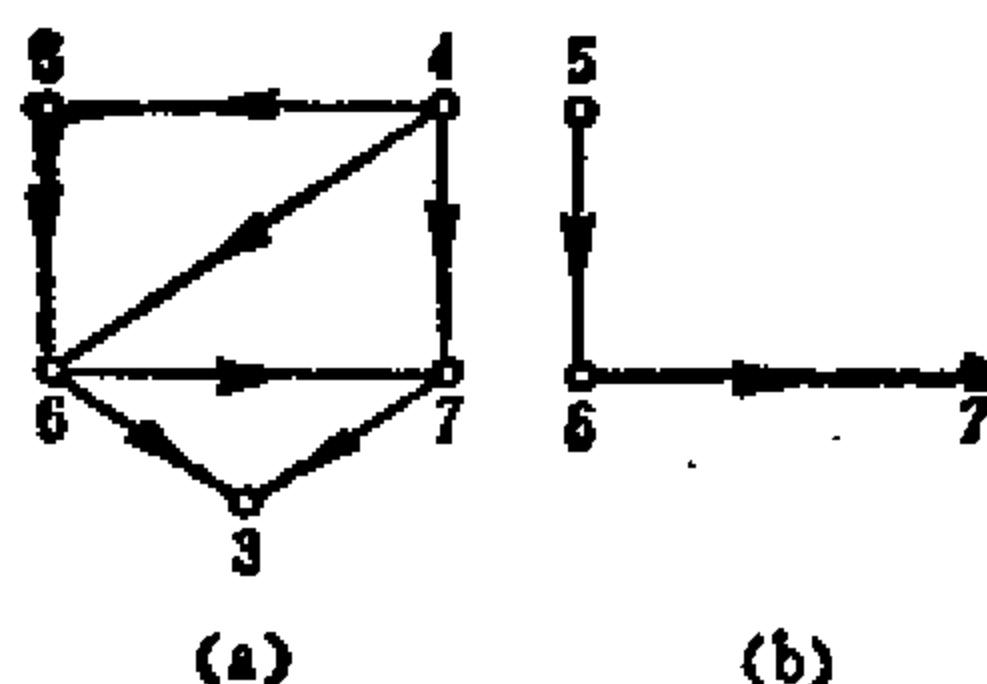


图6-6-11 经 W 过程所得的图(a) G_1 (b) G_2

在 G_1 中， $d^+(3) = 0$ ， $d^-(4) = 0$ ，于是我们可以用 W 过程将顶点3和4消去，所得的图 G_2 如图6-6-11(b)所示。在 G_2 中， $d^-(5) = 0$ ， $d^+(7) = 0$ ，于是由 W 过程消去顶点5和7，我们就移去了所有的边。现在已经没有边留下，因此有向图 G 不含有向回路。

考虑图6-6-12所示的有向图 G_0 。可以看出， $d^-(1) = 0$ ，

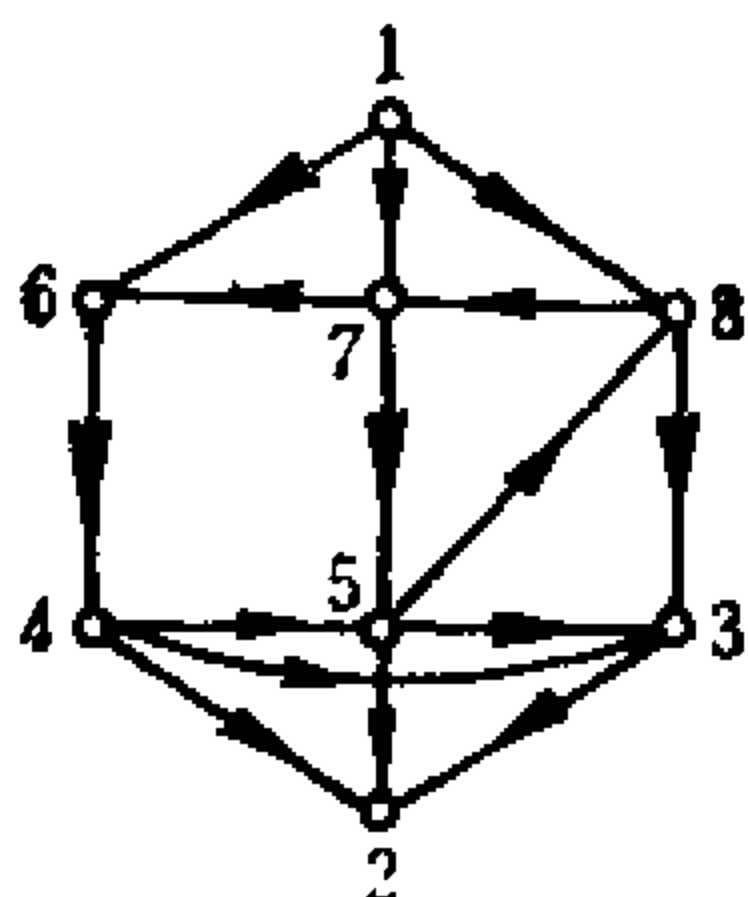
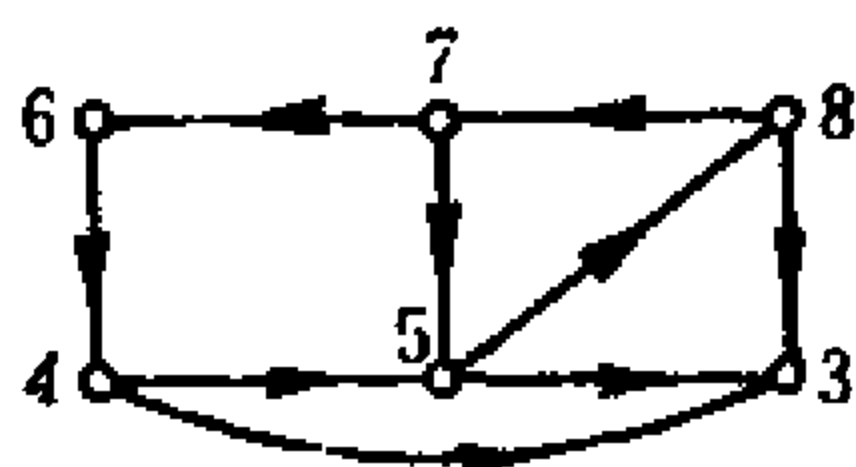


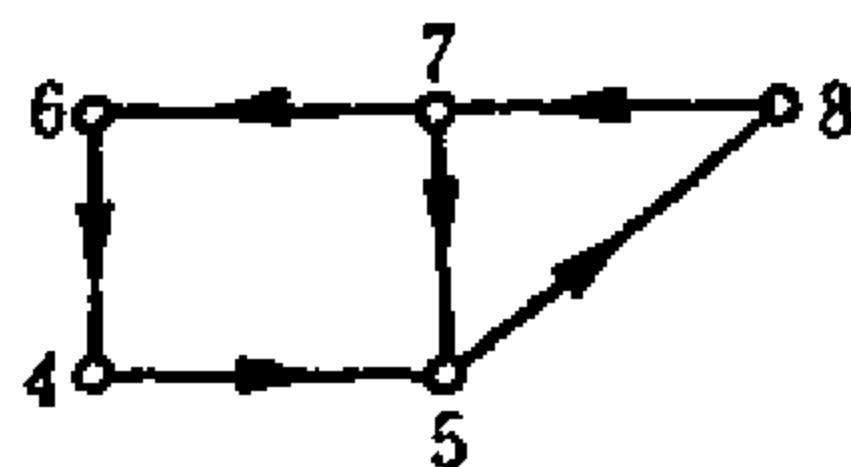
图6-6-12 有向图 G_0

$d^+(2) = 0$, 因此由 W 过程消去顶点1和2, 我们得到图 G'_0 , 如图6-6-13(a)所示。在 G'_0 中, $d^+(3) = 0$, 因此由 W 过程消去顶点3得到图 G''_0 , 如图6-6-13(b)所示。因为 G''_0 中再也没有入度或出度为零的顶点了, 所以我们不可能再用 W 过程消去 G''_0 中的顶点, 并且 G''_0 中还有边。这就告诉我们,

G_0 至少包含一个有向回路。



(a) G'_0



(b) G''_0

图6-6-13 经 W 过程所得的图

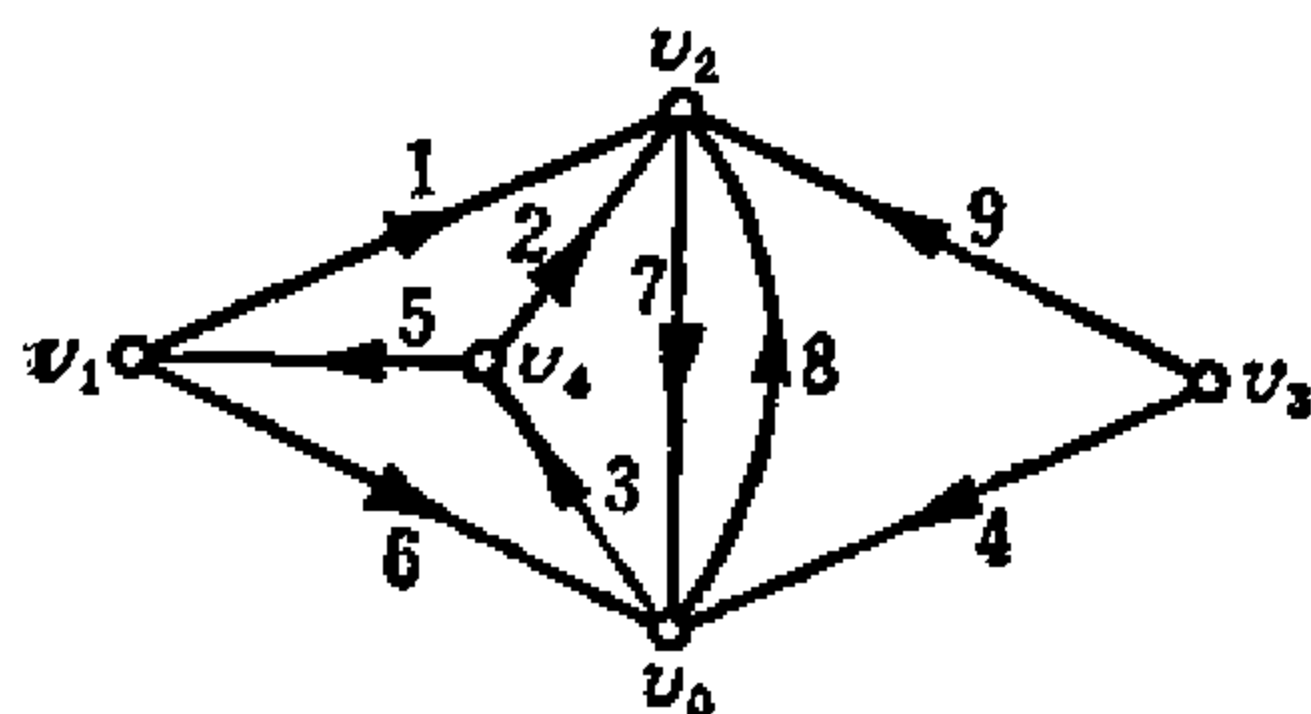
(a) G'_0

(b) G''_0

习 题

1. 证明定理6-1-1.

2. 在图P-6-2所示的有向图中, 以 v_0 为参考点, 写出它的一个关联矩阵 A .



图P-6-2

个关联矩阵 A .

3. 写出图P-6-2所示的有向图关于树 $t = (1, 2, 3, 4)$ 的基本割集矩阵.

4. 写出图P-6-2所示的有向图关于树 $t = (1, 2, 3, 4)$ 的基本回路矩阵.

5. 对于一个有向图, 是否有可能选取一组线性无关的回路, 使

得回路矩阵（它的行与这些线性无关回路对应）有不为 ± 1 的非零大行列式？用以下两个线图试作一下：图 $P-6-5(a)$ 所示线图；图 $P-6-5(b)$ 所示线图。



图 $P-6-5$

6. 设 S_e 是关于树 t 的一个基本割集，而边 e 在 t 中。证明对于 S_e 中每条边 $b (\neq e)$ ，

$$t \oplus (e, b)$$

是一个树。

7. 设 C_b 是关于树 t 的一个基本回路，边 b 不在 t 中。证明对 C_b 中每条边 $e (\neq b)$ ，

$$t \oplus (b, e)$$

是一个树

8. 证明定理 6-5-3.
9. 证明定理 6-6-1.
10. 证明定理 6-6-3.
11. 证明定理 6-6-3.
12. 证明定理 6-6-11.
13. 证明定理 6-6-12.
14. 证明定理 6-6-13.
15. 判断图 $P-6-15$ 所示的有向图是否包含有向回路。

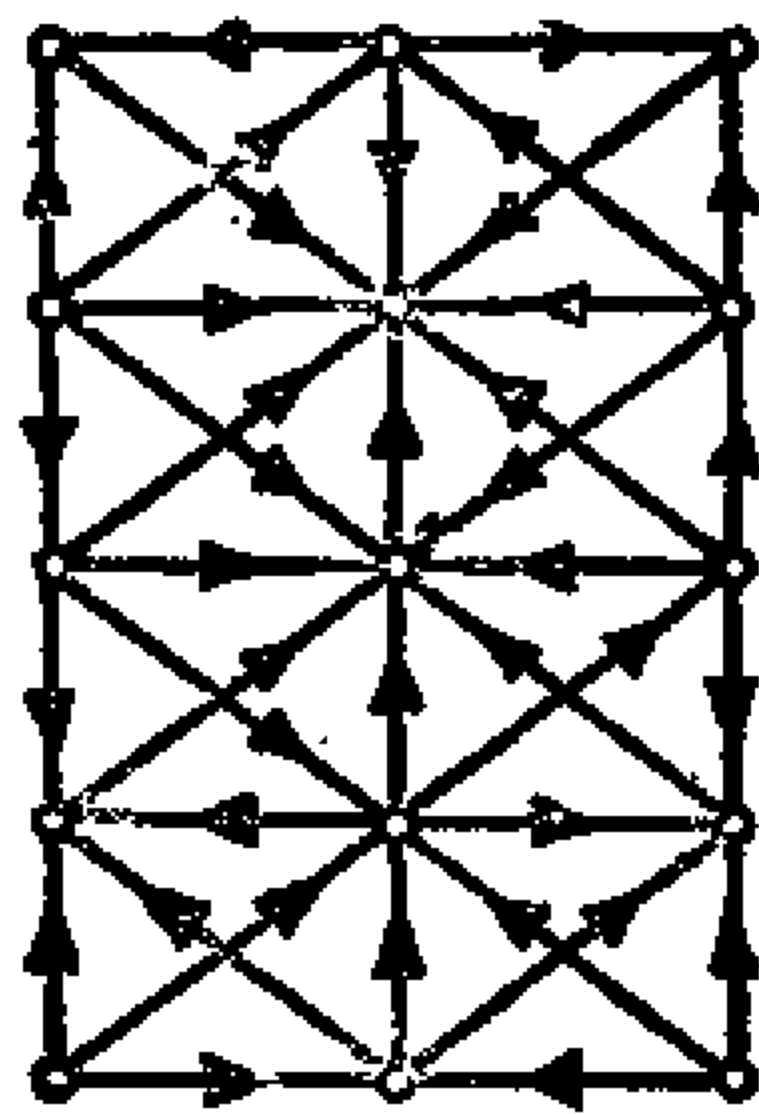


图 $P-6-15$

第七章 无源网络的拓扑分析

7-1 克希霍夫定律(Kirchhoff's Laws)

克希霍夫定律在描述物理和非物理系统的特征中具有非常重要的意义，特别是当这些系统用线图表示时。换句话说，对系统的分类可以按照它是否满足以下定律来进行。(1) 克希霍夫电流定律；(2) 克希霍夫电压定律；(3) 两条定律；(4) 或者两条定律都不满足。例如，稍加限制，一个传输网就满足克希霍夫电流定律。一个电网络满足克希霍夫的两条定律。因此，在研究电网络之前，我们要研究当一个系统由线图表示时，克希霍夫定律的性质。

考虑图7-1-1中的有向线图，其中每条边上所标的符号 i_k 表示流过这条边的支路电流或边流。支路电流的方向与边的定向一致。象支路电流那样与一条边相伴的权，称为边权。

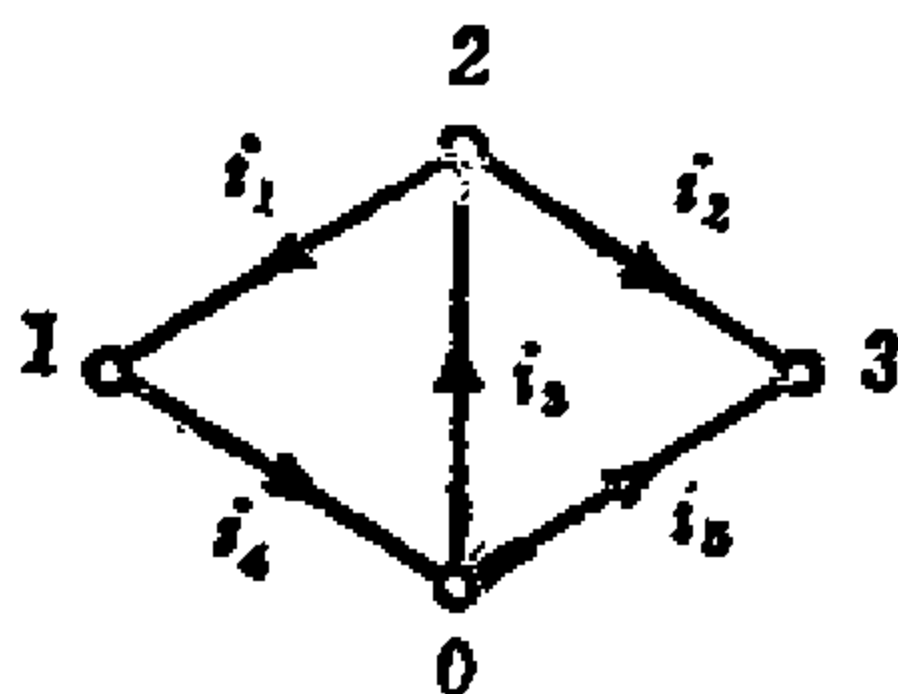


图7-1-1 加权有向线图

定义7-1-1 当线图的每一条边赋予一个边权（或若干边权）时，我们称此线图为加权线图。

考虑一个加权有向线图 G ，其中每条边有一个支路电流作为它的边权。设 A 是 G 的关联矩阵，其第 p 列表

示边 $e_p, p = 1, 2, \dots, n_e$ 。又设 i_p 是边 e_p 的支路电流。因为关联矩阵 A 的每一行代表与一个顶点关联的所有边以及它们的方向，所

以，关联矩阵 A 与一个列矩阵

$$I_c = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_{n_c} \end{bmatrix} \quad (7-1-1)$$

的乘积 AI_c 给出了一组方程，其中每一个方程表示与一个顶点关联的支路电流的代数和。令这些方程都为零，我们就得到克希霍夫电流定律：

$$AI_c = 0 \quad (7-1-2)$$

例如，由图7-1-1中的加权线图，我们有

$$\begin{array}{ccccc} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 \end{array} \quad \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{array}{l} 1 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 3 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{array}{l} 1 \begin{bmatrix} -i_1 + i_4 \end{bmatrix} \\ 2 \begin{bmatrix} i_1 + i_2 - i_3 \end{bmatrix} \\ 3 \begin{bmatrix} -i_2 - i_5 \end{bmatrix} \end{array} = 0$$

如果在一个有向线图中，我们不用支路电流来作每边的权，而以支路电压 v_k 来作为每边的权，则可得到克希霍夫电压定律：

$$BV_c = 0 \quad (7-1-3)$$

其中 B 是有向图的回路矩阵，而

$$V_c = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n_c} \end{bmatrix} \quad (7-1-4)$$

并假设每个支路电压 v_k 的正极位于对应的边的箭头的尾端。从式 (7-1-2) 和 (7-1-3)，我们可以看出， $n_v - \rho$ 个克希霍夫电流方程是线性无关的， $n_c - n_v + \rho$ 个克希霍夫电压方程也是线性无关的，

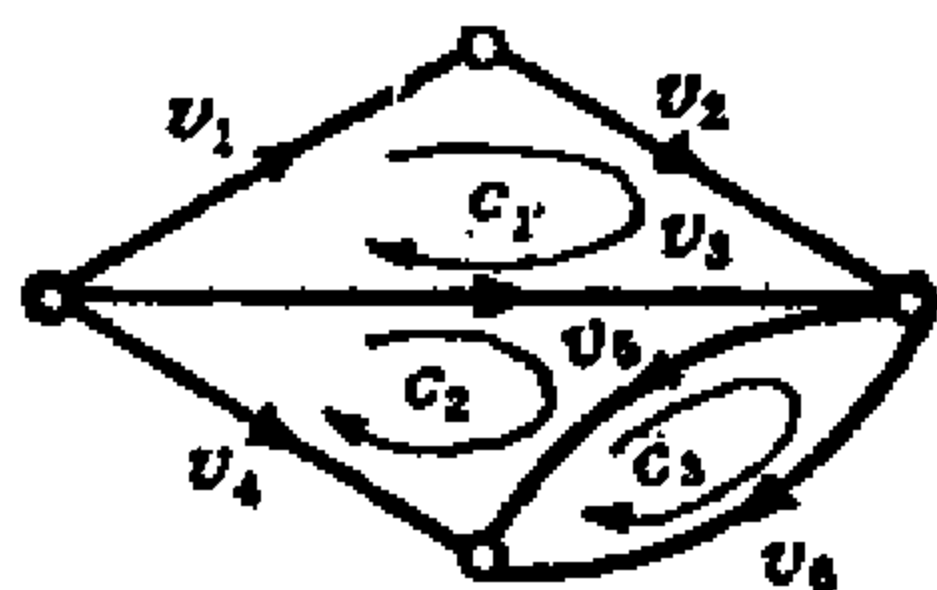


图7-1-2 加权线图

其中 n_e 是加权有向线图的边数， n_v 是顶点数， ρ 是最大连通子图的个数。

例7-1-1 考虑图7-1-2中的加权线图，采用回路 C_1, C_2 和 C_3 ，我们有回路矩阵

$$B = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

于是，由式(7-1-3)，我们有

$$BV_e = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} v_1 + v_2 - v_3 \\ v_3 - v_4 + v_5 \\ -v_4 + v_6 \end{bmatrix} = 0 \end{matrix}$$

值得注意，在式(7-1-2)中，我们用一个割集矩阵来代替关联矩阵，得到

$$QI_e = 0 \quad (7-1-5)$$

这是因为，用一个非奇异矩阵去左乘式(7-1-2)，就可以得到这个等式。

7-2 网孔变换

当一个系统满足克希霍夫电流定律时，其支路电流不可能全

都是独立的，网孔变换是把所有的支路电流表示为选定的独立支路电流的函数的一种方法。

假定我们把式(7-1-1)中的列矩阵分块为：

$$I_e = \begin{bmatrix} I_e \\ I_t \end{bmatrix} \quad (7-2-1)$$

使得 I_e 是对应于与林（或树） t 有关诸弦的所有支路电流的列矩阵， I_t 为对应林（或树） t 的树枝的支路电流的列矩阵。这样， I_e 中的元素数为 $n_e - n_v + \rho$ ， I_t 中的元素数为 $n_v - \rho$ ，其中 n_e 是加权有向线图的边数， n_v 是顶点数， ρ 是最大连通子图的数目。我们也可以把关联矩阵 A 分块为

$$A = [A_{11} \ A_{12}] \quad (7-2-2)$$

其中 A_{11} 包含与林（或树） t 有关的弦相对应的 $n_e - n_v + \rho$ 个列， A_{12} 包含与林（或树） t 的树枝对应的 $n_v - \rho$ 个列。这样，根据式(7-1-2)，

$$AI_e = [A_{11} \ A_{12}] \begin{bmatrix} I_e \\ I_t \end{bmatrix} = 0 \quad (7-2-3)$$

或

$$I_t = -A_{12}^{-1} A_{11} I_e \quad (7-2-4)$$

因此

$$I_e = \begin{bmatrix} U \\ -A_{12}^{-1} A_{11} \end{bmatrix} I_t \quad (7-2-5)$$

因为从式(6-1-13)，取 $B_{11} = U$ ，我们知道

$$B_t = [U \ - (A_{12}^{-1} A_{11})'] \quad (7-2-6)$$

所以我们有

$$I_e = B_t' I_t \quad (7-2-7)$$

另外，任何一个回路矩阵 B 可以表示为

$$B = DB_f \quad (7-2-8)$$

其中 D 是一个 $n_e - n_v + \rho$ 阶的非奇异矩阵，即

$$B = [B_{11} \ B_{12}] = D[U \ B_{f_{12}}] \quad (7-2-9)$$

因此

$$B_{11} = D$$

是非奇异的。于是

$$B_f = D^{-1}B = B_{11}^{-1}B \quad (7-2-11)$$

从式(7-2-7)，给出

$$I_e = B'(B_{11}^{-1})'I_e \quad (7-2-12)$$

或

$$I_e = B'M(I) \quad (7-2-13)$$

这里

$$M(I) = (B_{11}^{-1})'I_e \quad (7-2-14)$$

将式(7-2-13)中的 I_e 代入式(7-1-2)，我们有

$$AI_e = AB'M(I) = 0 \quad (7-2-15)$$

由于 AB' 总是零，即使 $M(I)$ 是任意一组 $n_e - n_v + \rho$ 个函数的列矩阵，克希霍夫电流定律都能满足。但是，一旦 $M(I)$ 被选定， I_e 就由式(7-2-13)确定，这就叫做网孔变换。因为将式(7-2-13)的两端转置，我们得到

$$I_e' = [m_1 \ m_2 \ \cdots \ m_{n_e - n_v + \rho}]B \quad (7-2-16)$$

这里

$$M(I)' = [m_1 \ m_2 \ \cdots \ m_{n_e - n_v + \rho}] \quad (7-2-17)$$

从此式我们可以看出，对 $p = 1, 2, \dots, n_e - n_v + \rho$ ，元素 m_p 乘以 B 的第 p 行的每一个元素。这样， m_p 可以看作是赋予回路的一种权，与回路矩阵 B 的第 p 行相对应。于是，可以把 $M(I)$ 看成所谓回路电流的列矩阵。例如，在图7-2-1的加权线图中， I_e 可以由 $M(I)$ 得到，这里选回路 C_1, C_2 和 C_3 如图7-2-1所示，我们有

$$M(I) = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

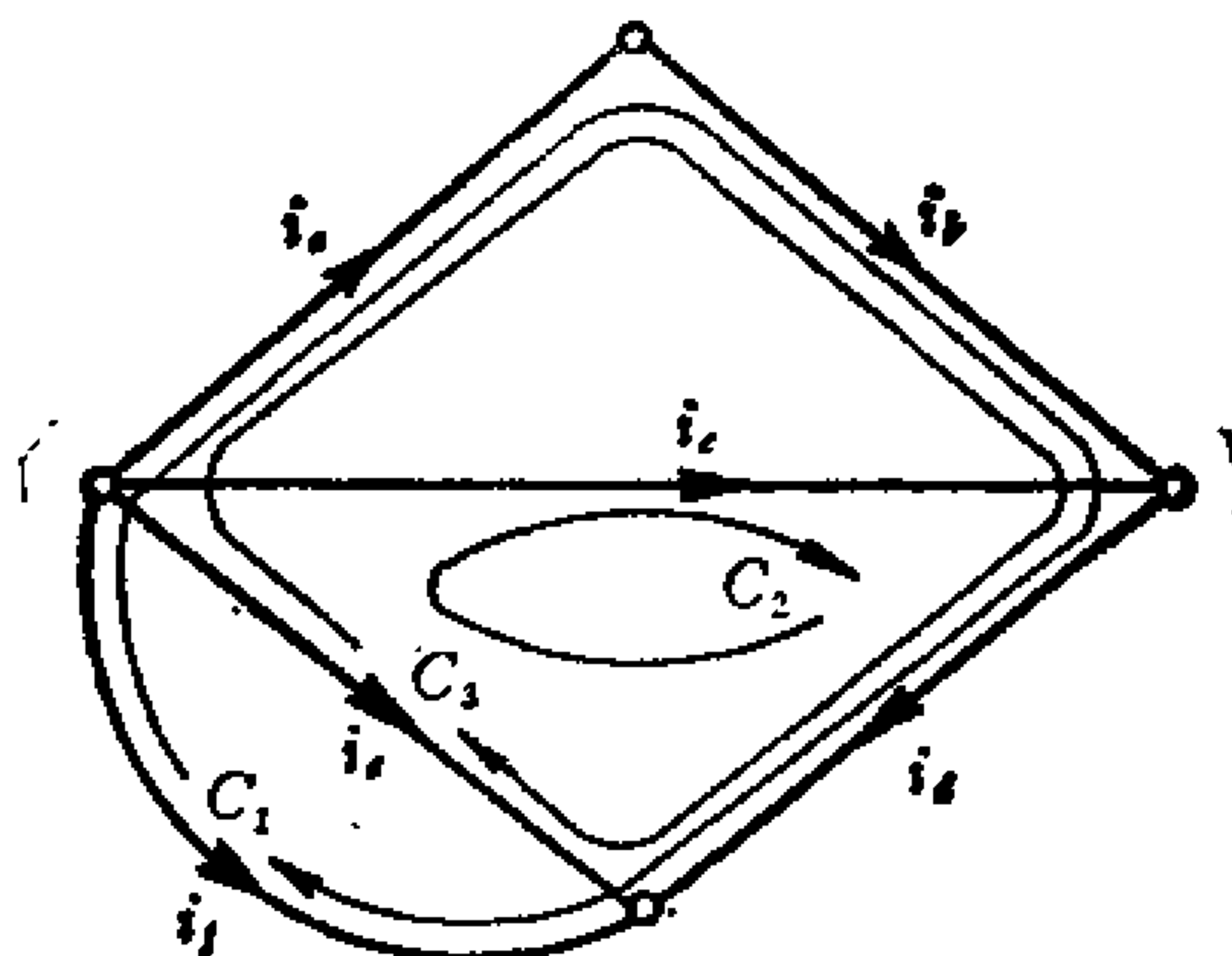


图7-2-1 一个加权线图

$$B = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} a & b & c & d & e & f \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

然后，利用式(7-2-13)我们有

$$I_c = B' M(I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_d \\ i_e \\ i_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 + i_3 \\ i_1 + i_3 \\ i_2 \\ i_1 + i_2 + i_3 \\ -i_2 - i_3 \\ -i_1 \end{bmatrix}$$

值得注意的是，如果我们选 $n_c - n_v + \rho$ 个回路电流，它们都与回

路矩阵的各行所示的线性无关回路相对应，并且用式(7-2-13)来表示支路电流的话，系统就自动满足了克希霍夫电流定律。

7-3 节 点 变 换

当一个系统满足克希霍夫电压定律时，支路电压是互相有关的。为了看出这一点，我们设 B_l 是加权有向线图中对应于一个林（或树） t 的基本回路矩阵。又设列矩阵 V_c 被分块为：

$$V_c = \begin{bmatrix} V_c \\ V_t \end{bmatrix} \quad (7-3-1)$$

其中 V_c 由支路电压组成，这些支路电压是与林（或树） t 的有关各弦的权，而 V_t 则由对应于林（或树） t 的树枝的支路电压组成。于是， V_c 由 $n_c - n_v + \rho$ 个元素组成，而 V_t 由 $n_v - \rho$ 个元素组成。这样，由克希霍夫电压定律(7-1-3)，我们有

$$B_l V_c = [U B_{l12}] \begin{bmatrix} V_c \\ V_t \end{bmatrix} = 0 \quad (7-3-2)$$

及

$$V_c = -B_{l12} V_t \quad (7-3-3)$$

所以

$$V_c = \begin{bmatrix} -B_{l12} \\ U \end{bmatrix} V_t \quad (7-3-4)$$

因为从式(6-1-12)，取 $B_{l11} = U$ ，我们知道

$$B_{l12} = -(A_{12}^{-1} A_{11})^t \quad (7-3-5)$$

所以我们有

$$V_c = \begin{bmatrix} (A_{12}^{-1} A_{11})^t \\ U \end{bmatrix} V_t \quad (7-3-6)$$

它等于

$$V_e = \begin{bmatrix} A'_{11}(A_{12}^{-1})' \\ A'_{12}(A_{12}^{-1})' \end{bmatrix} V_e = \begin{bmatrix} A'_{11} \\ A'_{12} \end{bmatrix} A_{12}^{-1})' V_e \\ = A'(A_{12}^{-1})' V_e \quad (7-3-7)$$

或

$$V_e = A'N(V) \quad (7-3-8)$$

其中

$$N(V) = (A_{12}^{-1})' V_e \quad (7-3-9)$$

等式(7-3-8)称为节点变换。由

$$BV_e = BA'N(V) = 0 \quad (7-3-10)$$

可以看出,(因为对于一个线图, $BA' = 0$),即使 $N(V)$ 是任意一组 $n_v - \rho$ 个函数的列矩阵,克希霍夫电压定律也总能满足。不过,我们必须注意,一旦 $N(V)$ 被选定, V_e 将由式(7-3-8)确定。

将式(7-3-8)两边转置,我们有

$$V_e' = [n_1 \ n_2 \ \cdots \ n_{n_v - \rho}] A \quad (7-3-11)$$

其中

$$N(V)' = [n_1 \ n_2 \ \cdots \ n_{n_v - \rho}] \quad (7-3-12)$$

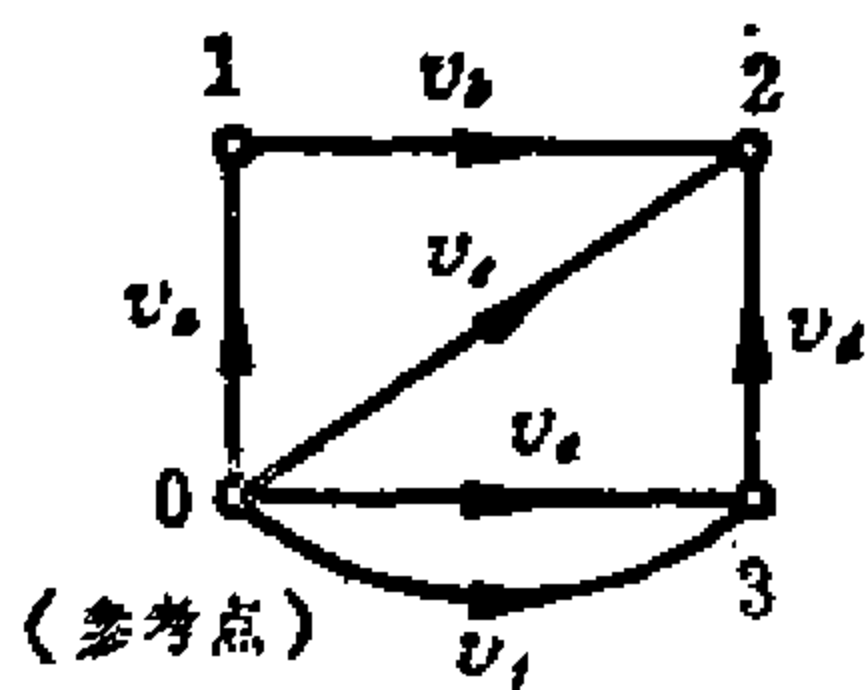


图7-3-1 一个加权线图

等式(7-3-11)表明, n_p 将被 A 的第 p 行中的每一个元素乘, 因此可以把 n_p 看作是与 A 的第 p 行相对应的那个顶点的权。因为参考点不由 A 的行表示, 所以 n_p 表示由对应 A 的第 p 行的顶点到参考点的电压, 称为节点电压。例如, 在图7-3-1的加权有向图中, V_e 可以由 $N(V)$ 得到, 这里

$$N(V) = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

选定 A 为

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

我们有

$$V_e = A' N(V) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} v_a \\ v_b \\ v_c \\ v_d \\ v_e \\ v_f \end{array} \begin{bmatrix} -v_1 \\ v_1 - v_2 \\ -v_2 \\ -v_2 + v_3 \\ -v_3 \\ -v_3 \end{bmatrix}$$

如果我们用一个割集矩阵 Q 来代替关联矩阵 A ，式 (7-3-6) 变成

$$V_e = \begin{bmatrix} Q_{11}'(Q_{12}')^{-1} \\ U \end{bmatrix} V_t = \begin{bmatrix} Q_{11}' \\ Q_{12}' \end{bmatrix} (Q_{12}^{-1})' V_t = Q' \underline{N}(V) \quad (7-3-13)$$

其中

$$\underline{N}(V) = (Q_{12}^{-1})' V_t \quad (7-3-14)$$

这叫做广义节点变换。其中当 Q 是对应于林 (或树) t 的基本割集矩阵时， $\underline{N}(V)$ 的元素表示 t 中各树枝的支路电压。例如，在图 7-3-1 的线图中，如果我们选取一个树为 (a, c, d) ，则对应于 (a, c, d) 的基本割集矩阵 Q_t 是

$$Q_t = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} b & e & f & a & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

则 $\underline{N}(V)$ 是

$$\underline{N}(V) = \begin{bmatrix} v_a \\ v_c \\ v_d \end{bmatrix}$$

据式(7-3-13), 我们有

$$\begin{bmatrix} v_b \\ v_e \\ v_f \\ v_a \\ v_c \\ v_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_c \\ v_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_a + v_c \\ v_c - v_d \\ v_c - v_d \\ v_a \\ v_c \\ v_d \end{bmatrix}$$

注意, 当我们选取 $n_v - \rho$ 个线性无关的电压时, 它们对应于割集矩阵 Q (或关联矩阵) 的各行, 并且根据式(7-3-13)或式(7-3-8), 将每一个支路电压表示成这些选定电压的函数时, 则系统就自动满足克希霍夫电压定律。

7-4 导纳矩阵的行列式

假定我们用克希霍夫电流定律来写出一个如下的电网络系统方程

$$AI_c = 0 \quad (7-4-1)$$

(称为节点方程) 其中

$$I_c = f(J_1 \cdots J_p, v_1 \cdots v_{n_v}) \quad (7-4-2)$$

J_1, \cdots, J_p 是电流源, 而 v_1, \cdots, v_{n_v} 是包括电压源在内的各支路电压。注意据式(7-4-2), 每一个支路电流是 J 和 V 的函数。方程(7-4-1)并不代表一个电网络, 因为一个电网络必须既满足克希霍夫电流定律, 又满足克希霍夫电压定律。但是式(7-4-1)迫使

系统满足克希霍夫电流定律而不是满足克希霍夫电压定律.例如,考虑图7-4-1(a)的电网络,与它对应的线图如图7-4-1(b)所示.其中 g_c 表示一个非线性电阻器,其特性为 $i_c = g_c v_c^3$.关联矩阵 A 是

$$A = \begin{matrix} & J_o & g_a & g_b & g_c \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

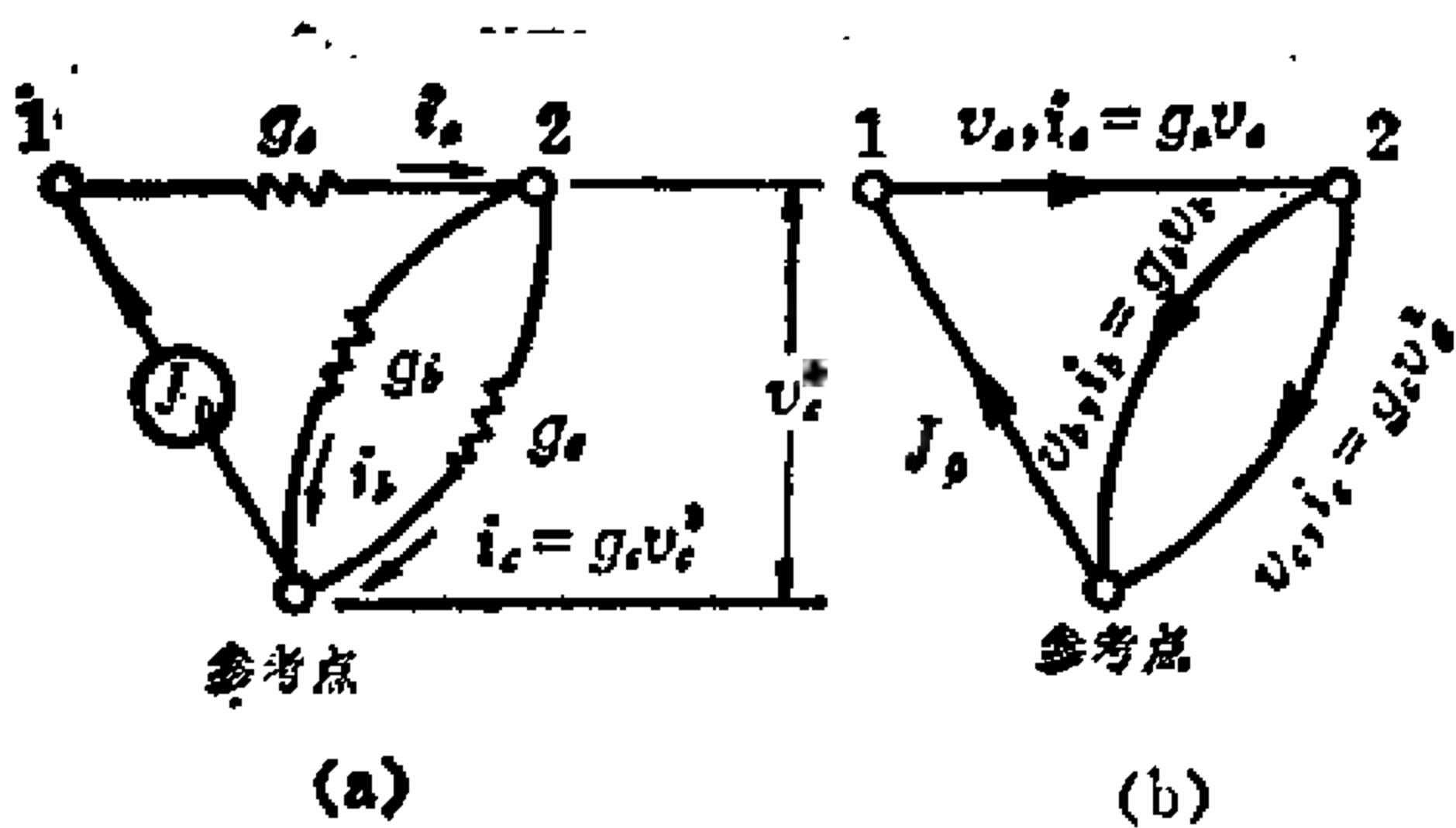


图7-4-1

(a) 电网络
(b) 对应的线图

电流向量 I_c 为

$$I_c = \begin{bmatrix} J_o \\ i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_o \\ g_a v_a \\ g_b v_b \\ g_c v_c^3 \end{bmatrix}$$

其中 v_a, v_b, v_c 分别是 g_a, g_b, g_c 的支路电压.故

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_o \\ i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_o + i_a \\ -i_a + i_b + i_c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -J_o + g_a v_a \\ -g_a v_a + g_b v_b + g_c v_c^3 \end{bmatrix} = 0$$

此式表明，这个系统满足克希霍夫电流定律而不是满足克希霍夫电压定律。

为了使系统满足克希霍夫电压定律，我们还要利用上节给出的节点变换。对上面的例子，我们取 \underline{A} 为

$$\underline{A} = \begin{matrix} & g_a & g_b & g_c \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

这是一个没有电流源 J_o 的网络的关联矩阵。节点变换是

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \underline{A}^t \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ v_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

将此式代入 $\underline{A}I_e = 0$ ，我们有

$$\underline{A}I_e = \begin{bmatrix} -J_o + g_a(v_1 - v_2) \\ -g_a(v_1 - v_2) + g_b v_2 + g_c v_2^3 \end{bmatrix} = 0$$

这就是图7-4-1中网络的系统方程。

这种方法也适用于广义的克希霍夫电流定律，即

$$QI_e = 0 \quad (7-4-3)$$

这里 Q 是割集矩阵。类似地，我们可以用克希霍夫电压定律来写出系统方程

$$BV_e = 0 \quad (7-4-4)$$

其中

$$V_e = f(E_1 \cdots E_p, i_1 \cdots i_{n_e}) \quad (7-4-5)$$

E_1, \cdots, E_p 是电压源, 而 i_1, \cdots, i_{n_e} 是包括电流源在内的各支路电流。同样的, 这个方程不足以表示一个电网络, 除非我们按照克希霍夫电流定律来代换 i_1, \cdots, i_{n_e} 。一个简单的方法是采用前节所介绍的网孔变换。

当一个电网络中每一个元件 y_k 可以表示为

$$y_k v_k = i_k \quad (7-4-6)$$

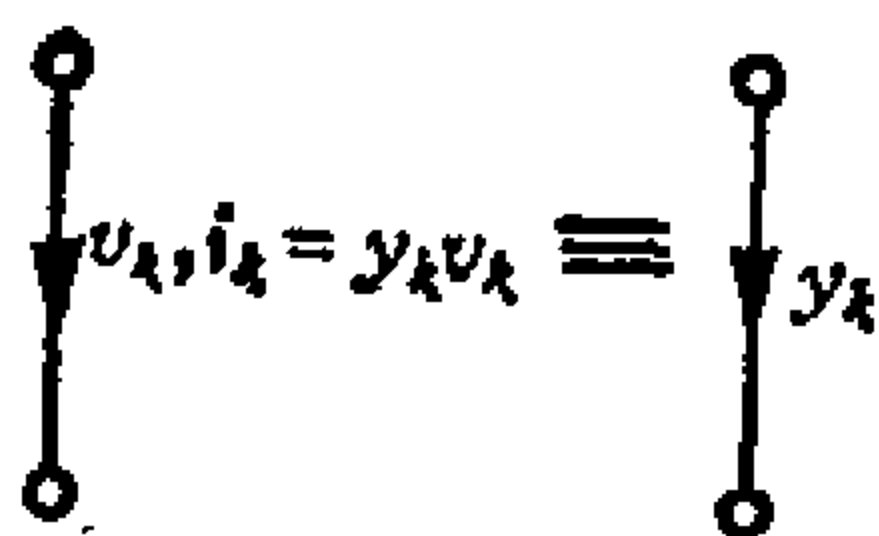


图7-4-2 一条边的权

时, 其中 i_k 和 v_k 分别为元件 y_k 的支路电流和支路电压, 则分析就变得较为简单了。在这节中, 我们要推导一种所谓的电网络的拓扑分析, 其中每一个元件都满足式(7-4-6)。

为了简便, 当如图 7-4-2 所示的一条边的权 i_k 和 v_k 满足式(7-4-6)时, 我们就以 y_k 来作为边 k 的权, 也就是说, 对边 k 规定权 y_k 相当于规定了满足于式(7-4-6)的两个权 i_k 和 v_k , 如图 7-4-2 所示。式(7-4-6)给出的关系用于表示一个线性的、集中的、时不变的、初始条件为零的元件是有效的, 这个元件可以是电阻、电感、电容或二端电网络, 只要其初始条件为零即可。

考虑一个电网络, 与其对应的加权线图的每一条边的权为 y_k (导纳)。于是对每一条边有一个如下的方程:

$$\begin{aligned} y_1 v_1 &= i_1 \\ y_2 v_2 &= i_2 \\ &\vdots \\ y_{n_e} v_{n_e} &= i_{n_e} \end{aligned} \quad (7-4-7)$$

这可以表示成

$$\begin{bmatrix} y_1 & & 0 \\ & y_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & y_{n_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_{n_e} \end{bmatrix} \quad (7-4-8)$$

为了简便，我们用符号 Y_e 、 V_e 和 I_e 来表示式(7-4-8)中的矩阵，因此方程可写作

$$Y_e V_e = I_e \quad (7-4-9)$$

注意 Y_e 是一个对角矩阵。又设 A 是所给线图的关联矩阵，则由式(7-1-2)(为了满足克希霍夫电流定律)，我们有

$$A I_e = A Y_e V_e = 0 \quad (7-4-10)$$

为了简单起见，假定用符号 V_n 来代替 $N(V)$ ，表示式(7-3-8)中的节点电压的列矩阵。于是，我们利用式(7-3-8)给出的节点变换，将式(7-4-10)变成

$$A Y_e V_e = A Y_e A' V_n = 0 \quad (7-4-11)$$

矩阵 $A Y_e A'$ 称为电网络的节点导纳矩阵。为了说明节点导纳矩阵的行列式和所给线图的子图的关系，先了解以下所述的比内-柯西定理是比较方便的。

假定有矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & & \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则由行列式的性质我们知道它的行列式等于：

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (7-4-12)$$

一般来说, 如果我们有

$$R = [(r_{11} + r_{21}), (r_{12} + r_{22}), \dots, (r_{1n} + r_{2n})] \quad (7-4-13)$$

其中

$$r_{1k} = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix}, \quad r_{2k} = \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix} \quad (7-4-14)$$

则

$$|R| = \sum |r_{j_1 1} r_{j_2 2} \dots r_{j_n n}| \quad (7-4-15)$$

其中 \sum 表示对 $k = 1, 2, \dots, n$, 取 r_{1k} 或 r_{2k} 作第 k 列可能形成的所有矩阵的行列式的总和。

现在考虑两个矩阵 A 和 B , 其中 $A = [a_{ij}]_{n \times m}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$. 则 A 和 B 的积为

$$AB = \begin{bmatrix} \sum_{j_1=1}^m a_{1j_1} b_{j_1 1} & \sum_{j_2=1}^m a_{1j_2} b_{j_2 2} \dots \sum_{j_n=1}^m a_{1j_n} b_{j_n n} \\ \sum_{j_1=1}^m a_{2j_1} b_{j_1 1} & \sum_{j_2=1}^m a_{2j_2} b_{j_2 2} \dots \sum_{j_n=1}^m a_{2j_n} b_{j_n n} \\ \sum_{j_1=1}^m a_{nj_1} b_{j_1 1} & \sum_{j_2=1}^m a_{nj_2} b_{j_2 2} \dots \sum_{j_n=1}^m a_{nj_n} b_{j_n n} \end{bmatrix} \quad (7-4-16)$$

现在从式 (7-4-15), 我们可以看出:

$$|AB| = \sum_{j_p=1}^m \left| \begin{array}{ccc} a_{1j_1} b_{j_1 1} & a_{1j_2} b_{j_2 2} \dots a_{1j_n} b_{j_n n} \\ a_{2j_1} b_{j_1 1} & a_{2j_2} b_{j_2 2} \dots a_{2j_n} b_{j_n n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{nj_1} b_{j_1 1} & a_{nj_2} b_{j_2 2} \dots a_{nj_n} b_{j_n n} \end{array} \right| \quad (7-4-17)$$

对所有 p

或

$$|AB| = \sum_{j_p=1}^m \left| \begin{array}{cccc} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{array} \right| (b_{j_1 1} b_{j_2 2} \cdots b_{j_n n}) \quad (7-4-18)$$

对所有 p

如果有两个 j 取相同的数，则在式(7-4-18)的右端就有两列相等。因此，我们只要对有不同 j 的矩阵的行列式求和即可。故

$$|AB| = \sum_{\substack{j_p=1 \\ j_1 \neq j_2 \neq \cdots \neq j_n}}^m \left| \begin{array}{cccc} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{array} \right| (b_{j_1 1} b_{j_2 2} \cdots b_{j_n n}) \quad (7-4-19)$$

注意当 $n > m$ 时，不可能选出所有不同的 j ，因此 $|AB|$ 为零。

考虑 j 选自数组 $(1, 2, \cdots, n)$ ，并使得所有的 j 都不相同的情况。一种特殊的选择是

$$j_p = p \quad p = 1, 2, \cdots, n \quad (7-4-20)$$

在这样的选择下，式(7-4-19)的右端是

$$\left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right| (b_{11} b_{22} \cdots b_{nn})$$

如果取 j 的另一种选择为

$$j_p = \begin{cases} p+1 & \text{对 } p = 1, 2, \cdots, n-1 \\ 1 & \text{对 } p = n \end{cases} \quad (7-4-21)$$

将给出

$$\left| \begin{array}{ccccc} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & a_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & a_{n1} \end{array} \right| (b_{21} b_{32} \cdots b_{nn-1} b_{1n})$$

我们可以将它改排，使得 A 的子矩阵的行列式与上一个行列式的排列次序相同。显然，由于列的调整引起符号的改变与 j 的置换有关。因此，考虑从 1 到 n 中 j 的所有可能的选择，我们可以看出

$$\begin{aligned} & \sum_{j_1 \neq j_2 \neq \dots \neq j_n = 1}^n \begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \dots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \dots & a_{2j_n} \\ & & \dots & \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \dots & a_{nj_n} \end{vmatrix} (b_{j_1 1} b_{j_2 2} \dots b_{j_n n}) \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \sum_{j_1 \neq j_2 \neq \dots \neq j_n}^n e_{j_1 j_2 \dots j_n} (b_{j_1 1} b_{j_2 2} \dots b_{j_n n}) \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ & & \dots & & | & & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & | & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} \quad (7-4-22) \end{aligned}$$

其中若将 $j_1 \dots j_n$ 变成自然顺序所需的置换数为偶数，则 $e_{j_1 \dots j_n}$ 是 1；否则 $e_{j_1 \dots j_n}$ 是 -1。这对于 j 的任何不同的选择都是正确的。因此，我们得到比内-柯西定理：

$$|AB| = \Sigma (A \text{ 的大子行列式}) \times (B \text{ 的对应的大子行列式}) \quad (7-4-23)$$

这里 Σ 表示“对所有可能的情况求和”。注意 A 的大子行列式是 A 的 $n \times n$ 阶子矩阵的行列式。如果 A 的一个大子行列式是从 A 中取列 j_1, j_2, \dots, j_n 得到的子矩阵的行列式，那么 B 中对应的大子行列式是 B 中由行 j_1, j_2, \dots, j_n 组成的子矩阵的行列式。

例如, 若给出 A 和 B , 使得

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

则由式(7-4-23), AB 的行列式是

$$\begin{vmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 8$$

现在我们可以回过头来讨论节点导纳矩阵了。我们将 AY, A' 表示成

$$AY, A' = H A' \quad (7-4-24)$$

其中

$$AY, = H \quad (7-4-25)$$

我们可以利用比内-柯西定理:

$$|HA'| = \sum (H \text{ 的大子行列式}) \times (A' \text{ 对应的大子行列式})$$

因为 $Y,$ 是对角矩阵, 故

(7-4-26)

$$H = [H_1 \ H_2 \cdots H_{n_e}] = [A_1 \ A_2 \cdots A_{n_e}] \begin{bmatrix} y_1 & & & \\ & y_2 & 0 & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & y_{n_e} \end{bmatrix} \\ = [y_1 A_1 \ y_2 A_2 \cdots y_{n_e} A_{n_e}] \quad (7-4-27)$$

所以 H 的任一主子矩阵 H_m 的行列式可以表示为

$$|H_m| = |[H_{j_1} \ H_{j_2} \cdots H_{j_m}]| = |[y_{j_1} A_{j_1} \ y_{j_2} A_{j_2} \cdots y_{j_m} A_{j_m}]| \\ = (y_{j_1} y_{j_2} \cdots y_{j_m}) |[A_{j_1} \ A_{j_2} \cdots A_{j_m}]| \quad (7-4-28)$$

这样，用符号 $A(j_1 j_2 \cdots j_m)$ 来表示 A 的由列 j_1, j_2, \cdots, j_m 组成的子矩阵，我们可以把式(7-4-26)表示为

$$|AY_c A'| = \sum_{(j)} (y_{j_1} y_{j_2} \cdots y_{j_m}) |A(j_1 j_2 \cdots j_m)| |A(j_1 j_2 \cdots j_m)'| \quad (7-4-29)$$

因为一个方阵的行列式与该矩阵的转置的行列式相同，因此式(7-4-29)等于

$$|AY_c A'| = \sum_{(j)} (y_{j_1} y_{j_2} \cdots y_{j_m}) |A(j_1 j_2 \cdots j_m)|^2 \quad (7-4-30)$$

前面我们已经看到，一个关联矩阵 A 的大子矩阵是非奇异的，当且仅当与此子矩阵的列对应的边组成一个树（在分离线图中是林），并且还知道，这样一个非奇异的子矩阵的行列式不是+1就是-1。因为在式(7-4-30)中， A 的大子矩阵的行列式是平方，而对应的导纳（即大子矩阵的列对应边的权）是乘积的形式，所以我们可以说

$$|AY_c A'| = \sum \text{树枝导纳的乘积} \quad (7-4-31)$$

其中 \sum 表示“对于所有的树”求和。

定义7-4-1 树枝导纳乘积是在一个树中，所有各边的权即导纳的乘积。

定理7-4-1 一个由似无源元件组成的电网络，其节点导纳矩阵的行列式等于所有树的树枝导纳乘积之和。这里的似无源元件(*passivelike element*)是指能用图7-4-2所示的一条边来表示的元件。

为了简便，我们用符号 Δ' 来表示节点导纳矩阵的行列式。设 N 是一个由似无源元件组成的网络，设 G 是 N 对应的加权有向图。则由式(7-4-31)可以看出，改变 G 中边的定向不会影响 Δ' 。我们可以直接从网络 N 中找出所有的树，用不着从对应的加权有向图中去找，所以不必要从所给的网络 N 画出 G ，再得到 Δ' 。例

如，图7-4-3中网络的 Δ' 可按如下方法求得。所有的树是

$$(g_a, C_b s), \left(g_a, \frac{1}{L_c s}\right), (g_a, C_d s), \left(C_b s, -\frac{1}{L_c s}\right), (C_b s, C_d s)$$

所以

$$\Delta' = C_b C_d s^2 + g_a (C_b + C_d) s + \frac{C_b}{L_c} + \frac{g_a}{L_c s}$$

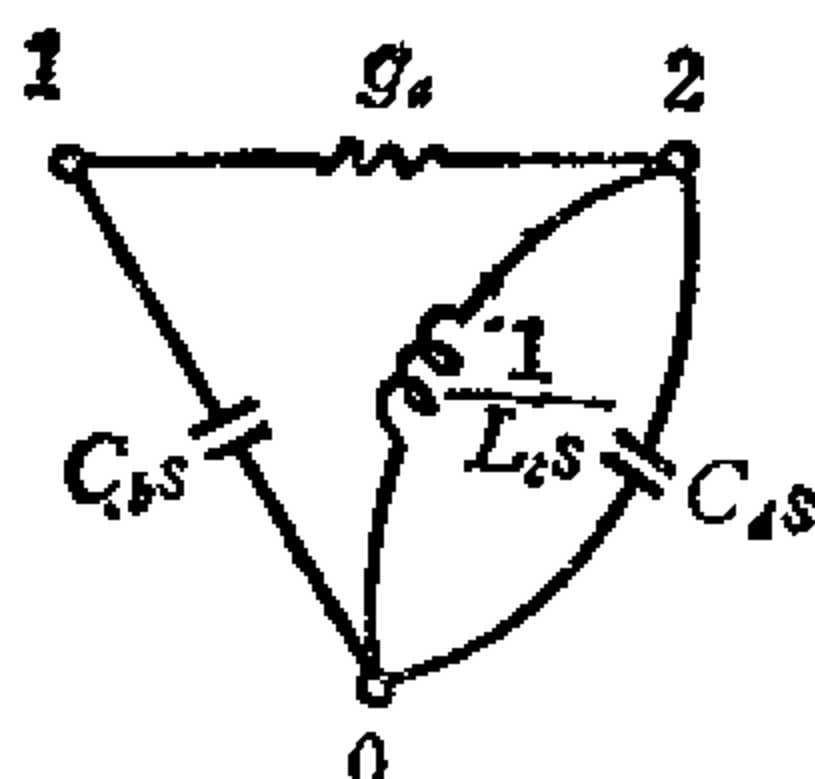


图7-4-3 电网络 N

在式(7-4-31)中，如果我们使每个导纳都等于1，则每个树枝导纳的乘积是1。所以

$$\Delta' \text{ 所有的 } y \text{ 为 } 1 = \text{树的数目} \quad (7-4-32)$$

另一方面，由式(7-4-30)，

$$\Delta' \text{ 所有的 } y \text{ 为 } 1 = |A U A'| = |A A'|$$

$$(7-4-33)$$

设

$$A = \begin{bmatrix} -A_1 & - \\ A_2 & \\ \vdots & \\ -A_m & - \end{bmatrix}$$

则

$$A A' = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} [A_1' \ A_2' \cdots A_m'] = \begin{bmatrix} A_1 A_1' & A_1 A_2' & \cdots & A_1 A_m' \\ A_2 A_1' & A_2 A_2' & \cdots & A_2 A_m' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_m A_1' & A_m A_2' & \cdots & A_m A_m' \end{bmatrix} \quad (7-4-34)$$

设 $A_k = [a_{k1} \ a_{k2} \cdots a_{kn_e}]$ ，则

$$|A_k A_k'| = \sum_{p=1}^{n_e} a_{kp}^2 \quad (7-4-35)$$

从关联矩阵的定义，仅当边 p 与顶点 k 关联时， a_{kp} 非零，所以， $|A_k A_k'|$ 等于与顶点 k 相关联的边数。或者，

$$|A_k A_k'| = \text{与顶点 } k \text{ 关联的边数} \quad (7-4-36)$$

另一方面,

$$|A_k A_q'| = \sum_{p=1}^{n_e} a_{kp} a_{qp} \quad (7-4-37)$$

可以看出, 当且仅当边 p 同时与顶点 k 与 q 关联时, $a_{kp} a_{qp}$ 非零, 因此, 边 p 必定连接在顶点 k 和 q 之间. 另外, 如边 p 与顶点 k 和 q 连接, a_{kp} 的符号与 a_{qp} 的符号相反 (据关联矩阵的定义). 因此

$$a_{kp} a_{qp} = \begin{cases} -1 & \text{若边 } i \text{ 是顶点 } k \text{ 和 } q \text{ 之间的边} \\ 0 & \text{若边 } i \text{ 不是顶点 } k \text{ 和 } q \text{ 之间的边} \end{cases} \quad (7-4-38)$$

所以

$$|A_k A_q'| = -(\text{顶点 } k \text{ 和 } q \text{ 之间的边数}) \quad (7-4-39)$$

等式 (7-4-32) 和 (7-4-39) 给出以下定理.

定理7-4-2 设矩阵 T 是

$$T = [t_{ij}] = A A' \quad (7-4-40)$$

则 t_{ii} 是与顶点 i 连接的边数, 而 t_{ij} 是顶点 i 和 j 之间连接的边数的负数. 并且

$$|T| = \text{树的数目} \quad (7-4-41)$$

例如, 图7-4-3的网络中树的数目可由下式得到:

$$|T| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

如果我们不用关联矩阵, 而用割集矩阵, 如象式 (7-1-5) 和 (7-3-13) 那样, 等式 (7-4-31) 将会稍有改变. 为了说明这一点, 我们回想一下克希霍夫电流定律, 即

$$A I_c = 0 \quad (7-4-42)$$

左乘一个非奇异矩阵 D , 我们有

$$D A I_c = Q_1 I_c = 0 \quad (7-4-43)$$

因此我们能用一个割集矩阵 Q_1 来满足克希霍夫电流定律。于是，式(7-4-43)连同式(7-4-9)，得到

$$Q_1 Y_c V_c = 0 \quad (7-4-44)$$

由式(7-3-13)给出的节点变换和此式得

$$Q_1 Y_c Q' N' (V) = 0 \quad (7-4-45)$$

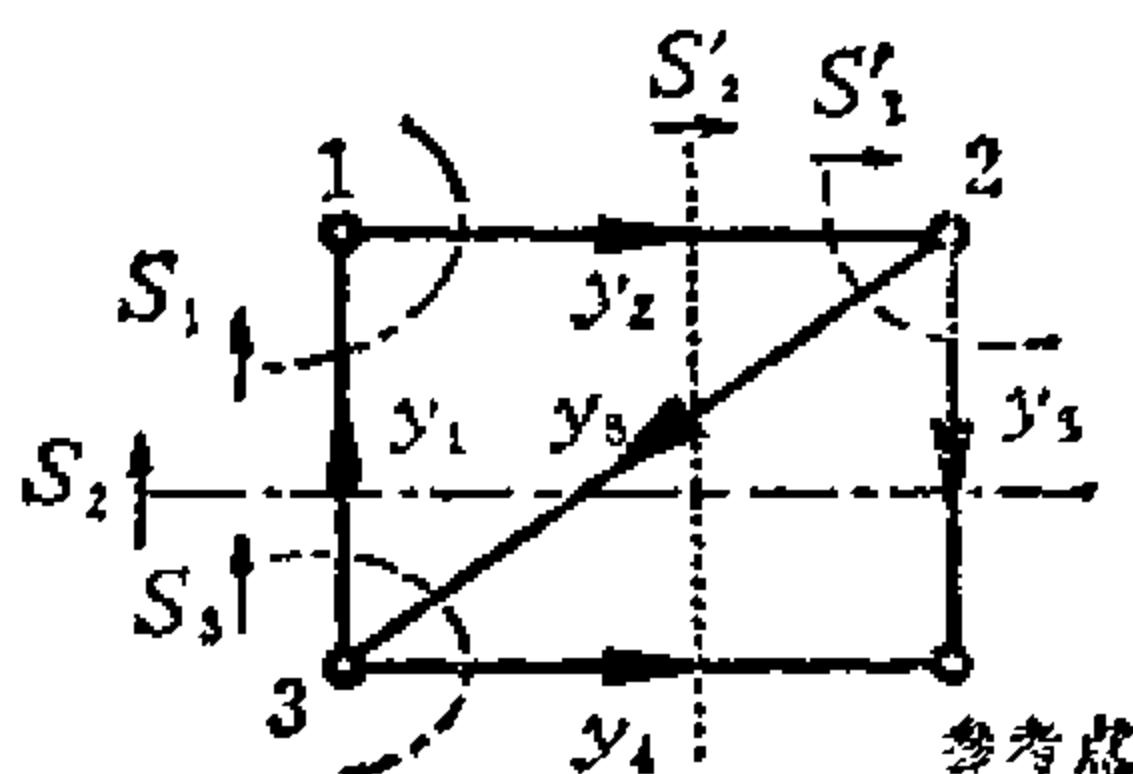


图7-4-4 一个加权有向线图

例如，考虑图7-4-4中的加权有向线图，我们可以选关联矩阵 A 为

$$A = \begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

故节点导纳矩阵是

$$\begin{aligned} AY_c A' &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} \\ &= \begin{bmatrix} y_1 + y_2 & -y_2 & -y_1 \\ -y_2 & y_2 + y_3 + y_5 & -y_5 \\ -y_1 & -y_5 & y_1 + y_4 + y_5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

在式(7-4-45)中, 选取 Q_1 和 Q 为

$$Q_1 = \begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad Q = \begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ \begin{bmatrix} S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

我们得到一个导纳矩阵 $Q_1 Y_c Q'$,

$$Q_1 Y_c Q' = \begin{bmatrix} -y_2 & -y_2 & y_1 \\ y_3 + y_5 & y_5 & y_1 + y_5 \\ y_5 & y_4 + y_5 & y_1 + y_4 + y_5 \end{bmatrix}$$

这不是一个节点导纳矩阵, 但代表这个给定网络的线性无关方程组的系数矩阵。

$$\text{设} \quad Q_1 = DA \quad (7-4-46)$$

$$Q = D'A \quad (7-4-47)$$

则从式(7-4-29), (7-4-30)和(7-4-31)我们可以看出,

$$|Q_1 Y_c Q'| = |D| |D'| \sum \text{树枝导纳乘积} \quad (7-4-48)$$

并且, 如果 Q_1 和 Q 是基本割集矩阵, 则 $|D|$ 和 $|D'|$ 都为1, 所以 $Q_1 Y_c Q'$ 的行列式与 $A Y_c A'$ 的行列式相同。

7-5 开路网络函数

为了分析电网络, 我们考虑图 7-5-1 所示的网络, 其中有一电流源 J_k 从参考点(当 $p > 1$ 时, 可以有若干个参考点)接到每一个顶点 $k, k = 1, 2, \dots, m$ 。假定在网络 N 中, 除这些电流源外, 所有的元件都是似无源元件(似无源元件是能用图7-4-2所示的一条边表示的元件)。那么我们有

$$AI_c = J_n \quad (7-5-1)$$

其中

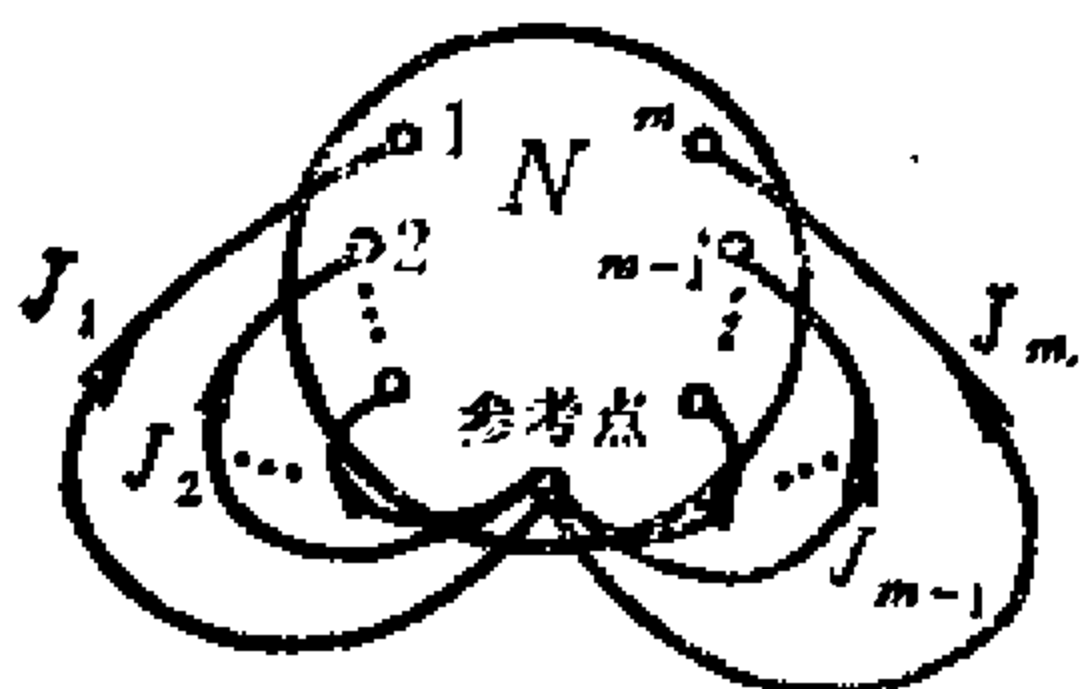


图7-5-1 带电流源的网络 \$N\$

$$J_n = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_m \end{bmatrix} \quad (7-5-2)$$

而 \$A\$ 是带有上述参考点的 \$N\$ 的关联矩阵, 注意 \$m = n_v - \rho\$, 这里 \$n_v\$ 是该网络的顶点数, \$\rho\$ 是最大连通子图的个数。

由于电流源 \$J_1, J_2, \dots, J_m\$ 的存在, 我们修改式 (7-4-11) 使之满足克希霍夫电流定律:

$$AY_e A' V_n = J_n \quad (7-5-3)$$

用 \$(AY_e A')^{-1}\$ 左乘式 (7-5-3) 两端, 得

$$V_n = (AY_e A')^{-1} J_n \quad (7-5-4)$$

因为在此方程中, \$(AY_e A')^{-1}\$ 的每一个元素表示一个开路网络函数, 并且我们已经学过直接从一个网络求出 \$AY_e A'\$ 的行列式的拓扑公式, 所以, 如果我们知道怎样直接从一个网络求出矩阵 \$AY_e A'\$ 的代数余子式, 我们就可以用拓扑的方法得到任意两顶点之间的开路网络函数。

为了简便, 我们用 \$\Delta'_{pq}\$ 来表示 \$AY_e A'\$ 的一个代数余子式, 即删去 \$AY_e A'\$ 的第 \$p\$ 行和第 \$q\$ 列所得的子矩阵 \$M_{pq}\$ 的行列式乘上 \$(-1)^{p+q}\$。换句话说,

$$\Delta'_{pq} = (-1)^{p+q} |M_{pq}| \quad (7-5-5)$$

据定义

$$H = AY_e \quad (7-5-6)$$

我们有

$$H A' = \begin{bmatrix} H_1 A_1' & H_1 A_2' & \cdots & H_1 A_m' \\ H_2 A_1' & H_2 A_2' & \cdots & H_2 A_m' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_m A_1' & H_m A_2' & \cdots & H_m A_m' \end{bmatrix} \quad (7-5-7)$$

其中

$$H = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_m \end{bmatrix} \quad (7-5-8)$$

而

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} \quad (7-5-9)$$

HA' 的第 q 列是

$$\begin{bmatrix} H_1 A_q' \\ H_2 A_q' \\ \vdots \\ H_m A_q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_m \end{bmatrix} A_q' \quad (7-5-10)$$

在 HA' 中, 没有其他的元素包含 A_q' , 因此删除 A 中的第 q 行就可以实现对 HA' 中第 q 列的删除。同样, HA' 的第 p 行是

$$[H_p A_1' \ H_p A_2' \ \cdots \ H_p A_m'] = H_p [A_1' \ A_2' \ \cdots \ A_m'] \quad (7-5-11)$$

在 HA' 中没有其他的元素包含 H_p , 因此删除 HA' 的第 p 行等价于删除 H 的第 p 行。然而

$$H = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & & & \\ & y_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & y_n \end{bmatrix} \quad (7-5-12)$$

所以, 删除 H 中的第 p 行等价于删除 A 的第 p 行。这样, 如果我们用符号 A_{-p} 来表示 A 删除第 p 行得到的子矩阵, 那么 $AY_c A'$ 删除第 p 行和第 q 列的子矩阵为 $A_{-p} Y_c (A_{-q})'$ 。现在, 式 (7-5-5) 可以写成

$$\Delta'_{pq} = (-1)^{p+q} |A_{-p} Y_c (A_{-q})'| \quad (7-5-13)$$

我们先来研究一个特殊的代数余子式 Δ'_{pp} 。在这种情况下，式(7-5-13)变成

$$\Delta'_{pp} = |A_{-p} Y_c(A_{-p})'| \quad (7-5-14)$$

设顶点 j 为一个网络所对应的加权有向图 G 的参考点(也就是说，在关联矩阵 A 中，没有对应于顶点 j 的行)。在分离线图的情况下，有几个参考点。但是，就网络函数而言，这些顶点可以被合并，而不会改变网络函数。因此，不失一般性，我们能把一个加权有向图看作是连通的。

我们已经知道， A_{-p} 是在 G 中合并顶点 j 和 p 所得到的线图 $G(p=j)$ 的关联矩阵。因此，据式(7-4-31)，式(7-5-14)可以表示成

$$|A_{-p} Y_c(A_{-p})'| = \sum G(p=j) \text{ 的树枝导纳乘积} \quad (7-5-15)$$

设 $G(p=j)$ 中的一个树是 $t(p=j)$ 。因为 $G(p=j)$ 是由 $n'_v = n_v - 1$ 个顶点组成， $t(p=j)$ 包含 $G(p=j)$ 的 $n'_v - 1 = n_v - 2$ 条边。所以，在 G 中，由 $t(p=j)$ 的各边组成的子图 g_i 是不连通的，但当把顶点 p 和 j 合并，就是连通的。因此我们知道 g_i 包含两部分，其中每一部分都是连通的，并且一个部分包含顶点 p ，另一个包含顶点 j 。换句话说，把顶点 p 和 j 合并，子图 g_i 就变成一个树。这个 $G(p=j)$ 中的树 $t(p=j)$ 称为 G 的2-树，并记为 $t_{2,p,j}$ 。

定义7-5-1 连通图 G 的2-树 $t_{2,p,j}$ 是满足以下条件的子图：

1. $t_{2,p,j}$ 由 $n_v - 2$ 条边组成，包含 G 中所有的顶点而不包含回路。
2. $t_{2,p,j}$ 由两个连通部分组成，其中一个部分可以是孤立顶点。
3. 在这两部分中，一部分包含顶点 p ，另一部分包含顶点 j 。

由这个定义，式(7-5-15)可写作

$$|A_{-p} Y_c(A_{-p})'| = \Delta'_{pp} = \sum 2\text{-树 } t_{2,p,j} \text{ 树枝导纳乘积} \quad (7-5-16)$$

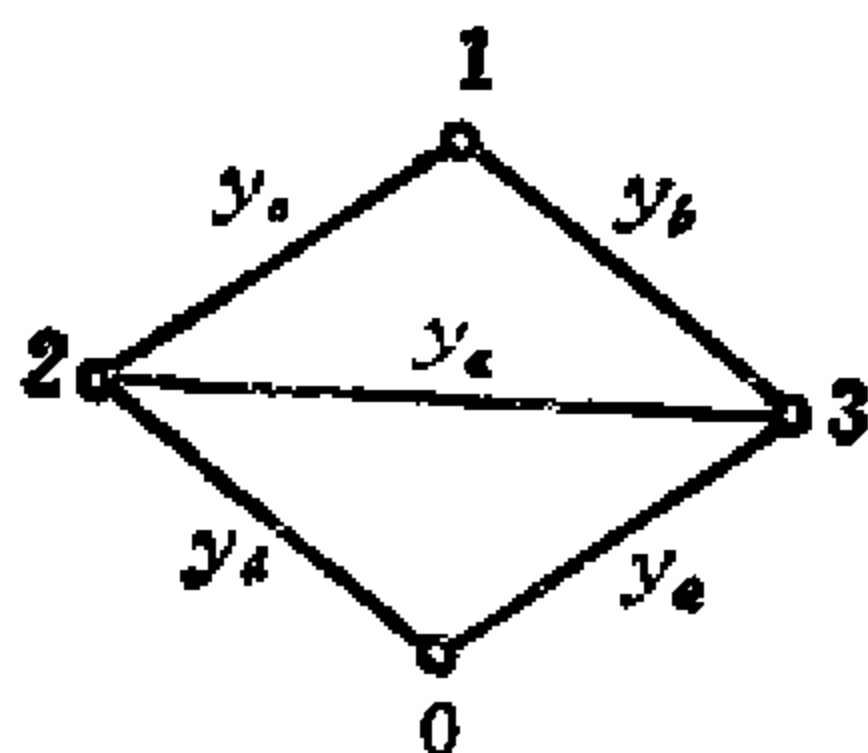


图7-5-2 加权线图 G

例如，图 7-5-2 中加权线图 G 的所有的 2-树 $t_{2,1,0}$ 是 $(y_a y_b)$, $(y_a y_c)$, $(y_b y_c)$, $(y_a y_d)$, $(y_b y_d)$, $(y_c y_d)$, $(y_c y_e)$ 和 $(y_d y_e)$

因此，以顶点 0 为参考点， Δ'_{11} 是

$$\Delta'_{11} = y_a(y_b + y_c + y_e) + y_b(y_c + y_d) + y_c(y_d + y_e) + y_d y_e$$

现在，我们对后面将要用到的一个符号下定义。

定义7-5-2 符号 $t_{a_1 a_2 \dots a_p, b_1 b_2 \dots b_q}$ 表示一个子图，它代表一个线图中具有如下性质的 2-树：

1. 两个连通部分中，一个部分包含顶点 a_1, a_2, \dots, a_p 而不包含顶点 b_1, b_2, \dots, b_q 。
2. 另一个部分包含顶点 b_1, b_2, \dots, b_q 而不包含顶点 a_1, a_2, \dots, a_p 。

定义7-5-3 符号 $T_{a_1 a_2 \dots a_p, b_1 b_2 \dots b_q}$ 表示在给定的线图中所有的 $t_{a_1 a_2 \dots a_p, b_1 b_2 \dots b_q}$ 的集合。

由这两个定义，我们有

$$T_{a_1, j} = T_{a_1, p, j} \cup T_{a_1, p, j} \quad (7-5-17)$$

其中 p 是线图 G 的一个顶点。注意

$$T_{a_1, p, j} \cap T_{a_1, p, j} = \phi \quad (7-5-18)$$

当 $j = p$ 时，

$$T_{a_1, p, j} = \phi \quad (7-5-19)$$

且

$$T_{a_1, p, j} = T_{a_1, j} \quad (7-5-20)$$

现在我们已为讨论代数余子式 Δ'_{pq} 作好了准备。由式 (7-5-13) 和比内-柯西定理, 我们知道

$$\begin{aligned}\Delta'_{pq} &= (-1)^{p+q} |A_{-p} Y_c (A_{-q})^t| \\ &= (-1)^{p+q} \sum [(A_{-p} Y_c) \text{ 的大子行列式}] \\ &\quad \times [A_{-q}^t \text{ 对应的大子行列式}] \\ &= (-1)^{p+q} \sum (y_{k_1} y_{k_2} \cdots y_{k_m'}) |A_{-p}(k_1 k_2 \cdots k_m')| \\ &\quad |A_{-q}^t(k_1 k_2 \cdots k_m')| \quad (7-5-21)\end{aligned}$$

其中 $A_{-p}(k_1 k_2 \cdots k_m')$ 是由 A_{-p} 的列 k_1, k_2, \cdots, k_m' 组成的子矩阵, $A_{-q}(k_1 k_2 \cdots k_m')$ 是由 A_{-q} 的列 k_1, k_2, \cdots, k_m' 组成的子矩阵。我们还知道, A_{-p} 的一个非零大子行列式对于 2-树 $t_{2p,j}$, 其中顶点 j 是参考点。所以, 如果 $A_{-p}(k_1 k_2 \cdots k_m')$ 是非奇异的, 则对应一个 $t_{2p,j}$ 。同样, $A_{-q}(k_1 k_2 \cdots k_m')$ 是非奇异的, 当且仅当它对应于一个 2-树 $t_{2q,j}$ 。因此, 为使 $|A_{-p}(k_1 k_2 \cdots k_m')| |A_{-q}^t(k_1 k_2 \cdots k_m')|$ 非零, 由列 k_1, k_2, \cdots, k_m' 对应的边组成的一个子图必须不仅是一个 $t_{2p,j}$ 而且也是一个 $t_{2q,j}$, 也就是说, 此子图必须是一个在 $T_{2p,j}$ 与 $T_{2q,j}$ 中的 2-树。从

$$T_{2p,j} = T_{2pq,j} \cup T_{2p,qj} \quad (7-5-22)$$

及
$$T_{2q,j} = T_{2pq,j} \cup T_{2q,pj} \quad (7-5-23)$$

我们能看出, 只有在 $T_{2pq,j}$ 中的 2-树才满足上述条件, 所以只要乘积 $|A_{-p}(k_1 k_2 \cdots k_m')| |A_{-q}^t(k_1 k_2 \cdots k_m')|$ 非零, 列 k_1, k_2, \cdots, k_m' 就对应于一个 2-树 $t_{2pq,j}$ 中的边。这样, 式 (7-5-21) 变成

$$\Delta'_{pq} = (-1)^{p+q} \sum \sigma \times (2\text{-树 } t_{2pq,j} \text{ 树枝导纳乘积}) \quad (7-5-24)$$

其中
$$\sigma = |A_{-p}(k_1 k_2 \cdots k_m')| |A_{-q}^t(k_1 k_2 \cdots k_m')| \quad (7-5-25)$$

为了求出 σ 的值, 我们考虑 A 由列 k_1, k_2, \cdots, k_m' 组成的子矩阵 A_r , 如下所示:

$$A_s = \begin{bmatrix} a_{1k_1} & a_{1k_2} & \cdots & a_{1k_{m'}} \\ a_{2k_1} & a_{2k_2} & \cdots & a_{2k_{m'}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{pk_1} & a_{pk_2} & \cdots & a_{pk_{m'}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{qk_1} & a_{qk_2} & \cdots & a_{qk_{m'}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mk_1} & a_{mk_2} & \cdots & a_{mk_{m'}} \end{bmatrix} \quad (7-5-26)$$

注意 $m = n_v - 1$ (记得我们假设网络是连通的) 及 $m' = n_v - 2$, 因为一个 2-树的边数为 $n_v - 2$. 并且, A_s 中包含的列与 $A_{-p}(k_1 k_2 \cdots k_{m'})$ 和 $A_{-q}(k_1 k_2 \cdots k_{m'})$ 中包含的列相同. 因此, 如果我们从 A_s 中删去第 p 行, 所得的矩阵是 $A_{-p}(k_1 k_2 \cdots k_{m'})$. 另一方面, 如果我们从 A_s 中删去第 q 行, 所得的矩阵是 $A_{-q}(k_1 k_2 \cdots k_{m'})$.

既然 $t_{2,p,q}$ 的两个连通部分中的一个包含顶点 p 和 q , 所以, 在 $t_{2,p,q}$ 中, 顶点 p 和 q 之间存在一条路径. 设这条路径是 (e_1, e_2, \cdots, e_r) 如图 7-5-3 所示.

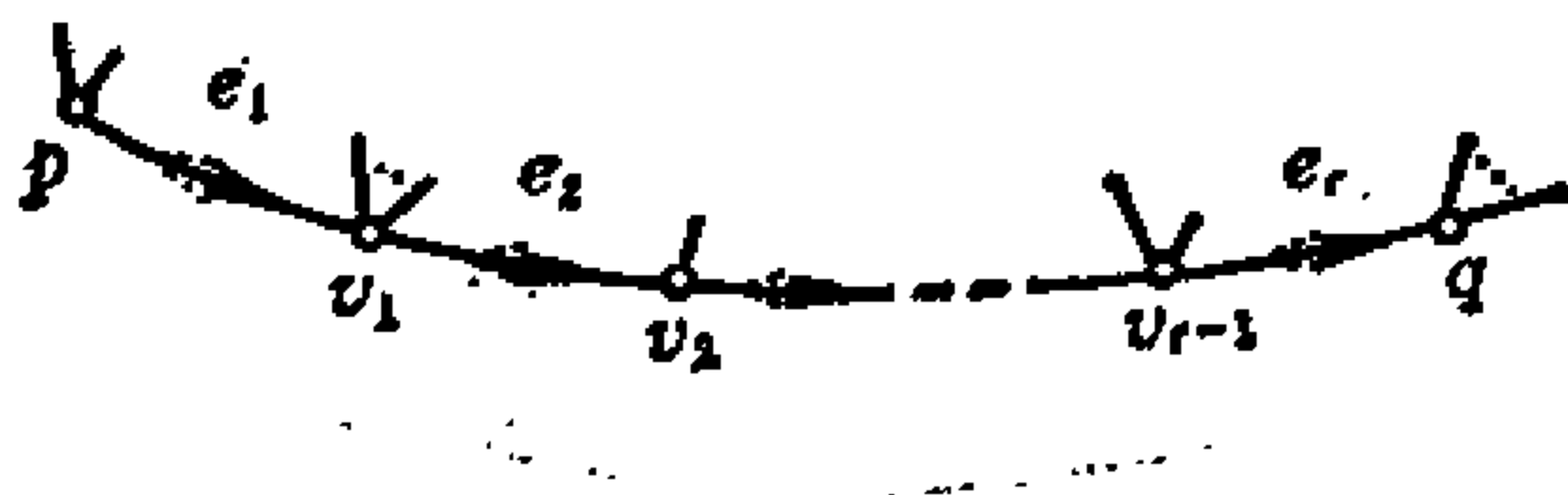


图 7-5-3 $t_{2,p,q}$ 中顶点 p 与 q 之间的路径

A_s 中与路径的边 e_1, e_2, \cdots, e_r 对应的列具有以下性质. 为了简便, 设 A_s 中与边 e_1, e_2, \cdots, e_r 对应的列分别是第 e_1 , 第 e_2, \cdots , 第 e_r 列. 设 A_s 中与顶点 $p, v_1, v_2, \cdots, v_{r-1}$, 和 q 对应的分别是第 p , 第 v_1 , 第 v_2, \cdots , 第 v_{r-1} 和第 q 行. 第 e_1 列在第 p 行有非零元, 第 e_1 和第 e_2 列在第 v_1 行有非零元, \cdots , 第 e_r 列在第 q 行有非零元. 假定第 e_1 , 第 e_2, \cdots , 第 e_r 列是 A_s 的前 r 列, 而第 p , 第 v_1, \cdots , 第 q 行是 A_s 的前 $r+1$ 行. 这个假设对一般情况并不是适合的, 而且我们很快就会看到, 这个假设对于我们这里要说明的问题也不是必

要的，然而，这样做使下面的讨论变得很清晰。由此假设，

$$A_s = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & \cdots & e_r & \cdots \\ \begin{matrix} p \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ q \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \mp 1 & \pm 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \mp 1 & \pm 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mp 1 & \cdots \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (7-5-27)$$

我们用第 e_2 列乘上 (± 1) 后再加到第 e_1 列，使得第 e_1 列有两个非零元素，一个在第 p 行，另一个在第 v_2 行：

$$A_s = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & \cdots & e_r & \cdots \\ \begin{matrix} p \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ q \end{matrix} & \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \pm 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \mp 1 & \mp 1 & \pm 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & 0 & 0 & & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mp 1 & \cdots \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (7-5-28)$$

注意在第 e_1 列中，这一运算将一个非零元从第 v_1 行移到了第 v_2 行。与此类似，我们能将第 e_3 列乘上 ± 1 加到第 e_1 列，使在第 e_1 列中的一个非零元从第 v_2 行移到第 v_3 行。经过这样逐次的运算，我们能移动第 e_1 列中的一个非零元，最后使得一个非零元在第 p 行，另一个在第 q 行：

$$A_s = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & \cdots & e_r & \cdots \\ \begin{matrix} p \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ q \end{matrix} & \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \pm 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \mp 1 & \pm 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \mp 1 & 0 & 0 & \cdots & \mp 1 & \cdots \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (7-5-29)$$

值得注意的是, 不论与顶点 $p, v_1, v_2, \dots, v_{r-1}, q$ 对应的行和与边 e_1, e_2, \dots, e_r 对应的列的位置如何, 我们都会有同样的结果。

不失一般性, 设 $q > p$, 则由式(3-1-7), 我们能看出

$$|A_{-q}(k_1 k_2 \dots k_{m'})| = \pm (-1)^{p+e_1} |A_{-p-q}| \quad (7-5-30)$$

以及 $|A_{-p}(k_1 k_2 \dots k_{m'})| = \mp (-1)^{q-1+e_1} |A_{-p-q}| \quad (7-5-31)$

其中 A_{-p-q} 是 A 删除第 p , 第 q 行和第 e_1 列得到的子矩阵。在式(7-5-31), 因为 A_{-p} 中对应于顶点 q 的行不是第 q 行而是第 $q-1$ 行, 所以 -1 的指数应是 $q-1+e_1$ 而不是 $q+e_1$ 。由这个结果, 我们有

$$\sigma = |A_{-p}(k_1 k_2 \dots k_{m'})| |A_{-q}(k_1 k_2 \dots k_{m'})| = (-1)^{p+q} \quad (7-5-32)$$

因为 A_{-p-q} 是一个关联矩阵的非奇异子阵, 故 $|A_{-p-q}|^2$ 是 1。因此对任何 $t_{2pq,j}$, σ 是 $(-1)^{p+q}$ 。于是, 据式(7-5-24), 我们有以下定理。

定理7-5-1 一个似无源网络的节点导纳矩阵在 (p, q) 处的代数余子式是

$$\Delta'_{pq} = \sum 2\text{-树 } t_{2pq,j} \text{ 树枝导纳乘积} \quad (7-5-33)$$

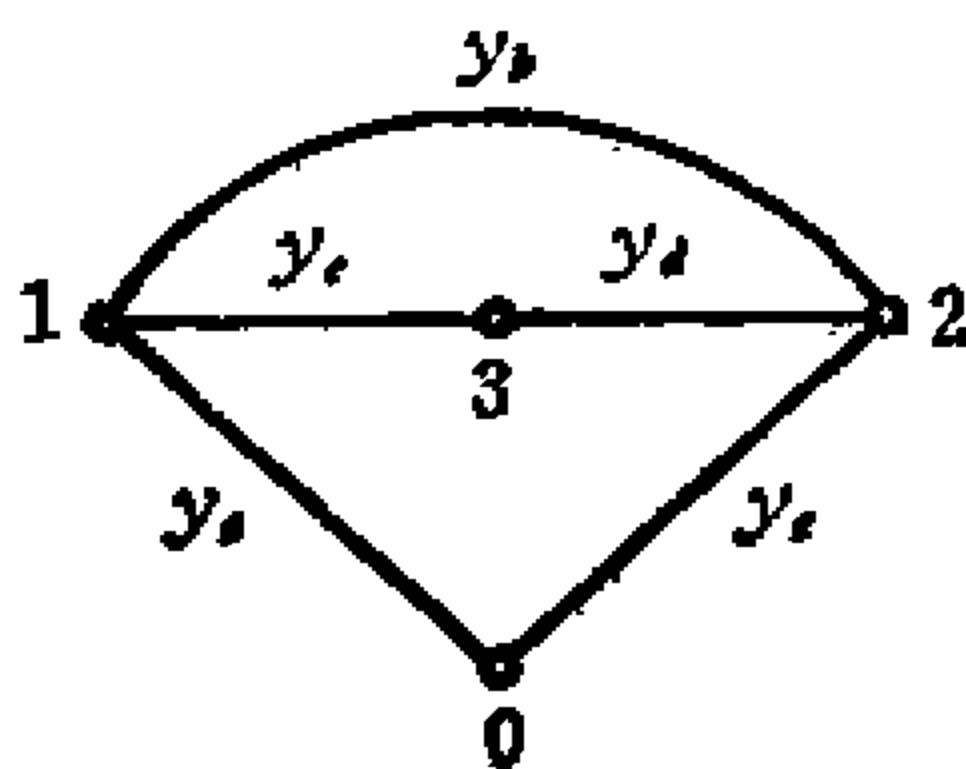


图7-5-4 一个网络

其中 j 是参考点。

例如, 图 7-5-4 中网络的代数余子式 Δ'_{12} 能用找出所有的 2-树 $t_{212,0}$ (这里 0 是参考点) 的方法得到。

所有的 2-树 $t_{212,0}$ 是 $(y_b y_c), (y_b y_d)$ 和 $(y_c y_d)$ 。因此

$$\Delta'_{12} = y_b y_c + y_b y_d + y_c y_d$$

为了方便, 我们定义以下符号。

定义7-5-4 符号 V 和 W 分别代表 \sum (树枝导纳乘积) 和 \sum (2-树树枝导纳乘积), 即

$$V = \sum (\text{树枝导纳乘积}) \quad (7-5-34)$$

$$W_{a_1 a_2 \dots a_r, b_1 b_2 \dots b_s} = \sum (2\text{-树 } t_{2a_1 a_2 \dots a_r, b_1 b_2 \dots b_s} \text{ 树枝导纳乘积}) \quad (7-5-35)$$

利用 Δ' 和 Δ'_{pq} , 式(7-5-4)可以写成

$$V_a = \frac{1}{\Delta'} \begin{bmatrix} \Delta'_{11} & \Delta'_{21} & \dots & \Delta'_{m1} \\ \Delta'_{12} & \Delta'_{22} & \dots & \Delta'_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta'_{1m} & \Delta'_{2m} & \dots & \Delta'_{mm} \end{bmatrix} y_a \quad (7-5-36)$$

考虑图7-5-5中的网络, 其中 N 仅由似无源元件组成。只就顶点 p, q 和 j (参考点) 之间的网络函数而言, 式(7-5-36)可以简化成

$$\begin{bmatrix} v_p \\ v_q \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta'} \begin{bmatrix} \Delta'_{pp} & \Delta'_{qp} \\ \Delta'_{pq} & \Delta'_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_p \\ J_q \end{bmatrix} \quad (7-5-37)$$

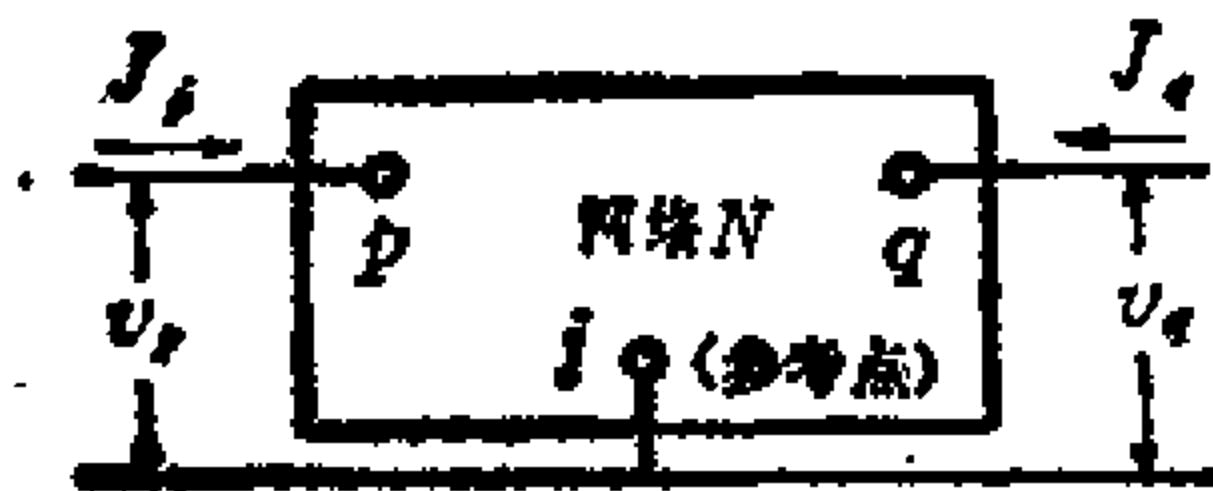


图7-5-5 三端网络函数

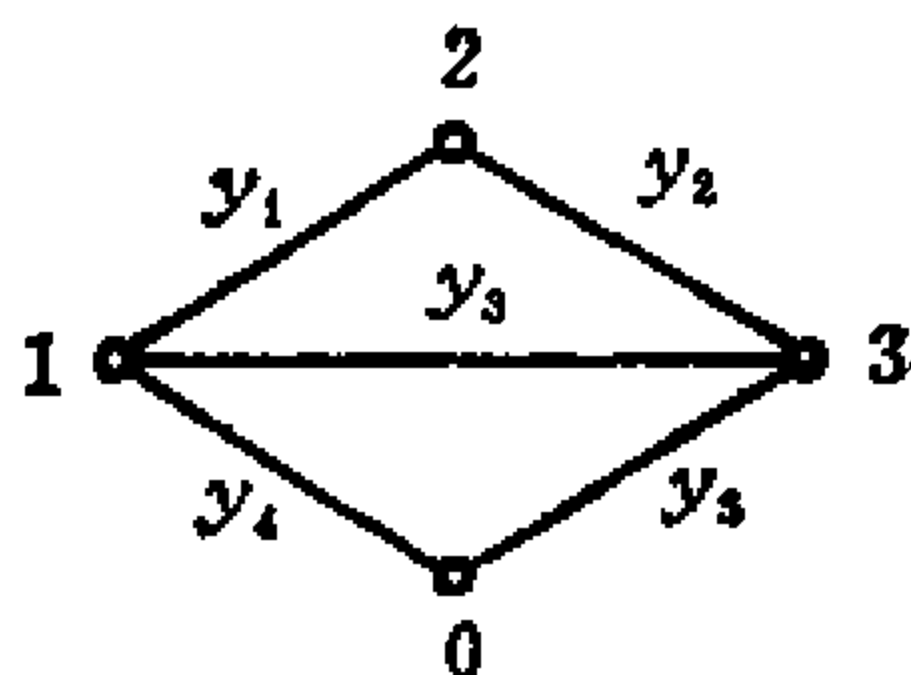


图7-5-6 一个网络

所以开路网络函数为

$$\left. \frac{J_p}{v_p} \right|_{J_q=0} = \frac{V}{W_{p,j}} \quad (7-5-38)$$

$$\left. \frac{J_p}{v_q} \right|_{J_q=0} = \frac{V}{W_{pq,j}} \quad (7-5-39)$$

以及

$$\left. \frac{v_q}{v_p} \right|_{J_q=0} = \left. \frac{v_q/J_p}{v_p/J_p} \right|_{J_q=0} = \frac{W_{pq,i}/V}{W_{p,i}/V} = \frac{W_{pq,i}}{W_{p,i}} \quad (7-5-40)$$

例如，图7-5-6中网络的开路网络函数可按如下方法得到：

$$V = y_1 y_2 y_4 + y_1 y_2 y_5 + y_1 y_3 y_4 + y_1 y_3 y_5 + y_1 y_4 y_5 + y_2 y_3 y_4 \\ + y_2 y_3 y_5 + y_2 y_4 y_5$$

$$W_{1,0} = y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_1 y_5 + y_2 y_3 + y_2 y_5$$

所以

$$\frac{J_1}{V_1} = \frac{V}{W_{1,0}} \\ = \frac{y_1[y_2(y_4 + y_5) + y_3(y_4 + y_5) + y_4 y_5] + y_2[y_3(y_4 + y_5) + y_4 y_5]}{y_1[y_2 + (y_3 + y_5)] + y_2(y_3 + y_5)}$$

并且

$$W_{2,0} = y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_1 y_5 + y_2 y_4 + y_3 y_4 + y_4 y_5 + y_2 y_3 + y_3 y_5$$

于是

$$\frac{J_2}{V_2} = \frac{V}{(y_1 + y_4)(y_2 + y_3 + y_5) + y_3(y_2 + y_5)}$$

又

$$W'_{12,0} = y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_1 y_5 + y_2 y_3$$

故我们有

$$\left. \frac{J_1}{V_2} \right|_{J_2=0} = \frac{V}{[y_1(y_2 + y_3 + y_5) + y_2 y_3]}$$

考虑图7-5-7中的网络，假设其中 N 仅是似无源元件。由式(7-5-36)，我们有

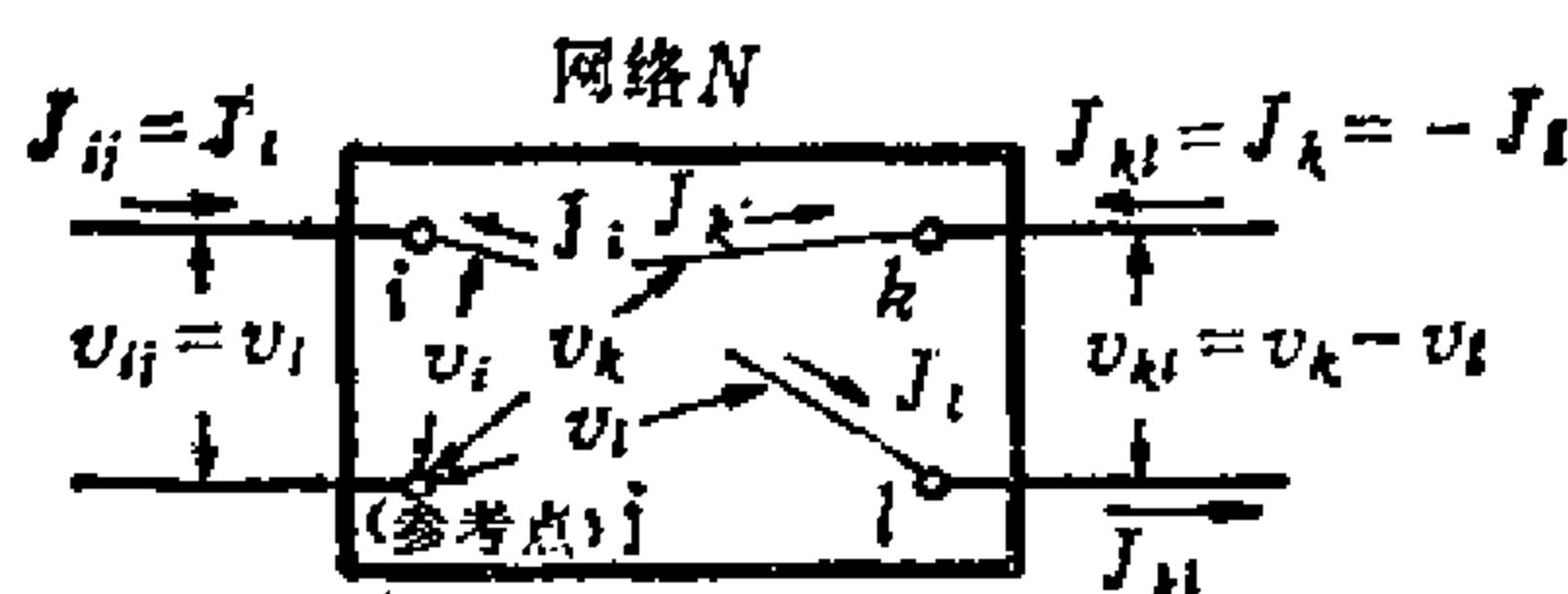


图7-5-7 四端网络函数

$$\begin{bmatrix} v_i \\ v_k \\ v_l \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta'} \begin{bmatrix} \Delta'_{ii} & \Delta'_{ki} & \Delta'_{li} \\ \Delta'_{ik} & \Delta'_{kk} & \Delta'_{lk} \\ \Delta'_{il} & \Delta'_{kl} & \Delta'_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_i \\ J_k \\ J_l \end{bmatrix} \quad (7-5-41)$$

因为 $v_{ij} = v_i$ (7-5-42)

$$J_{ij} = J_i \quad (7-5-43)$$

$$v_{kl} = v_k - v_l \quad (7-5-44)$$

$$J_{kl} = J_k = -J_l \quad (7-5-45)$$

其中 v_p 是从顶点 p 到参考点 j 的电压， J_p 是从参考点 j 到顶点 p 的电流， $p = i, k, l$ 。式(7-5-41)能够改写为

$$\begin{bmatrix} v_{ij} \\ v_{kl} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta'} \begin{bmatrix} \Delta'_{ii} & \Delta'_{ki} - \Delta'_{li} \\ \Delta'_{ik} - \Delta'_{il} & \Delta'_{kk} + \Delta'_{ll} - \Delta'_{kl} - \Delta'_{lk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{ij} \\ J_{kl} \end{bmatrix} \quad (7-5-46)$$

因为

$$W_{pq,i} = \sum 2\text{-树 } t_{2pq,i} \text{ 树枝导纳乘积} \quad (7-5-47)$$

$$t_{2pq,i} \in T_{2pq,i}$$

以及

$$T_{2pq,i} = T_{2pqk,i} \cup T_{2pq,ki} \quad (7-5-48)$$

我们可将 Δ'_{ki} 表示为

$$\Delta'_{ki} = W_{ki,j} = W_{k,l,j} + W_{k,i,l,j} \quad (7-5-49)$$

类似地

$$\Delta'_{li} = W_{li,j} = W_{k,l,j} + W_{li,k,j} \quad (7-5-50)$$

所以

$$\Delta'_{ki} - \Delta'_{li} = W_{k,i,l,j} - W_{li,k,j} \quad (7-5-51)$$

同样

$$\Delta'_{ki} - \Delta'_{il} = W_{k,i,l,j} - W_{l,i,k,j} \quad (7-5-52)$$

又由

$$\Delta'_{kk} = W_{k,j} = W_{k,l,j} + W_{k,i,l,j} \quad (7-5-53)$$

$$\Delta'_{ll} = W_{l,j} = W_{k,l,j} + W_{l,i,k,j} \quad (7-5-54)$$

$$\Delta'_{kl} = W_{k,l,j} \quad (7-5-55)$$

$$\Delta'_{lk} = W_{k,l,j} \quad (7-5-56)$$

我们有

$$\Delta'_{kk} + \Delta'_{ll} - \Delta'_{kl} - \Delta'_{lk} = W_{k,i,l,j} + W_{k,i,l,j} = W_{k,i,l} \quad (7-5-57)$$

这样，式(7-5-46)可以写为

$$\begin{bmatrix} v_{ij} \\ v_{kl} \end{bmatrix} = \frac{1}{V} \begin{bmatrix} W_{i,j} & W_{k,i,l,j} - W_{li,k,j} \\ W_{k,i,l,j} - W_{li,k,j} & W_{k,i,l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{ij} \\ J_{kl} \end{bmatrix} \quad (7-5-58)$$

换句话说，四端网络的开路函数为

$$\left. \frac{J_{ij}}{v_{ij}} \right|_{J_{kl}=0} = \frac{V}{W_{i,j}} \quad (7-5-59)$$

$$\left. \frac{J_{ij}}{v_{kl}} \right|_{J_{kl}=0} = \frac{V}{W_{k,i,l,j} - W_{li,k,j}} \quad (7-5-60)$$

$$\frac{v_{kl}}{v_{ij}} J_{kl=0} = \frac{W_{kijl} - W_{lijk}}{W_{ijij}} \quad (7-5-61)$$

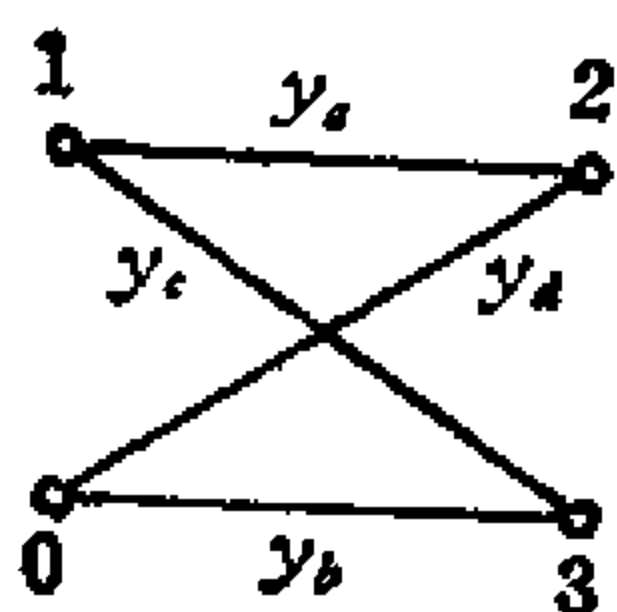


图7-5-8 一个四端网络 所以

例如，图7-5-8中网络的开路电压比 v_{23}/v_{10} 能由 W_{110} 和 $W_{12,30} - W_{13,20}$ 得到：

$$W_{110} = y_a y_b + y_a y_c + y_b y_d + y_c y_d$$

$$W_{12,30} - W_{13,20} = y_a y_b - y_c y_d$$

$$\frac{v_{23}}{v_{10}} = \frac{y_a y_b - y_c y_d}{y_a y_b + y_a y_c + y_b y_d + y_c y_d}$$

由于规定

$$W_{kijl} = W_{kijj} \quad \text{对 } j = 1 \quad (7-5-62)$$

$$W_{lij, kj} = 0 \quad \text{对 } j = 1 \quad (7-5-63)$$

我们可以看出，当 $j = 1$ 时，式(7-5-60)和(7-5-61)变成式(7-5-39)和(7-5-40)。

7-6 短路网络函数的拓扑公式

由式(7-5-46)，我们得到

$$\begin{bmatrix} J_{ij} \\ J_{kl} \end{bmatrix} = \frac{\Delta'}{\Delta'_{ii}(\Delta'_{kk} + \Delta'_{ll} - \Delta'_{kl} - \Delta'_{lk}) - (\Delta'_{ki} - \Delta'_{li})(\Delta'_{ik} - \Delta'_{il})} \times \begin{bmatrix} \Delta'_{kk} + \Delta'_{ll} - \Delta'_{kl} - \Delta'_{lk} & -(\Delta'_{ki} - \Delta'_{li}) \\ -(\Delta'_{ik} - \Delta'_{il}) & \Delta'_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ij} \\ v_{kl} \end{bmatrix} \quad (7-6-1)$$

为了简化这个等式，我们必须找出代数余子式之间的关系。考虑一个 n 阶方阵 $A = [a_{ij}]$ ，设 M 是 A 的转置伴随（经典转置伴随）矩

阵，即

$$M = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \quad (7-6-2)$$

这里 Δ_{ij} 是 A 中 a_{ij} 的代数余子式。那么我们知道

$$AM = \begin{bmatrix} D & & 0 \\ & D & \\ & & \ddots \\ 0 & & D \end{bmatrix} \quad (7-6-3)$$

其中 D 是 A 的行列式。假定我们把 A 的行和列重排，使行 r_1, r_2, \dots, r_k 成为前 k 行，列 j_1, j_2, \dots, j_k 成为前 k 列。设所得的矩阵是 \underline{A} ，又设 \underline{M} 是 \underline{A} 的转置伴随矩阵，它能从重排 M 的行和列得到。

现在我们把 \underline{M} 中除前 k 列外的各列重新安排，使 \underline{M} 改成

$$\underline{M}_k = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \Delta_{r_1 j_1} & \Delta_{r_2 j_1} & \cdots & \Delta_{r_k j_1} & & \\ \Delta_{r_1 j_2} & \Delta_{r_2 j_2} & \cdots & \Delta_{r_k j_2} & & 0 \\ & \cdots & & & & \\ \hline \Delta_{r_1 j_k} & \Delta_{r_2 j_k} & \cdots & \Delta_{r_k j_k} & & \\ \hline \Delta_{r_1 1} & \Delta_{r_2 1} & \cdots & \Delta_{r_k 1} & 1 & \\ \Delta_{r_1 2} & \Delta_{r_2 2} & \cdots & \Delta_{r_k 2} & & 1 & 0 \\ & \cdots & & & & \ddots \\ \Delta_{r_1 n} & \Delta_{r_2 n} & \cdots & \Delta_{r_k n} & 0 & & 1 \end{array} \right] \quad (7-6-4)$$

其中 $r_1 < r_2 < \cdots < r_k$, $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$ 。 \underline{A} 和 \underline{M}_k 的乘积是

$$\underline{A} \cdot \underline{M}_k = \begin{bmatrix} a_{r_1 j_1} & \dots & a_{r_1 j_k} & a_{r_1 1} & \dots & a_{r_1 n} \\ a_{r_2 j_1} & \dots & a_{r_2 j_k} & a_{r_2 1} & \dots & a_{r_2 n} \\ \dots & & & & & \\ a_{r_k j_1} & \dots & a_{r_k j_k} & a_{r_k 1} & \dots & a_{r_k n} \\ \hline a_{1 j_1} & \dots & a_{1 j_k} & a_{1 1} & \dots & a_{1 n} \\ a_{2 j_1} & \dots & a_{2 j_k} & a_{2 1} & \dots & a_{2 n} \\ \dots & & & & & \\ a_{n j_1} & \dots & a_{n j_k} & a_{n 1} & \dots & a_{n n} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} \Delta_{r_1 j_1} & \dots & \Delta_{r_k j_1} & & & \\ \Delta_{r_1 j_2} & \dots & \Delta_{r_k j_2} & & & 0 \\ \dots & & & & & \\ \Delta_{r_1 j_k} & \dots & \Delta_{r_k j_k} & & & \\ \hline \Delta_{r_1 1} & \dots & \Delta_{r_k 1} & 1 & & \\ \Delta_{r_1 2} & \dots & \Delta_{r_k 2} & & 1 & 0 \\ \dots & & & & \dots & 1 \\ \Delta_{r_1 n} & \dots & \Delta_{r_k n} & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} D & & & a_{r_1 1} & \dots & a_{r_1 n} \\ & D & & a_{r_2 1} & \dots & a_{r_2 n} \\ & & \dots & & & \\ & & & D & & a_{r_k 1} & \dots & a_{r_k n} \\ \hline & & & & & a_{1 1} & \dots & a_{1 n} \\ & & & & & a_{2 1} & \dots & a_{2 n} \\ & & & & & \dots & & \\ & & & & & a_{n 1} & \dots & a_{n n} \end{bmatrix}$$

(7-6-5)

所以由式(7-6-5)左端得 $\underline{A} \underline{M}_k$ 的行列式

$$|\underline{A} \cdot \underline{M}_k| = |\underline{A}| |\underline{M}_k| = \mathcal{E} D \begin{vmatrix} \Delta_{r_1 j_2} & \cdots & \Delta_{r_k j_1} \\ \Delta_{r_1 j_2} & \cdots & \Delta_{r_k j_2} \\ & \cdots & \\ \Delta_{r_1 j_k} & \cdots & \Delta_{r_k j_k} \end{vmatrix} \quad (7-6-6)$$

其中 $\mathcal{E} = (-1)^{r_1 + r_2 + \cdots + r_k + j_1 + \cdots + j_k}$.

另一方面, 由式(7-6-5)的右端得 $\underline{A} \underline{M}_k$ 的行列式

$$|\underline{A} \cdot \underline{M}_k| = D^k \left| A \left(\overline{\frac{r_1 r_2 \cdots r_k}{j_1 j_2 \cdots j_k}} \right) \right| \quad (7-6-7)$$

这里的 $A \left(\overline{\frac{r_1 r_2 \cdots r_k}{j_1 j_2 \cdots j_k}} \right)$ 表示从 A 中删去行 r_1, r_2, \cdots, r_k 和列 j_1, j_2, \cdots, j_k 得到的矩阵, 因此

$$\begin{vmatrix} \Delta_{r_1 j_1} & \cdots & \Delta_{r_k j_1} \\ \Delta_{r_1 j_2} & \cdots & \Delta_{r_k j_2} \\ & \cdots & \\ \Delta_{r_1 j_k} & \cdots & \Delta_{r_k j_k} \end{vmatrix} = D^{k-1} \tilde{D} \left(\overline{\frac{r_1 r_2 \cdots r_k}{j_1 j_2 \cdots j_k}} \right) \quad (7-6-8)$$

其中

$$\tilde{D} \left(\overline{\frac{r_1 r_2 \cdots r_k}{j_1 j_2 \cdots j_k}} \right) = (-1)^{r_1 + r_2 + \cdots + r_k + j_1 + j_2 + \cdots + j_k} \left| A \left(\overline{\frac{r_1 r_2 \cdots r_k}{j_1 j_2 \cdots j_k}} \right) \right| \quad (7-6-9)$$

当式(7-6-8)的右端由 $\Delta_{ij}, \Delta_{pj}, \Delta_{iq}$ 和 Δ_{pq} 组成时,

$$\text{则} \quad \begin{vmatrix} \Delta_{ij} & \Delta_{pj} \\ \Delta_{iq} & \Delta_{pq} \end{vmatrix} = D \tilde{D} \left(\overline{\frac{ip}{jq}} \right) \quad (7-6-10)$$

$$\text{或} \quad \Delta_{ij} \Delta_{pq} - \Delta_{pj} \Delta_{iq} = D \tilde{D} \left(\overline{\frac{ip}{jq}} \right) \quad (7-6-11)$$

我们已经说过，用符号 Δ 代表 D ，习惯上用 Δ_{ijpq} 来表示 $\tilde{D}(\bar{i}p/\bar{j}q)$ ，用了这些符号，式(7-6-11)能表示为

$$\Delta_{ii}\Delta_{pq} - \Delta_{pi}\Delta_{iq} = \Delta\Delta_{ijpq} \quad (7-6-12)$$

此式称为雅可比关系式。有了这个关系，式(7-6-1)右端第一项的分母变成

$$\begin{aligned} \Delta'_{ii}(\Delta'_{kk} + \Delta'_{ll} - \Delta'_{kl} - \Delta'_{lk}) - (\Delta'_{ki} - \Delta'_{li})(\Delta'_{ik} - \Delta'_{il}) \\ = (\Delta'_{ii}\Delta'_{kk} - \Delta'_{ik}\Delta'_{ki}) + (\Delta'_{ii}\Delta'_{ll} - \Delta'_{il}\Delta'_{li}) \\ - (\Delta'_{ii}\Delta'_{kl} - \Delta'_{ki}\Delta'_{il}) - (\Delta'_{ii}\Delta'_{lk} - \Delta'_{li}\Delta'_{ik}) \\ = \Delta'(\Delta'_{iikk} + \Delta'_{iill} - \Delta'_{iikl} - \Delta'_{iilk}) \end{aligned} \quad (7-6-13)$$

于是式(7-6-1)变成

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} J_{ij} \\ J_{kl} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\Delta'_{iikk} + \Delta'_{iill} - \Delta'_{iikl} - \Delta'_{iilk}} \\ &\times \begin{bmatrix} \Delta'_{kk} + \Delta'_{ll} - \Delta'_{kl} - \Delta'_{lk} & -(\Delta'_{ki} - \Delta'_{li}) \\ -(\Delta'_{ik} - \Delta'_{il}) & \Delta'_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ij} \\ v_{kl} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7-6-14)$$

我们能看出， Δ'_{ijpq} 可表示为

$$\Delta'_{ijpq} = (-1)^{p+q} |A_{-i-p} Y (A_{-i-p})^t| \quad (7-6-15)$$

其中 A_{-i-p} 是关联矩阵 A 删去 i 行和 p 行得到的子矩阵，同样， A_{-i-q} 是从 A 中删去 i 行和 q 行得到的子矩阵。由于 Y 是对角矩阵，从比内-柯西定理得到：

$$\Delta'_{ijpq} = (-1)^{p+q} \sum_{(k)} y_{k_1} y_{k_2} \cdots y_{k_m} |A_{-i-p}(k_1 k_2 \cdots k_m)|$$

$$\cdot |A'_{-i-q}(k_1 k_2 \cdots k_{m''})| \quad (7-6-16)$$

其中 $A_{-i-p}(k_1 k_2 \cdots k_{m''})$ 由 A_{-i-p} 的 $k_1, k_2, \cdots, k_{m''}$ 列构成, $A_{-i-q}(k_1 k_2 \cdots k_{m''})$ 由 A_{-i-q} 的 $k_1, k_2, \cdots, k_{m''}$ 列构成。

考虑一个线图 $G(i=j)$, 它是由所给的线图 G 合并顶点 i 和 j 得到的 (j 是参考点). 我们可以看出, $G(i=j)$ 的节点导纳矩阵能由 G 的节点导纳矩阵删去对应于顶点 i 的行和列得到. 换句话说,

$$G \text{ 的 } A_{-i} Y (A_{-i})' = G(i=j) \text{ 的 } A Y A' \quad (7-6-17)$$

所以

$$G \text{ 的 } A_{-i-p} Y (A_{-i-q})' = G(i=j) \text{ 的 } A_{-p} Y (A_{-q})' \quad (7-6-18)$$

于是, 由式(7-5-33),

$$G \text{ 的 } |A_{-i-p} Y (A_{-i-q})'| = \sum G(i=j) \text{ 的 } 2\text{-树 } t_{2,p,q,i} \text{ 树枝导纳乘积} \quad (7-6-19)$$

设 g_i 是 G 的一个子图, 当顶点 i 和 j 被合并时, 它变成 $G(i=j)$ 的 2-树 $t_{2,p,q,i}$, 则 g_i 必由三个连通部分构成, 其中一个包含顶点 p 和 q , 另一个包含顶点 i , 第三个部分包含顶点 j (参考点). 这样的子图称为 3-树, 用符号 $t_{3,i,p,q,i}$ 表示。

定义 7-6-1 一个 3-树 $t_{3,i_1 i_2 \cdots i_r, j_1 j_2 \cdots j_s, k_1 k_2 \cdots k_r}$ 是线图 G (有 n_0 个顶点) 的满足下列条件的子图:

1. $t_{3,i_1 i_2 \cdots i_r, j_1 j_2 \cdots j_s, k_1 k_2 \cdots k_r}$ 包含 $n_0 - 3$ 条边, n_0 个顶点, 且无回路。
2. $t_{3,i_1 i_2 \cdots i_r, j_1 j_2 \cdots j_s, k_1 k_2 \cdots k_r}$ 包含三个部分 (三个最大连通子图), 每个部分都是连通的。
3. 三个部分中, 一部分包含顶点 i_1, i_2, \cdots, i_r , 另一部分包含顶点 j_1, j_2, \cdots, j_s , 第三部分包含顶点 k_1, k_2, \cdots, k_r , 如图 7-6-1 所示。如果一个部分的顶点数是 1 的话, 这个部分就是一个孤立点。

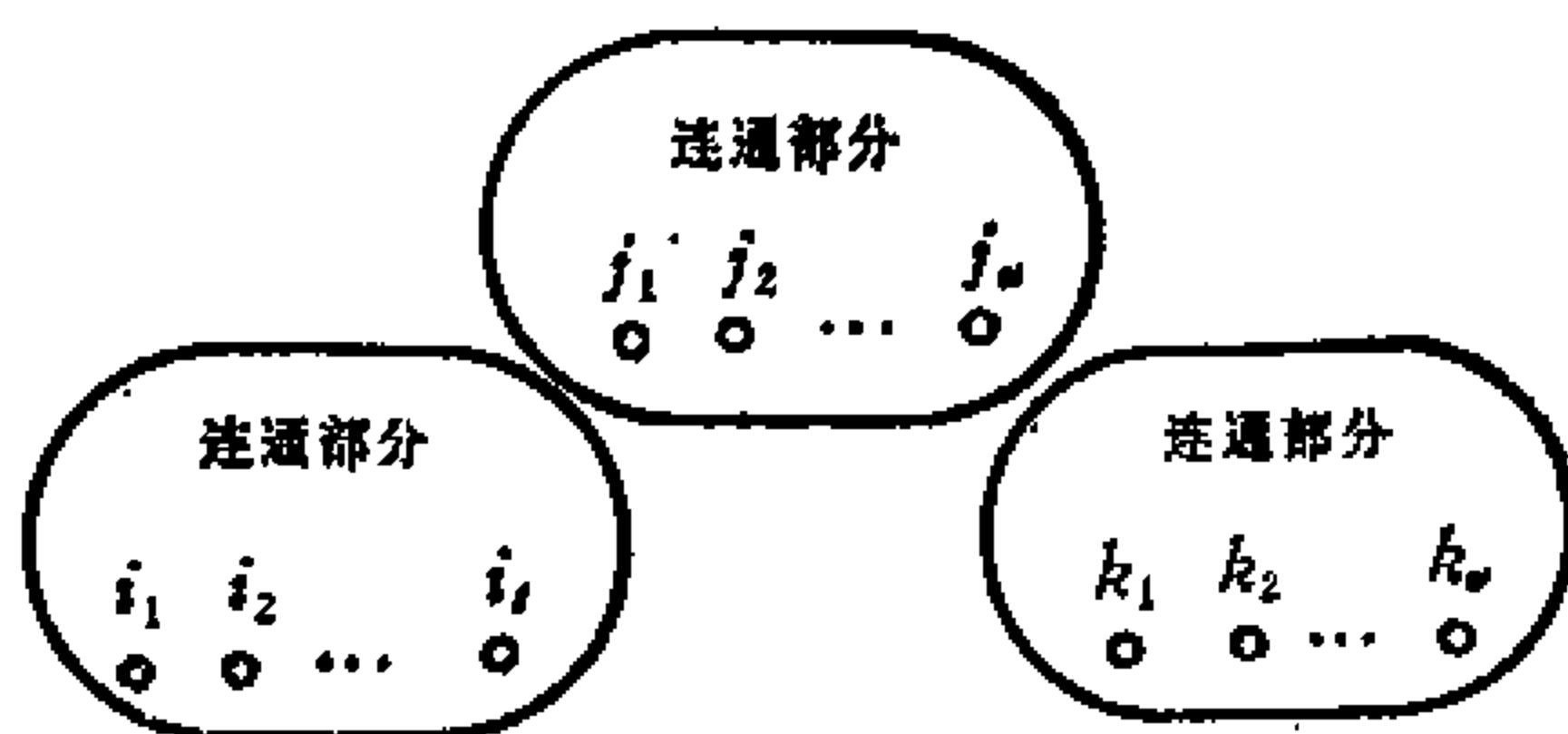


图7-6-1 3-树 $t_{3i_1 i_2 \dots i_l i_1 i_2 \dots i_n k_1 k_2 \dots k_m}$

由这个定义及式(7-6-19),我们有定理7-6-1.

定理7-6-1 一个似无源网络的节点导纳矩阵的代数余子式 Δ'_{iipq} 是

$$\Delta'_{iipq} = \sum 3\text{-树 } t_{3i,pq,j} \text{ 树枝导纳乘积} \quad (7-6-20)$$

这里 j 是参考点.

为了简便,我们定义符号 $U_{i,pq,j}$ 如下.

定义7-6-2

$$U_{i,pq,j} = \sum 3\text{-树 } t_{3i,pq,j} \text{ 树枝导纳乘积} \quad (7-6-21)$$

代数余子式 Δ'_{iikl} 现在可以表示为

$$\Delta'_{iikl} = U_{i,k,l,j} \quad (7-6-22)$$

因为顶点 l 能在三个部分中的任何一个之中,所以式(7-6-22)可写成

$$U_{i,k,l,j} = U_{i,k,l_1,j} + U_{i,l,k_1,j} + U_{i,l,k_2,j} \quad (7-6-23)$$

同样,代数余子式 Δ'_{iill} 和 Δ'_{iikl} 可表示成

$$\Delta'_{iill} = U_{i,l,l,j} = U_{i,k,l_1,j} + U_{i,k,l_2,j} + U_{i,l_1,l_2,j} \quad (7-6-24)$$

及

$$\Delta'_{iikl} = U_{i,k,l,j} \quad (7-6-25)$$

因此

$$\Delta'_{iikl} + \Delta'_{iill} - \Delta'_{iikl} - \Delta'_{iill} = U_{i,k,l_1,j} + U_{i,k,l_2,j} + U_{i,l_1,l_2,j} + U_{i,l_1,l_2,j} \quad (7-6-26)$$

定义7-6-3 符号 ΣU 定义为

$$\Sigma U = U_{ik, l, j} + U_{i, k, l, j} + U_{il, k, j} + U_{i, l, k, j} \quad (7-6-27)$$

在式(7-6-26)的右边运用定义7-6-3, 则式(7-6-14)能表示为

$$\begin{bmatrix} J_{ij} \\ J_{kl} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Sigma U} \begin{bmatrix} W_{k, l} & -(W_{ik, l, j} - W_{il, k, j}) \\ -(W_{ik, l, j} - W_{il, k, j}) & W_{i, j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ij} \\ v_{kl} \end{bmatrix} \quad (7-6-28)$$

注意当 $j = l$ 时, 式(7-6-27)中的 ΣU 简化为

$$\Sigma U = U_{i, k, j} \quad (7-6-29)$$

于是, 由式(7-6-28), 我们得到

$$\begin{bmatrix} J_p \\ J_q \end{bmatrix} = \frac{1}{U_{i, k, j}} \begin{bmatrix} W_{q, i} & -W_{q, p, i} \\ -W_{i, q, j} & W_{p, j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_p \\ v_q \end{bmatrix} \quad (7-6-30)$$

等式(7-6-28)和(7-6-30)分别给出了四端和三端网络的短路网络函数的拓扑公式。现在可以得到电流比如下:

$$\left. \frac{J_{kl}}{J_{ij}} \right|_{v_{kl}=0} = \frac{J_{kl}/v_{ij}}{J_{ij}/v_{ij}} = \frac{-(W_{ik, l, j} - W_{il, k, j})}{W_{k, l}} \quad (7-6-31)$$

例如, 考虑图7-5-8中的网络, 求得 U 为

$$U = U_{13, 2, 0} + U_{1, 3, 2, 0} + U_{12, 3, 0} + U_{1, 2, 3, 0} = y_c + y_d + y_a + y_b$$

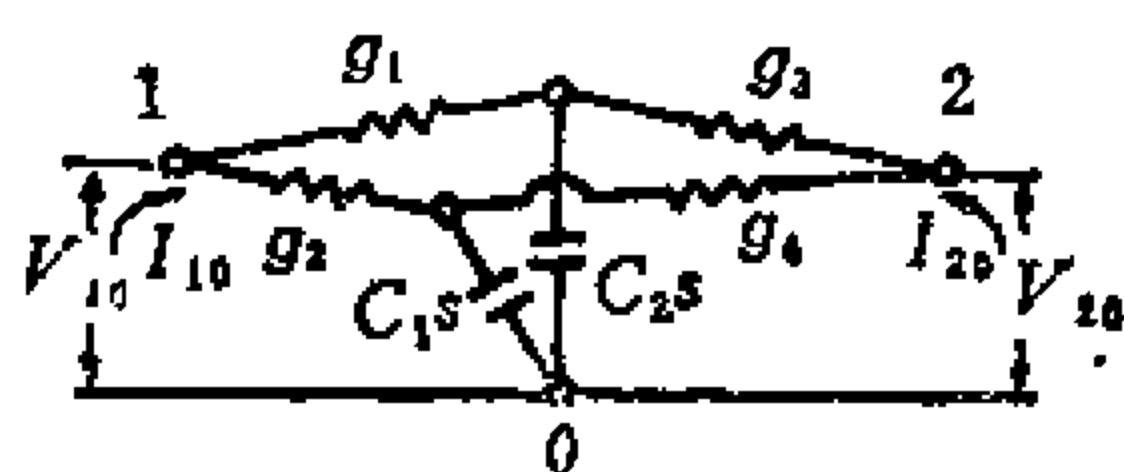
我们可以求出短路转移函数 $\left. \frac{J_{10}}{v_{23}} \right|_{v_{10}=0}$ 为:

$$\left. \frac{J_{10}}{v_{23}} \right|_{v_{10}=0} = \frac{-(W_{12, 3, 0} - W_{13, 2, 0})}{U} = \frac{-y_c y_d - y_a y_b}{y_a + y_b + y_c + y_d}$$

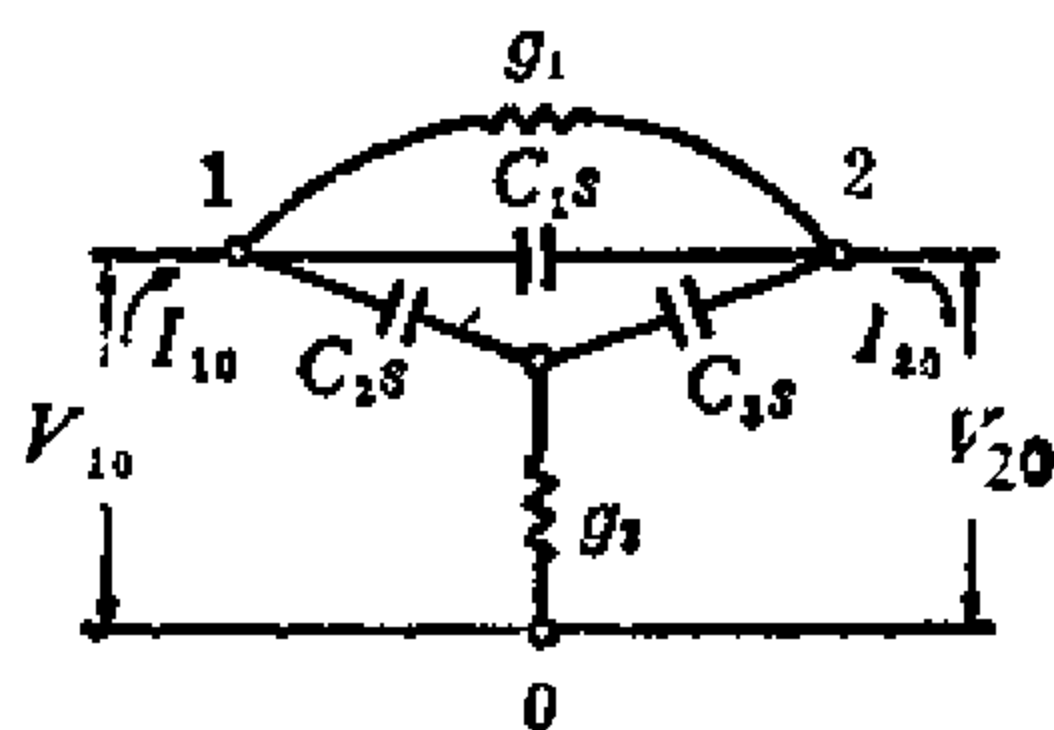
当元件的初始条件不为零, 或网络中有电压源或电流源时, 本章所讨论的公式要作些必要的修改。

习 题

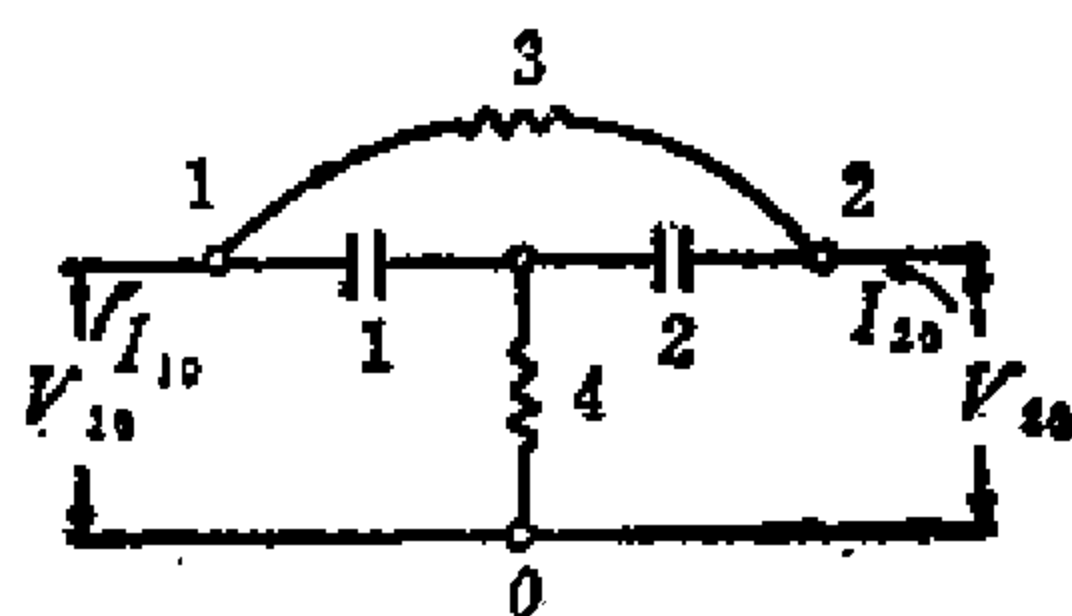
1. 分别求出图P-7-1中三个网络的开路策动点函数 V_{10}/I_{10} 和转移函数 V_{20}/I_{10} 。



(a)



(b)



(c)

图P-7-1

2. 求出图P-7-2中两个网络的电压比 V_{23}/V_{10} 。

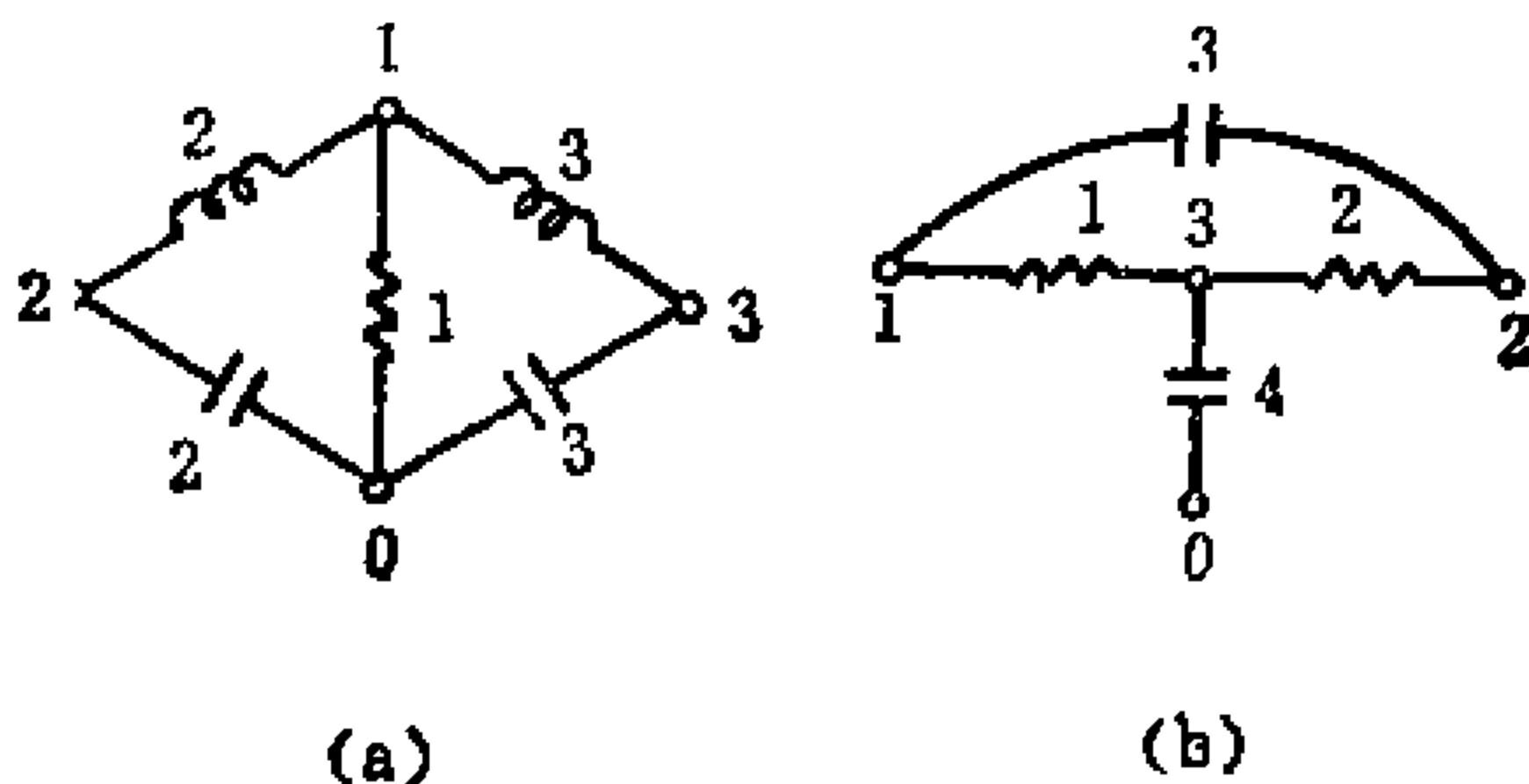


图 P-7-2

3. 求出在题1中三个网络的短路转移函数 $\left. \frac{I_{20}}{V_{10}} \right|_{V_{20}=0}$ 。

4. 求出一个由 n 个顶点组成的完全图网络的路开策动点导纳函数，设每边的电导是1姆欧。

5. 利用拓扑公式证明一个无互感的LC网络的开路策动点函数是 S 的偶函数和奇函数的比。

6. 设 Y_n 是一个所有导纳均为非负的有一个公共端的似无源网络节点导纳矩阵。令

$$\Delta_{11} = Y_n \text{ 的 } (1,1) \text{ 的代数余子式} = \frac{1}{s^{n-2}} (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0)$$

$$\Delta_{12} = Y_n \text{ 的 } (1,2) \text{ 的代数余子式} = \frac{1}{s^{n-2}} (b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0)$$

证明对 $0 \leq k \leq n$, 有 $0 \leq b_k \leq a_k$ 。

7. 证明 $\begin{vmatrix} A \\ B_f \end{vmatrix} = \pm (\text{树的数目})$

这里 B_f 是基本回路矩阵。

8. 证明 BYB' 是网孔阻抗矩阵，其中 B 是回路矩阵。

9. 证明 $|BB'|$ 是一个线图上的树的数目。

第八章 有源网络的拓扑公式， 单向网络及等效变换

8-1 电流图和电压图

利用线图来分析网络有几种不同的方法，每一种方法有利有弊。上一章讨论的形如 $AY A'$ 的节点导纳矩阵有一个特性，即 Y 是一个对角矩阵，而正由于这一特性，这样一个矩阵的行列式等于树枝导纳乘积之和。下面我们将看到，一个有源网络的节点导纳矩阵也能表示成为 $A_1 Y A_2'$ 的形式，使得 Y 是一个对角矩阵。然而，在 $A_1 Y A_2'$ 中，关联矩阵 A_1 和 A_2 是不同的。因此， $A_1 Y A_2'$ 的行列式并不正好是树枝导纳乘积之和。

定义8-1-1 一个由

$$y v_{r,s} = i_{t,u} \quad (8-1-1)$$

定义的导纳 y 用图8-1-1所示的两条边表示，其中 $v_{r,s}$ 是从顶点 r 到顶点 s 的电压，而 $i_{t,u}$ 是与之对应的从顶点 t 流向顶点 u 的电流。表示 $i_{t,u}$ 的边称为导纳 y 的电流边，表示 $v_{r,s}$ 的边称为导纳 y 的电压边，如图8-1-1所示。箭头中的符号 i 表示这条边是电流边，箭头中的符号 v 表示这条边是电压边，这种表示法叫导纳 y 的拓扑表示法。

例如，一个三端跨导 g 可以用下式定义

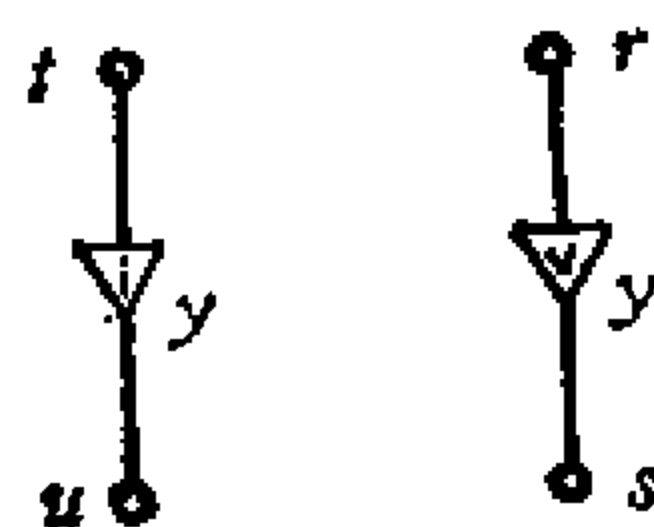


图8-1-1 y 的表示

$$g v_{G,K} = i_{P,K} \quad (8-1-2)$$

它可以由图8-1-2中所示的两条边来表示。当 $r = t$ 且 $s = u$ 时，图8-1-1中导纳 y 的拓扑表示法如图8-1-3(a)所示。这样的导纳用图8-1-3(b)所示的一条边来表示比较简便，因为在这种情况下， y 变成一个似无源元件 [见式 (7-4-6) 和图7-4-1]。类似地，当 $r = u$ ， $s = t$ 时，我们有

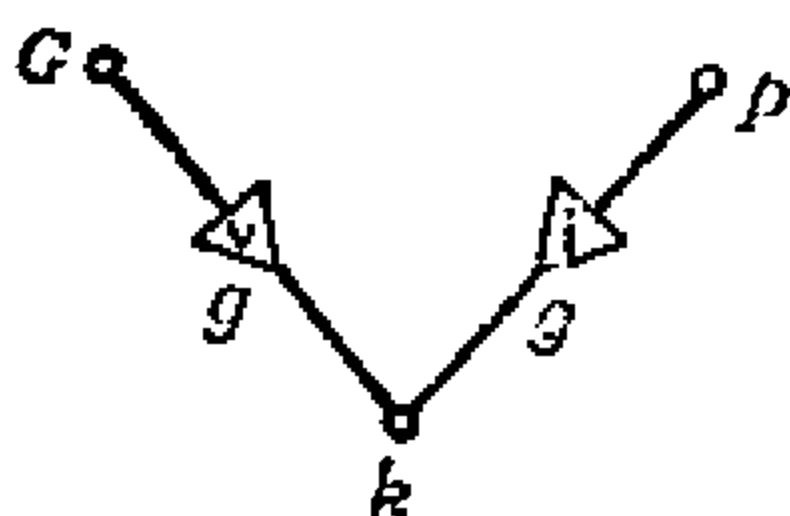


图8-1-2 三端跨导 g

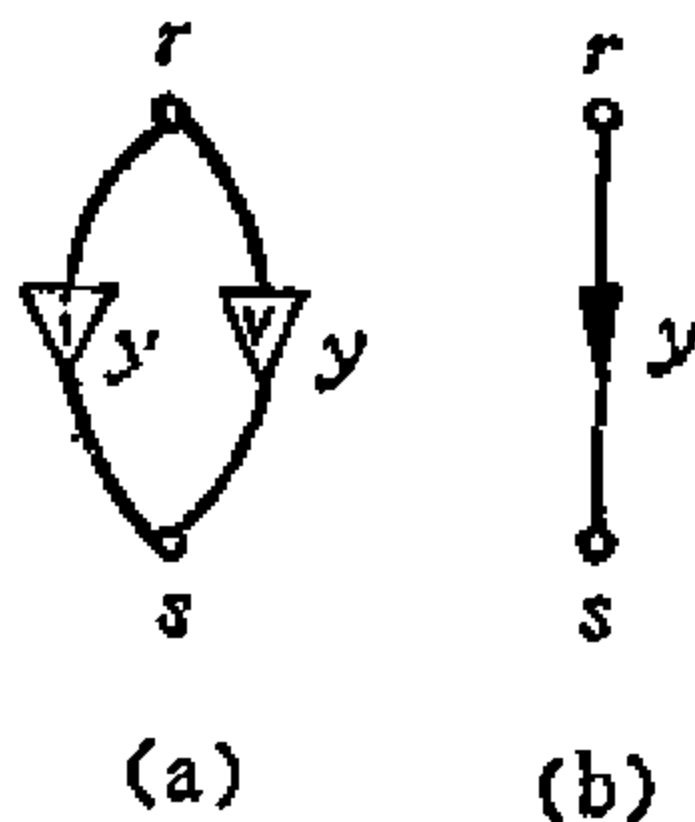
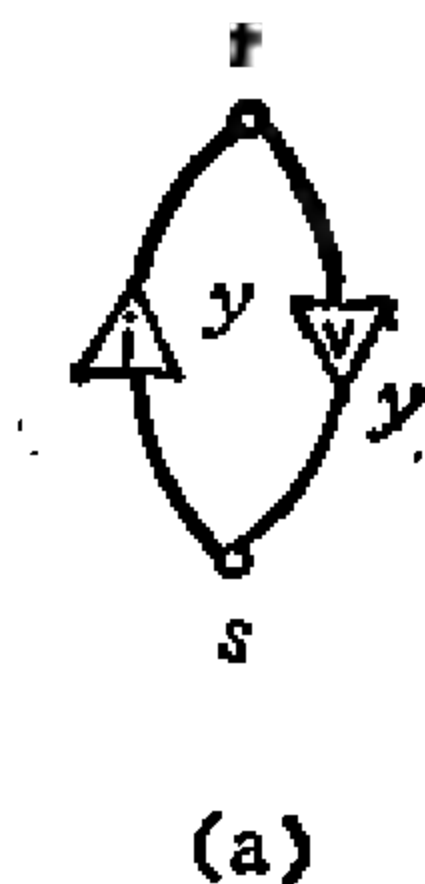


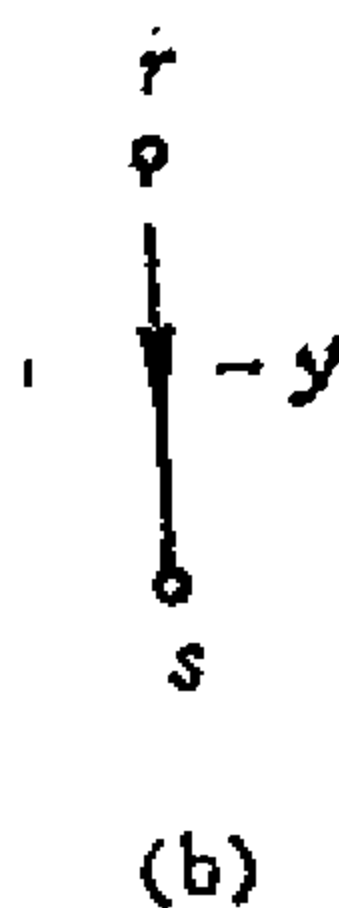
图8-1-3 似无源元件

$$y v_{r,s} = i_{s,r} \quad (8-1-3)$$

这样的导纳 y 的表示法如图8-1-4(a)所示。因为



(a)



(b)

图8-1-4 负导纳

$$i_{s,r} = -i_{r,s} \quad (8-1-4)$$

故式(8-1-3)可以写成

$$(-y)v_{r,s} = i_{r,s} \quad (8-1-5)$$

这样，我们能用一条边来表示这样一个导纳，它的权为 $-y$ [图 8-1-4(b)]。注意这是由于

$$v_{r,s} = -v_{s,r} \quad (8-1-6)$$

且据式(8-1-4)，似无源元件的定向是任意的。这里必须弄清楚，在图 8-1-3(b) [以及图 8-1-4(b)] 中所表示的似无源元件的边，既表示导纳 y 的电压边，又表示导纳 y 的电流边。也就是说，图 8-1-3(b) 中表示法只是图 8-1-3(a) 中表示法的一种简洁标记而已。

为了熟悉电压边和电流边，我们考虑一个基本的节点方程

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} \quad (8-1-7)$$

其中 v_p 是从顶点 p 到参考点的电压， J_p 是从参考点流入顶点 p 的电流， $p = 1, 2, 3$ 。我们能够画出对应此网络的线图，其节点导纳矩阵与式(8-1-7) (图 8-1-5) 中的节点导纳矩阵相同。因此，图 8-1-1 给出的表示法是一种非常有用的方法。值得注意，在图 8-1-5 中，每一条电压边和每一条电流边都与参考点相接。

当导纳 y 的电压边和电流边是任意时，导纳 y 在节点导纳矩

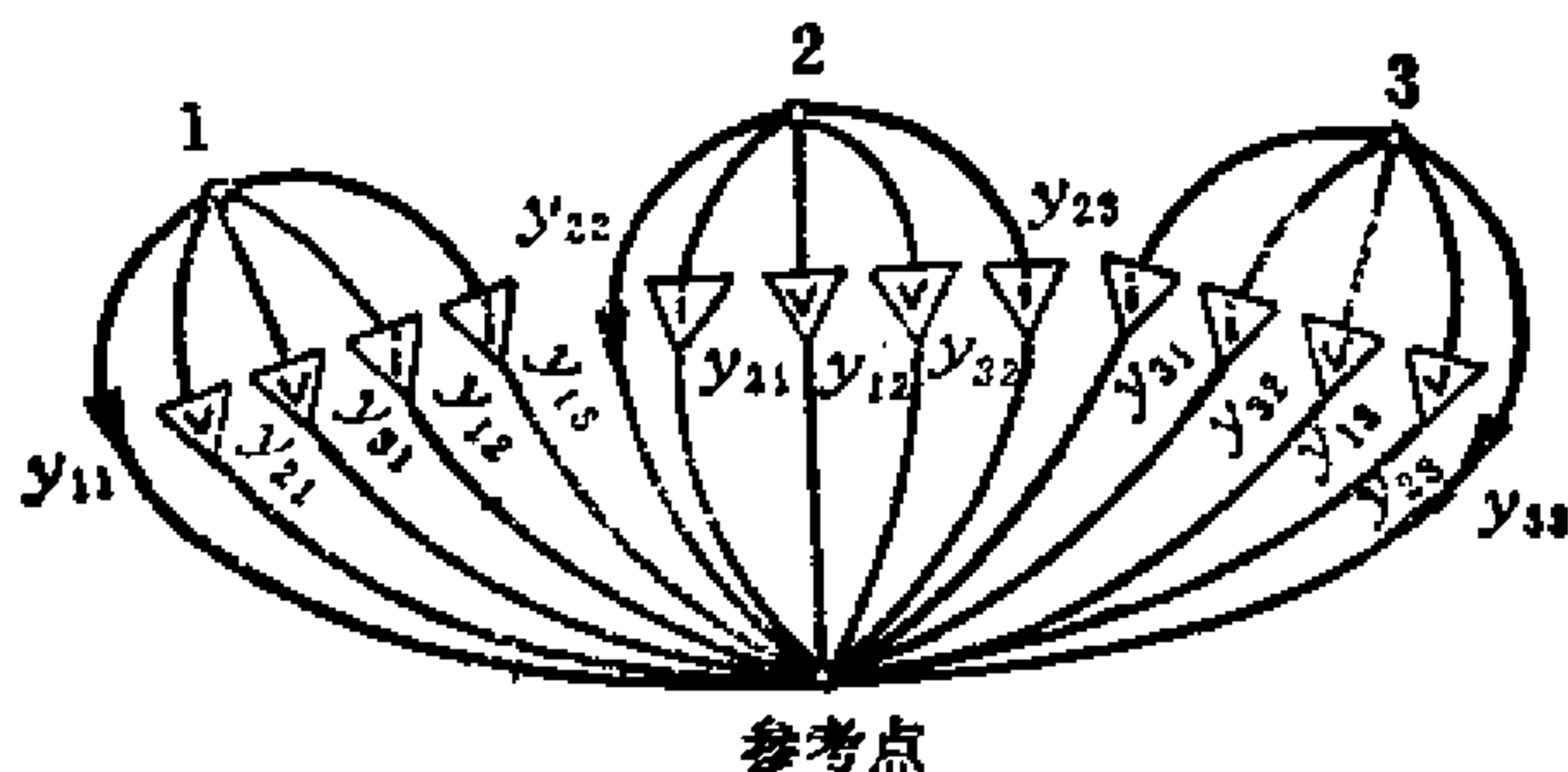


图8-1-5 一个网络的拓扑表示

阵中处于什么位置值得特别注意。考虑一个满足式(8-1-1) 的导纳 y ，注意，在这种假设下， y 的电压边从顶点 r 连接到顶点 s ，而 y 的电流边由顶点 t 连接到顶点 u 。设顶点 r 和 s 的节点电压为 v_r 和 v_s ，则式(8-1-1)能写成

$$y(v_r - v_s) = i_{t,u} \tag{8-1-8}$$

设

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ y_{31} & y_{32} & \cdots & y_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ \vdots \\ J_n \end{bmatrix} \tag{8-1-9}$$

是包含导纳 y 的一个网络的基本节点方程，则在式(8-1-9)中，节点导纳矩阵的第 t 行与电压向量的乘积是顶点 t 处电流的代数和，它必定等于电流 J_t (外部电流)。由于式(8-1-8)中的电流 $i_{t,u}$ 是从顶点 t 流向顶点 u 的， y 必为节点导纳矩阵的 (t,r) 处的元素， $-y$ 必为 (t,s) 处的元素。同样， $-y$ 必为节点导纳矩阵的 (u,r) 处元素，而 y 为 (u,s) 处的元素。这些一定是导纳 y 的元素用图8-1-6表示，其中加圈的两个元素表示 y 在此位置符号相同。

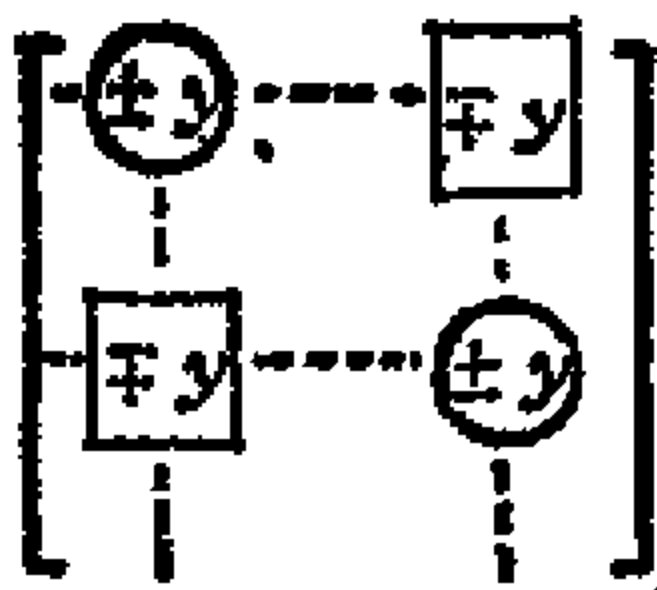


图8-1-6 在节点导纳矩阵中，导纳 y 的位置

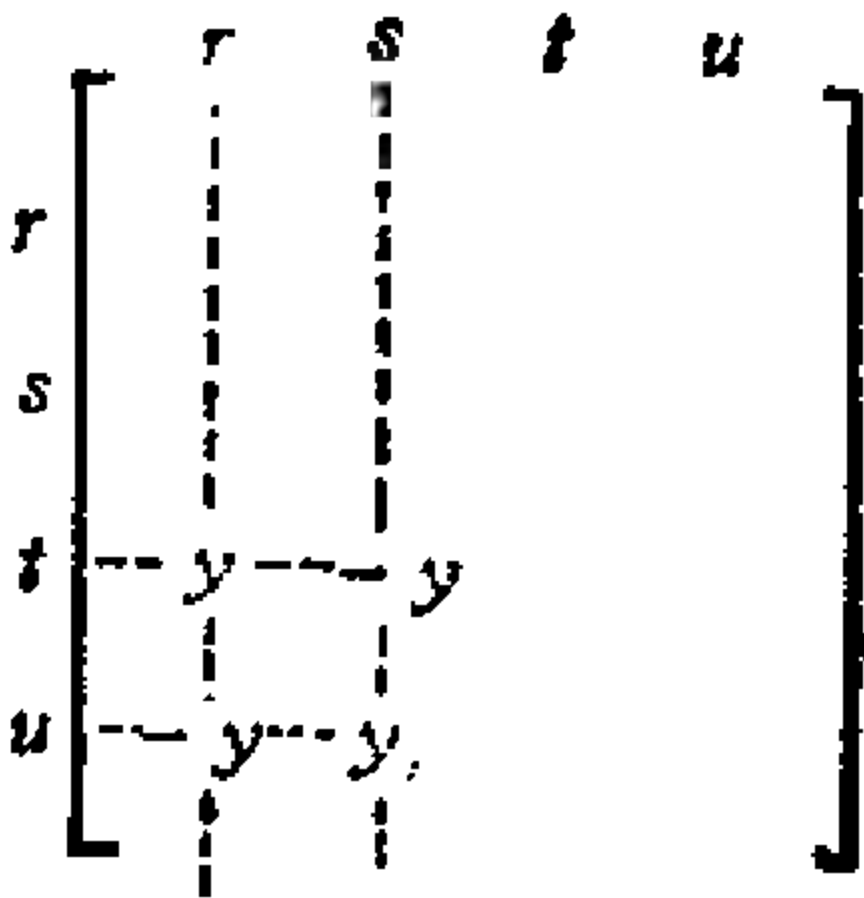


图8-1-7 当 $r < s < t < u$ 时， y 的位置

同样，在画方框的两个元素处， y 的符号也必定相同，并且画圈的元素 y 与画方框的元素 y 的符号恰好相反。例如，如果在节点导纳矩阵中， $r < s < t < u$ ，则 y 将在图8-1-7所示的位置出现。注意，当 $t = r$ ， $u = s$ 时，图8-1-6中画圈表示的元素是对角线元素。并且，我们知道，在这些条件下，导纳 y 是一个似无源元件。如果我们运用式(8-1-5)，当 $t = s$ ， $u = r$ 时，这个结论也是对的。因此，当且仅当导纳 y 是似无源元件时，在节点导纳矩阵中， y 的位置是对称于对角线的。

假定顶点 t 或顶点 u 其中有一个是参考点，则与该顶点对应的列不会出现在节点导纳矩阵之中，因此，在图8-1-6中仅有一列有两个元素是导纳 y 。换句话说，图8-1-6中画圈和画框的两列中，必有一列不存在。同样，如果 r 或 s 其中有一个是参考点，则图8-1-6中画圈和画框的两行中也有一行不存在。例如，若 $t < u$ 且 s 是参考点，则式(8-1-1)的导纳 y 在式(8-1-9)的节点导纳矩阵中出现的情况如图8-1-8所示。

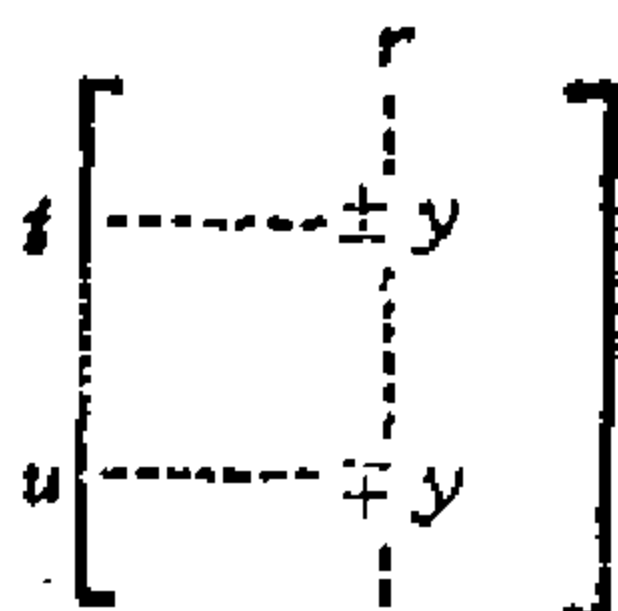


图8-1-8 当 $t < u$ 且 s 为参考点时， y 的位置

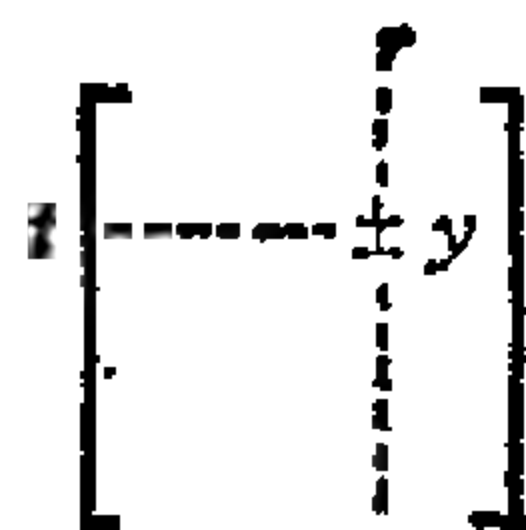


图8-1-9 当 $u = s$ 且 s 为参考点时， y 的位置

假定 $u = s$ ，且 s 是参考点，那么我们可以看出，第 u 列和第 s 行都不存在，因而仅有一个元素 (t, r) 有导纳 y (见图8-1-9)。

容易看出，一个给定的节点导纳矩阵能表示成若干个矩阵之和，其中每个矩阵恰好含有一种导纳。例如，我们可以把下面的节点导纳矩阵表示成几个矩阵之和：

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc}
& 1 & 2 & 3 \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} y_1 + y_2 & -y_2 - y_3 & y_3 \\ -y_2 + y_4 & y_2 + y_3 + y_5 & -y_3 \\ 0 & -y_5 & y_5 + y_6 \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
+ & \begin{bmatrix} y_2 & -y_2 & 0 \\ -y_2 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -y_3 & y_3 \\ 0 & y_3 & -y_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ y_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
+ & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_5 & -y_5 \\ 0 & -y_5 & y_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_6 \end{bmatrix}
\end{array}
\end{array}$$

其中每一个矩阵仅含一种导纳，由这些矩阵我们能看出，哪一个是似无源元件，哪一个是似有源元件。此处的似有源元件(*active-like element*)是由式(8-1-1)来定义的元件，但它不能用一条边来表示。并且，每一个导纳的电压边和电流边的位置可以容易得到。在这个例子中，第一，第二，第五和第六个矩阵表明 y_1 , y_2 , y_5 和 y_6 是似无源导纳，而 y_3 和 y_4 是似有源导纳。从这些矩阵我们能得到一个网络的线图，其导纳矩阵与上面给出的矩阵相同，如图8-1-10所示。当然，并不一定要把一个给定的导纳矩阵变换成一些矩阵的和才能得到这些信息。

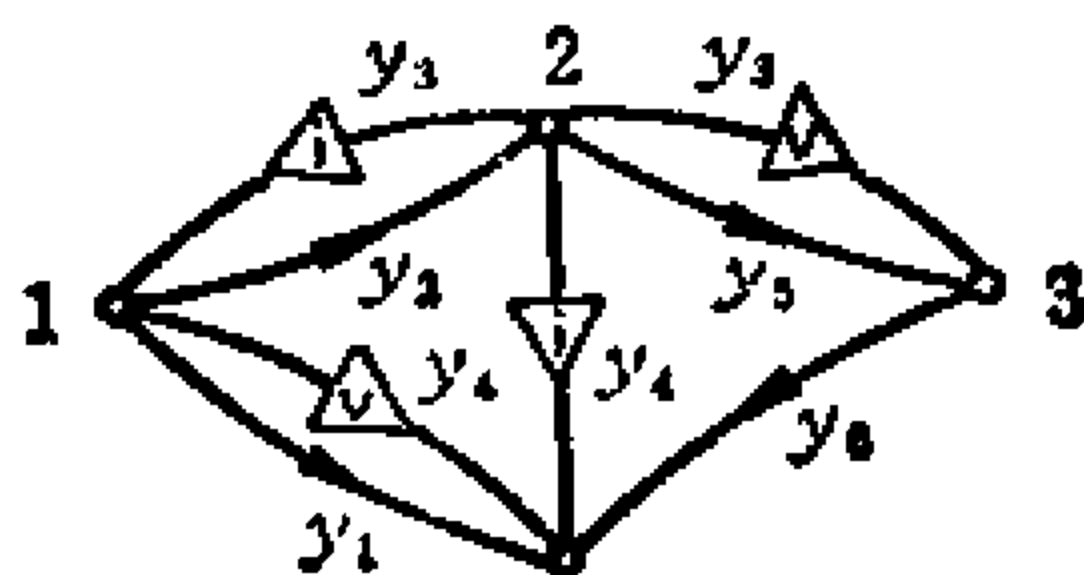


图8-1-10 一个网络

考虑一个由下式给出的变压器：

$$\begin{bmatrix} \frac{L_{22}}{s\Delta_m} & \frac{-M_{12}}{s\Delta_m} \\ \frac{-M_{21}}{s\Delta_m} & \frac{L_{11}}{s\Delta_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11'} \\ v_{22'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{11'} \\ i_{22'} \end{bmatrix} \quad (8-1-10)$$

其中

$$\Delta_m = \begin{bmatrix} L_{11} & M_{12} \\ M_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \quad (8-1-11)$$

这样一个变压器的拓扑表示由图8-1-11给出。对于图8-1-12中的

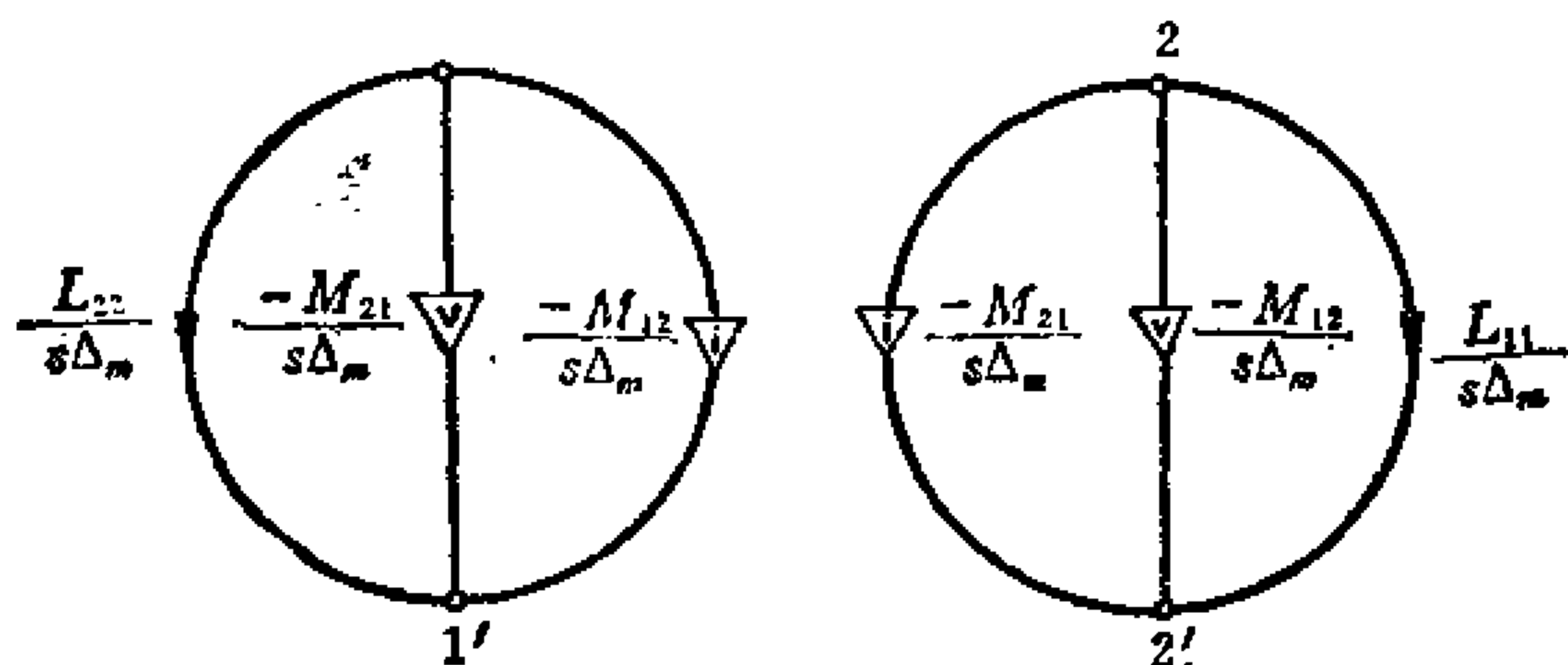


图8-1-11 一个变压器的拓扑表示

晶体管的等效电路，其拓扑表示如图8-1-13所示。另一个例子是图8-1-14中网络的线图，其拓扑表示如图8-1-15所示，其中 g'_1

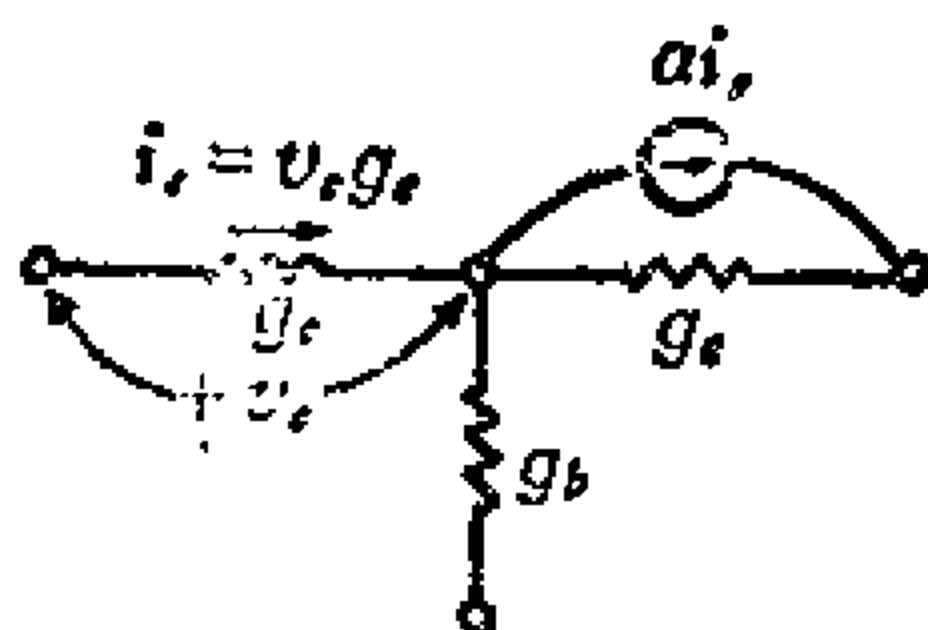


图8-1-12 一个晶体管的等效电路

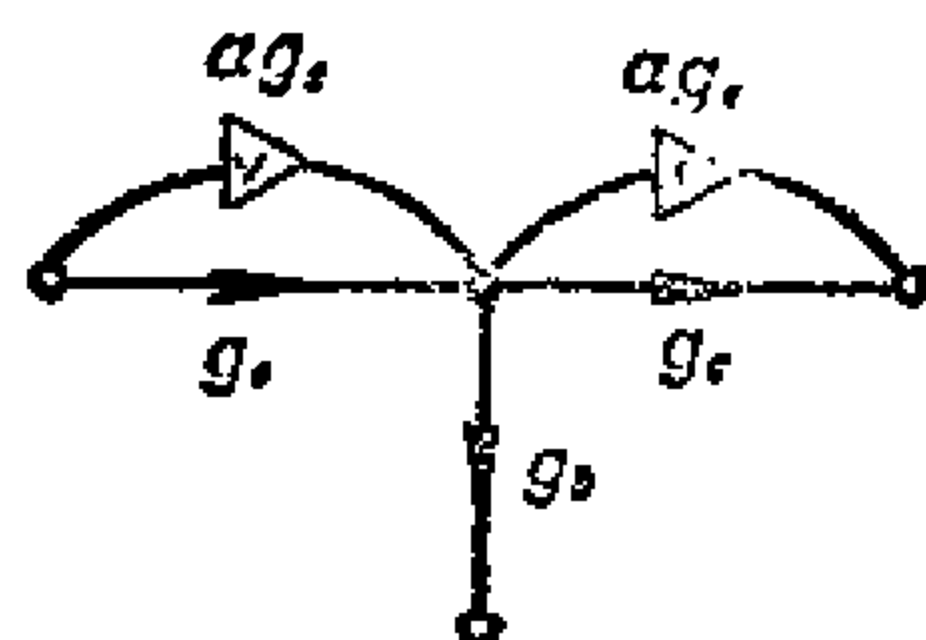


图8-1-13 一个晶体管的拓扑表示

$= \alpha g_1, y_1 = L_2/s\Delta_m, y_2 = y_3 = -M_{12}/s\Delta_m, y_4 = L_1/s\Delta_m$ 。注意，即使 y_2, y_3 的导纳值是相同的，我们还是用 y_2 和 y_3 来区分不同的导纳。还要注意，对于图中所有的似无源元件，我们给出的方向是任意的。

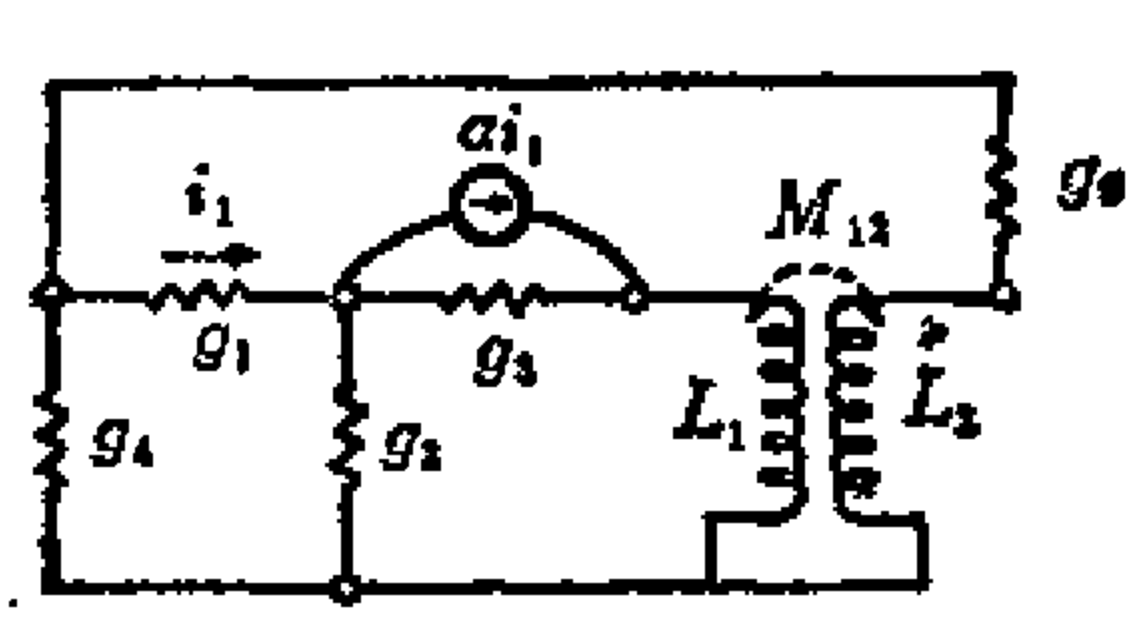


图8-1-14 一个含有晶体管的网络

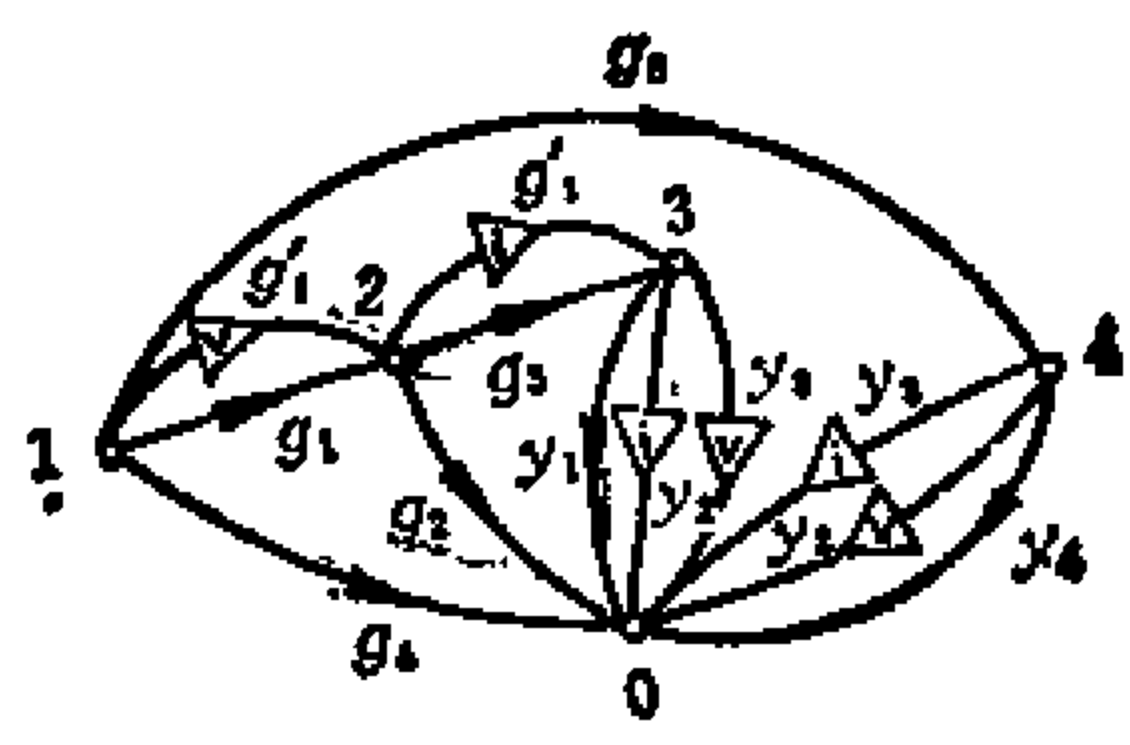


图8-1-15 与图8-1-14中网络对应的线图

考虑一个象图8-1-15那样对应一个网络的线图。每个导纳用两条边来表示，一条是电压边，另一条是电流边。由定义，对于一个似无源导纳，可以用一条边来同时表示电压边和电流边。因此，我们可以作出两个线图 G_v 和 G_i ，使 G_v 由 G 中所有的电压边及所有的顶点构成，而 G_i 由 G 中所有的电流边及所有的顶点构成。注意，如果在 G_v 中有一个导纳 y ，则在 G_i 中也有导纳 y ，反之亦然。

定义8-1-2 设 G 是表示一个网络的线图，线图 G_v 由 G 中所有的电压边组成，称为电压图。线图 G_i 由 G 中所有的电流边组成，称为电流图。

由于在电压图 G_v 中，没有电流边，故每一条边的箭头不必再用符号 v 。这样， G_v 中的每一条边可以画得象似无源元件的边一样。同理，电流图 G_i 中每条边也可以不用画上符号 i 。例如，图8-1-15中线图的电压图和电流图，如图8-1-16所示。值得注意，当网络仅由似无源导纳组成时，其电压图和电流图是完全

相同的。

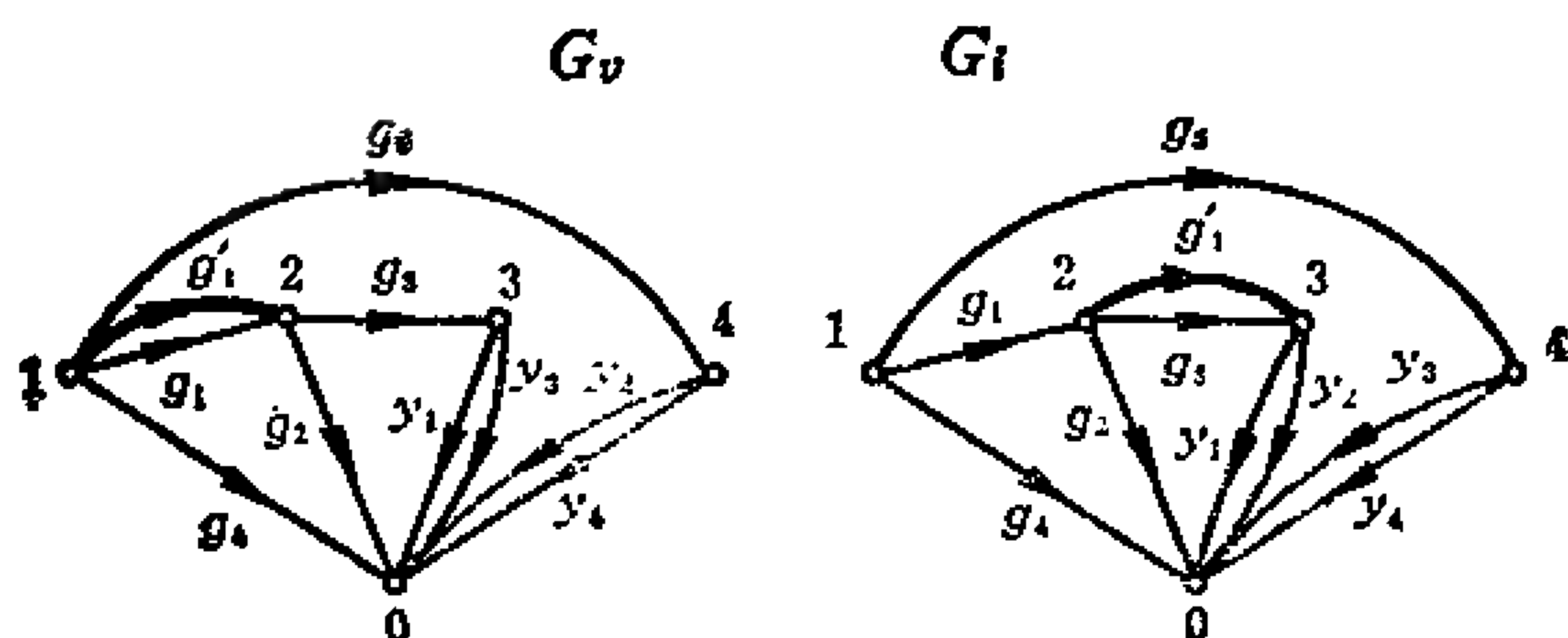


图8-1-16 图8-1-15中线图的对应电压图 G_v 及电流图 G_i

在网络中的每一个导纳都满足式(8-1-1)，因此

$$\begin{aligned} y_1 v'_1 &= i'_1 \\ y_2 v'_2 &= i'_2 \\ &\dots \\ y_c v'_c &= i'_c \end{aligned} \quad (8-1-12)$$

或者写成

$$Y V_c = I_c \quad (8-1-13)$$

其中

$$V_c = \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_c \end{bmatrix} \quad (8-1-14)$$

$$I_c = \begin{bmatrix} i'_1 \\ i'_2 \\ \vdots \\ i'_c \end{bmatrix} \quad (8-1-15)$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & & & 0 \\ & y_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & y_n \end{bmatrix} \quad (8-1-16)$$

因为克希霍夫电流定律是对于一个网络的电流约束而不是电压约束，所以式(7-1-2)中的关联矩阵（或割集矩阵）必为网络的电流图的关联矩阵。设 A_i 是电流图 G_i 的关联矩阵，则式(7-1-2)变成

$$A_i I_c = 0 \quad (8-1-17)$$

利用式(8-1-13)，得到

$$A_i Y V_c = 0 \quad (8-1-18)$$

因为式(7-3-8)所定义节点变换是电压之间的关系而不是电流之间的关系，故式(7-3-8)中的关联矩阵（或割集矩阵）必须是电压图的关联矩阵（或割集矩阵）。设 A_v 是电压图 G_v 的关联矩阵，则式(7-3-8)可写成

$$V_c = A_v' V_n \quad (8-1-19)$$

其中 V_n 的每一元素是一个节点电压。利用式(8-1-18)，得

$$A_i Y A_v' V_n = 0 \quad (8-1-20)$$

其中 $A_i Y A_v'$ 称为有源网络的节点导纳矩阵。

运用比内-柯西定理，节点导纳矩阵的行列式可表示为

$$|A_i Y A_v'| = \sum (A_i Y \text{ 的大子式}) \times (A_v' \text{ 对应的大子式}) \quad (8-1-21)$$

由于 Y 是对角矩阵，故式(8-1-21)能写成

$$|A_i Y A_v'| = \sum y_{k_1} y_{k_2} \cdots y_{k_m} |A_i(k_1 k_2 \cdots k_m)| |A_v'(k_1 k_2 \cdots k_m)| \quad (8-1-22)$$

其中 $A_i(k_1 k_2 \cdots k_m)$ 是由 A_i 中列 k_1, k_2, \cdots, k_m 组成的子矩阵， $A_v'(k_1 k_2 \cdots k_m)$ 是由 A_v' 中列 k_1, k_2, \cdots, k_m 组成的子矩阵，这里 m 是 A_i (及 A_v') 的行数，对于 n_v 个顶点的连通线图来讲， $m = n_v - 1$ 。

我们已经知道, $A_i(k_1 k_2 \cdots k_m)$ 是非奇异的, 当且仅当与列 k_1, k_2, \cdots, k_m 对应的边是 G_i 的一个树 (在分离线图的情况下必定是林). 同样, $A_o(k_1 k_2 \cdots k_m)$ 是非奇异的, 当且仅当与列 k_1, k_2, \cdots, k_m 对应的边构成 G_o 的一个树. 这样, 要使 $A_i(k_1 k_2 \cdots k_m)$ 和 $A_o(k_1 k_2 \cdots k_m)$ 都是非奇异的, 权为 $y_{k_1}, y_{k_2}, \cdots, y_{k_m}$ 的边在 G_i 和 G_o 中都必须是一个树. 这样的边集合叫做完全树 (或者叫公共树).

定义8-1-3 完全树是一个边的集合, 它既是电压图的树, 又是电流图的树.

用这个定义, 可将式(8-1-22)表示为

$$|A_i Y A_o'| = \sum_{(k)} \epsilon_k \times (\text{完全树树枝导纳乘积}) \quad (8-1-23)$$

其中

$$\epsilon_k = |A_i(k_1 k_2 \cdots k_m)| |A_o'(k_1 k_2 \cdots k_m)| = \pm 1 \quad (8-1-24)$$

在网络由似无源元件构成的情况下, 我们可以看出, 式(8-1-23)中的完全树变成了通常的树, 而 ϵ_k 总是 +1. 然而, 对于包含似有源元件的网络, 我们可以看出, 对于一个完全树, ϵ_k 或为 +1, 或为 -1. 因此, 对于每一个完全树, 我们必须找出某种计算 ϵ_k 的方法.

8-2 符号置换

我们现在会看到, 完全树的符号置换就是式(8-1-24)中的符号 ϵ_k . 为了研究符号置换, 我们要定义主点如下.

定义8-2-1 设 G_i 是连通有向图 G 的一个树. 设 u 和 v 是 G_i 中边 y 的端点, 如果在 u 和参考点之间的路径含有边 y , 则称顶点 u 为边 y 的主点.

因为一个树是连通图, 且不含回路, 所以在树中任两顶点之

间恰有一条路径. 这样, 如果从顶点 u 到参考点的路径包含边 y , 那么, 从顶点 v 到参考点的路径就不包含边 y . 由此可知, 一条边的两个端点中正好有一个是这条边的主点. 例如, 图8-2-1中 G_i 的每条边的主点如表8-2-1所示. 注意, 参考点不是任何一条边的主点. 既然 G_i 是一个树, 故任何一个顶点恰好是一条边的主点.

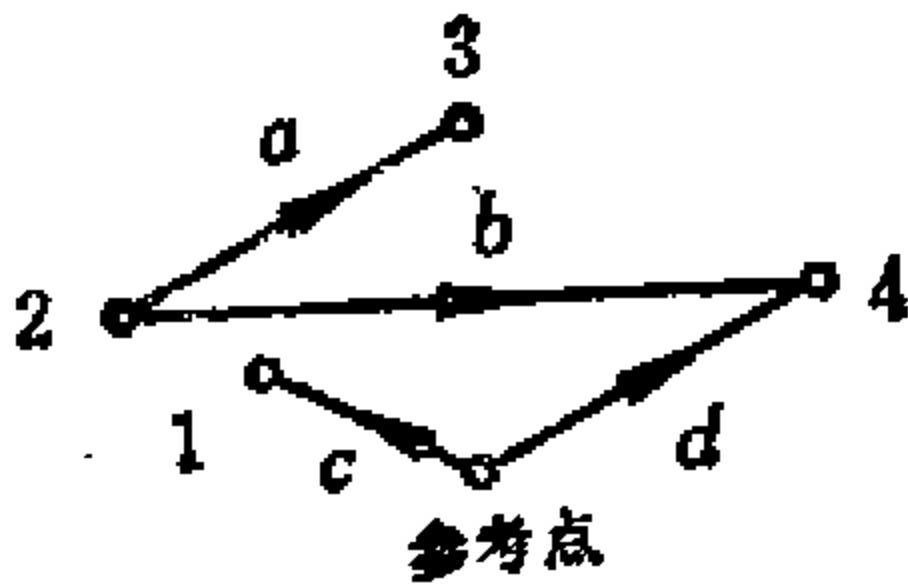


图8-2-1 树 G_i

表8-2-1 主 点	
边	主 点
a	3
b	2
c	1
d	4

假定 G_i 和 G_u 是两个线图, 每个图代表一个树, 且二者均由相同的导纳构成, 如图8-2-2所示. 那么, 对于每条边来说, 存在着两个主点, 一个来自 G_i , 另一个来自 G_u . 例如, 图8-2-2中的 G_i 和 G_u 的边的每一对主点如表8-2-2所示.

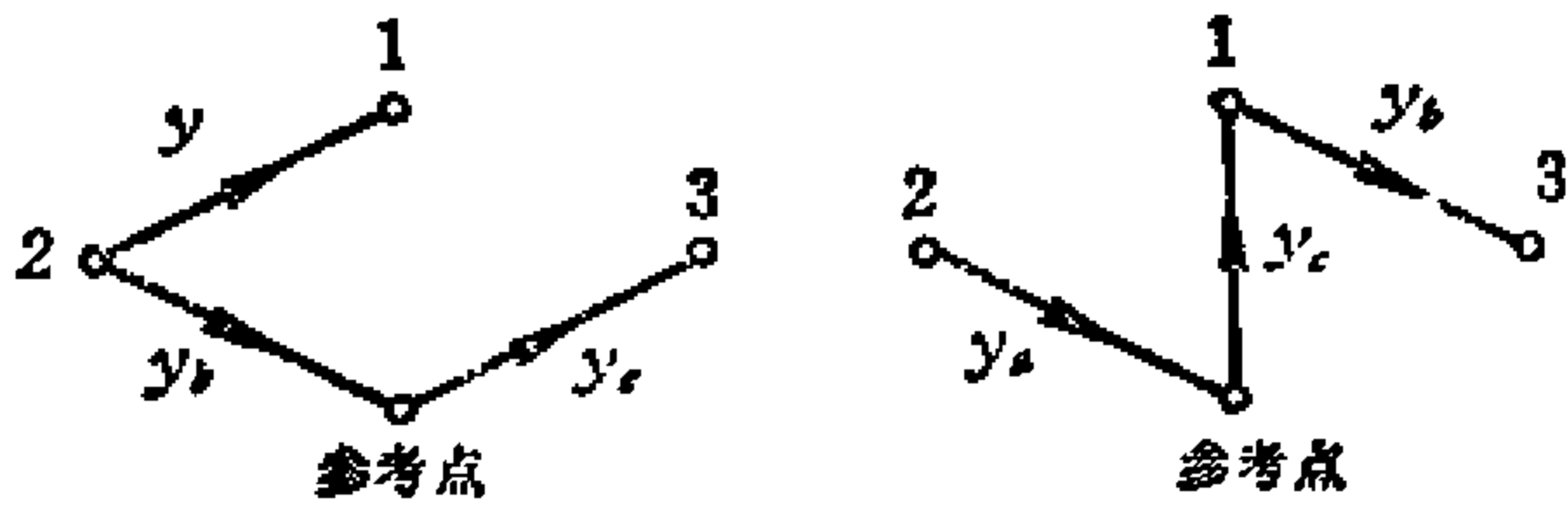


图8-2-2 线图 G_i 和 G_u

现在, 我们可以对由相同导纳组成的两个树 G_i 和 G_u 相对应的符号置换下定义.

表8-2-2

主 点 对

边	主 点	
	G_1	G_2
y_a	1	2
y_b	2	3
y_c	3	1

定义8-2-2 设 G_1 和 G_2 是两个连通有向图，它们由相同的边和相同的顶点组成，且都不含回路。则 G_1 和 G_2 的符号置换是具有下列特征的两行数组：

1. 对 $p = 1, 2$ ，行 p 表示 G_p 。

2. 每一列表示一个主点。

3. 对 $p = 1, 2$ ，元素 (p, q) 是：

y —— 如果顶点 q 是 y 的主点，且在 G_p 中 y 的方向是离开 q 的。

y^- —— 如果顶点 q 是 y 的主点，且在 G_p 中 y 的方向是指向 q 的。

例如，图8-2-2中对应 G_1 和 G_2 的边集合的符号置换 (SP) 如下：

$$SP = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 \\ \begin{matrix} G_1 \\ G_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} y_a^- & y_b & y_c^- \\ y_c^- & y_a & y_b^- \end{pmatrix} \end{matrix}$$

定义8-2-3 如果以下数量之和是偶数，我们就说符号置换是偶数，否则，我们说它是奇数：

1. 符号置换中负上标的个数。

2. 把第二行重排使其与第一行相同所需的对换次数。

根据这个规则，上例中的符号置换是偶数。

定义3-2-4 如果符号置换是偶数，则符号置换的值是 + 1，否则是 - 1。

例如上例中的符号置换是偶数，所以此符号置换的值（记为 $V[SP]$ ）是

$$V\left[\begin{pmatrix} y_a^- & y_b & y_c^- \\ y_c^- & y_a & y_b^- \end{pmatrix}\right] = 1$$

8-3 主 树

为了说明一个完全树的符号置换的值就是式 (8-1-23) 中的 σ_k ，我们先来研究称为主树的一对特殊树的符号置换，然后，我们再说明，当一个完全树变换成一对主树时，符号置换的值是不变的。

图8-3-1中所示的树的结构称为主树*。换句话说，如果一个树的所有边 y_1, y_2, \dots, y_m 都与参考点相连，而且每条边的方向不加限制，这样的树叫做主树。

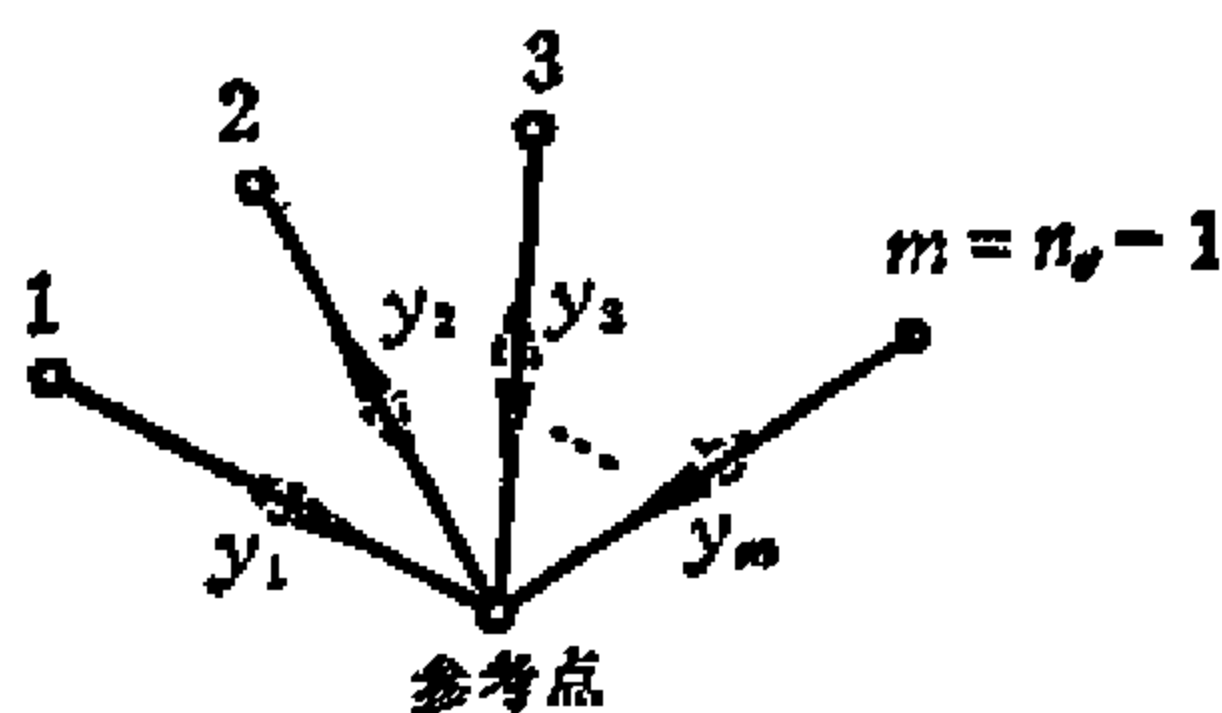


图8-3-1 一个主树

考虑一个主树的关联矩阵 A_p ，我们知道， A_p 是 $n_v - 1$ 阶，且是非奇异的，这里 n_v 是树的顶点数。因为每一条边的两个端点之中，有一个是参考点，故 A_p 的每一列只有一个非零元，或为 + 1，或为 - 1。并且，

由一条边的主点的定义，我们可以说， A_p 中对应于边 y 的非零元的位置，是在代表 y 的列与代表 y 的主点的行的交叉处。最

* 有些图论著作中把主树称为星树 (star tree)。——译注

后，因为 A_p 是一个关联矩阵，由此可知， A_p 的行列式不是 $+1$ ，就是 -1 。图8-3-1中主树的关联矩阵 A_p 如下：

$$A_p = \begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_m \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ m \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (8-3-1)$$

交换这个矩阵中的两行， A_p 的行列式就改变符号。假定边 y_k 的主点是 v ，边 y_p 的主点是 u ，则在 A_p 的 (v, k) 处有 ± 1 ， (u, p) 处有 ± 1 。交换行 v 和行 u ，则 (v, k) 处的 ± 1 变到 (u, k) 处，而 (u, p) 处的 ± 1 变到 (v, p) 处。这意味着将边 y_k 的主点变成顶点 u ，而将边 y_p 的主点变成顶点 v 。因此，这一交换等价于边 y_k 和 y_p 位置的交换。例如，交换上述矩阵的第一行和第二行，得到以下矩阵：

$$A'_p = \begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_m \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ m \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (8-3-2)$$

这个新矩阵 A'_p 是把图8-3-1的主树中 y_1 和 y_2 位置交换后得到的关联矩阵。因此，在一个主树中，边的位置交换次数 N ，使 A_p 的行列式受 $(-1)^N$ 的影响。

将 A_p 的一列乘以 -1 ，等价于改变对应于此列的边的方向，例如，列 y_2 乘以 -1 得

$$A_p'' = \begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_m \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ m \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (8-3-3)$$

这个新矩阵 A_p'' 是在图8-3-1中正好把 y_2 的方向颠倒后得到的主树的关联矩阵。

假定在一个主树中有 M 条边，其方向是离开参考节点的。我们将对应的列乘以 -1 ，使这些边的方向都改变，则主树的关联矩阵 A_p 的所有非零元素都变成正值了。设这样所得的矩阵是 A_p'' ，那么 A_p 的行列式等于 A_p'' 的行列式乘上 $(-1)^M$ 。例如，考虑图8-3-2所示主树的关联矩阵 A_p ：

$$A_p = \begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

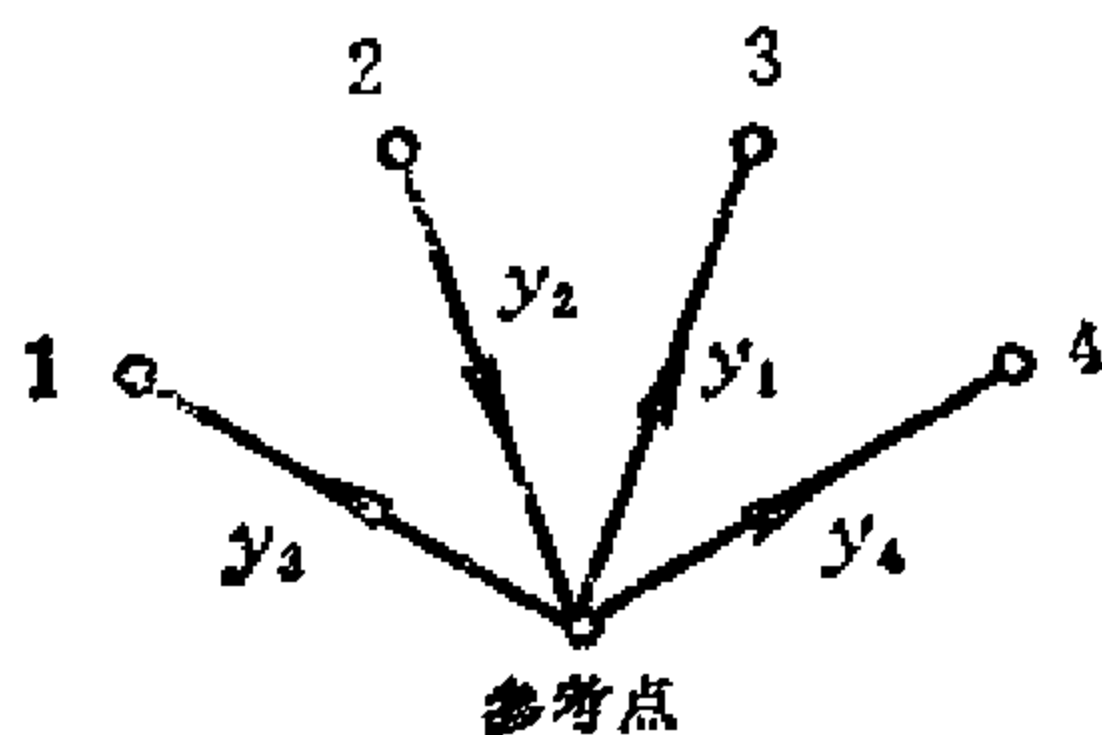


图8-3-2 一个主树

将列 y_1, y_3, y_4 乘上 -1 , 这相当于颠倒边 y_1, y_3 和 y_4 的方向, 我们得到一个新的关联矩阵 A_p'' :

$$\begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

因此

$$|A_p| = (-1)^3 |A_p''|$$

考虑图8-3-3所示的两个主树 t_i 和 t_o , 其中 t_i 和 t_o 由相同导纳 (边权) 组成。设 A_{t_i} 和 A_{t_o} 分别为 t_i 和 t_o 的关联矩阵, 为使每一个非零元素都为正, 用 -1 去乘 A_{t_i} 和 A_{t_o} 的列, 其次数分

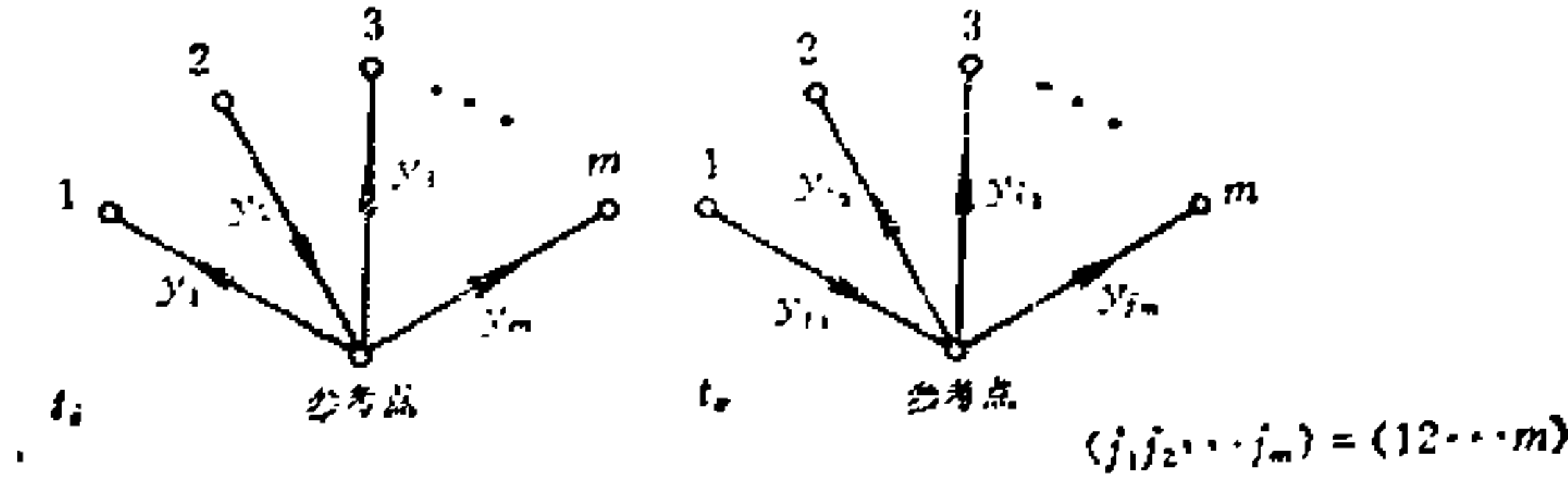


图8-3-3 一对主树

别设为 M_i 和 M_o , 而 A_{t_i}' 和 A_{t_o}' 是所得的关联矩阵, 则

$$|A_{t_i}| |A_{t_o}| = (-1)^{M_i + M_o} |A_{t_i}'| |A_{t_o}'| \tag{8-3-4}$$

要使 t_o 中每一条边的位置与树 t_i 中对应边 (即具有相同权的边) 的位置相同, t_o 中边的位置需要改变的次数为 N , 则 A_{t_o}' 的行列式等于 $(-1)^N$ 乘 A_{t_i}' 的行列式, 或

$$|A_{t_o}'| = (-1)^N |A_{t_i}'| \tag{8-3-5}$$

于是, 连同式(8-3-4), 得

$$|A_{t_i}| |A_{t_o}| = (-1)^{M_i + M_o + N} |A_{t_i}'|^2 \tag{8-3-6}$$

因为 A'_{i_0} 是一个有向线图的关联矩阵，并且是非奇异的，这样， A'_{i_0} 的行列式不是 +1，就是 -1。故式(8-3-6)变成，

$$|A_{i_1}| |A_{i_0}| = (-1)^{M_i + M_0 + N} \quad (8-3-7)$$

能够看出， $M_i + M_0$ 等于 t_i 和 t_0 的符号置换中的负上标数目，而要使符号置换的两行变成相同时，其中一行交换的次数等于 N 。因此 $(-1)^{M_i + M_0 + N}$ 等于 t_i 和 t_0 的符号置换值，即

$$(-1)^{M_i + M_0 + N} = V[t_i \text{ 和 } t_0 \text{ 的 } SP] \quad (8-3-8)$$

这里的 t_i 和 t_0 是主树。

考虑一个与完全树对应的导纳集合 (y_1, y_2, \dots, y_m) ，也就是说，在电流图中边 y_1, y_2, \dots, y_m 构成一个树 t_i ，同时，它们也构成电压图 G_0 中一个树 t_0 。设 $A_i(12 \dots m)$ 和 $A_0(12 \dots m)$ 分别为 t_i 和 t_0 的关联矩阵，因此 $A_i(12 \dots m)$ 是电流图 G_i 的关联矩阵 A_i 的子矩阵， $A_0(12 \dots m)$ 是电压图 G_0 的关联矩阵 A_0 的子矩阵。我们将要说明即使 t_i 和 t_0 不是主树， $A_i(12 \dots m) \cdot A_0(12 \dots m)$ 的行列式也等于 t_i 和 t_0 的符号置换值。为了说明这一事实，我们首先说明，可以对一个树的关联矩阵 A_i 作初等运算，来把任何一个树变成一个主树，而不影响其行列式 ν 。

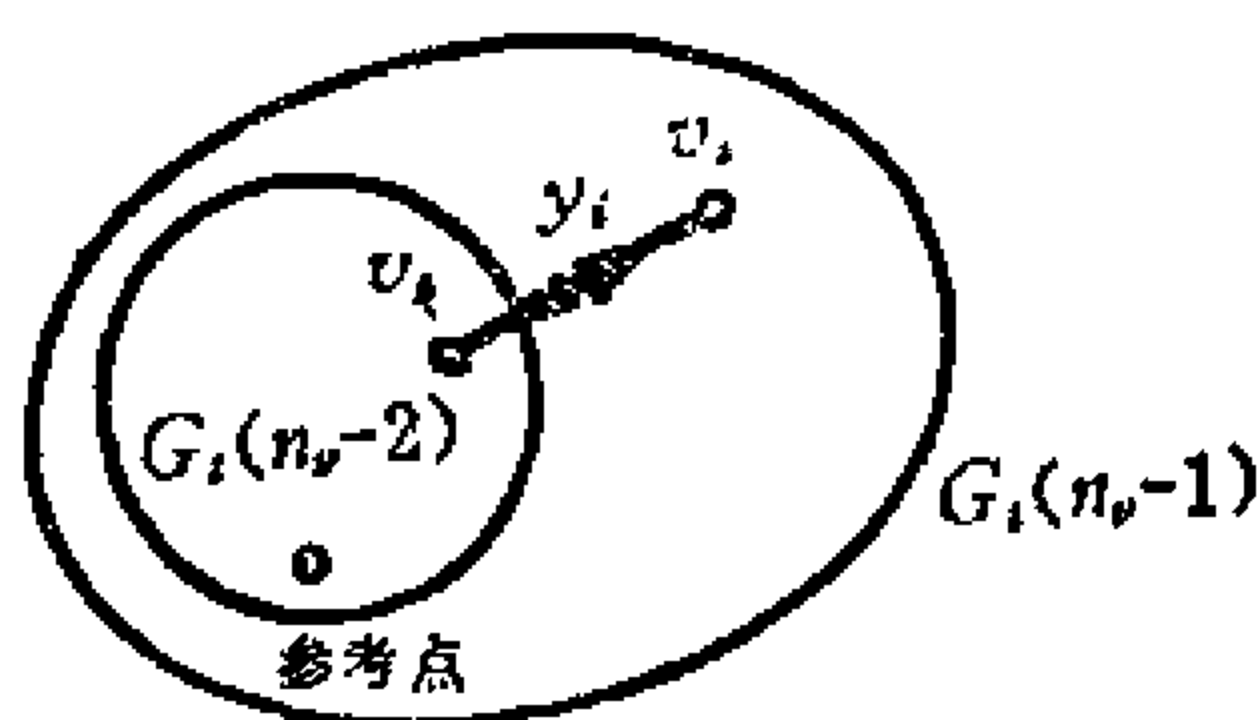


图8-3-4 树 $G_i(n_v - 1)$

设 $G_i(n_v - 1)$ 是代表一个树的线图，它包含 n_v 个顶点，这样， $G_i(n_v - 1)$ 包含 $n_v - 1$ 条边且无回路。因为 $G_i(n_v - 1)$ 是树，其中至少有两个顶点度数为 1，这已在前面学过。设这两个顶点中不是参考点的一个是 v_i ，

而边 y_i 与顶点 v_i 相连。注意，因为 v_i 的度数为 1，这样在 $G_i(n_v - 1)$ 中只有一条边 y_i 与 v_i 相连。

设 v_k 是 y_i 的另一个端点，如图8-3-4所示。考虑 $G_i(n_v - 1)$

的关联矩阵 A_i , 因为 y_i 是连接顶点 v_i 的唯一的一条边, 并且 v_i 不是参考点, 所以 A_i 中与 v_i 对应的行只在与 y_i 对应的列处有一个非零元素, 如下所示:

$$A_i = \begin{matrix} & y_1 & y_2 & \cdots & y_i & \cdots & y_m \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_k \\ \vdots \\ v_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & & 0 & & \\ & & & 0 & & \\ & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \pm 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & 0 & & \\ & & & \mp 1 & & \\ & & & 0 & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (8-3-9)$$

只要 v_k 不是参考点, 在 (v_k, y_i) 处的元素就是 ∓ 1 , 因为 y_i 是连接顶点 v_i 和 v_k 的。

$$A'_i = \begin{matrix} & y_1 & y_2 & \cdots & y_i & \cdots & y_m \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_k \\ \vdots \\ v_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & & 0 & & \\ & & & 0 & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & 0 & & \\ 0 & 0 & \cdots & \pm 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & 0 & & \\ & & & 0 & & \\ & & & 0 & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (8-3-10)$$

把行 v_i 加到行 v_k 上, 就可以消去 (v_k, y_i) 处的 ∓ 1 . 注意, 在这一运算下, A_i 的行列式没有改变. 另一方面, 这样得到的矩阵 A'_i 是一个树的关联矩阵, 这个树除了 y_i 是连接顶点 v_i 和参考点 (而不是顶点 v_k) 之间的边外, 其余与 $G_i(n_v-1)$ 相同, 如图8-3-5所示. 再注意, 在 $G_i(n_v-1)$ 中顶点 v_i 是 y_i 的主点. 如果顶点 v_k 是参考点, 就不必进行如上的运算了.

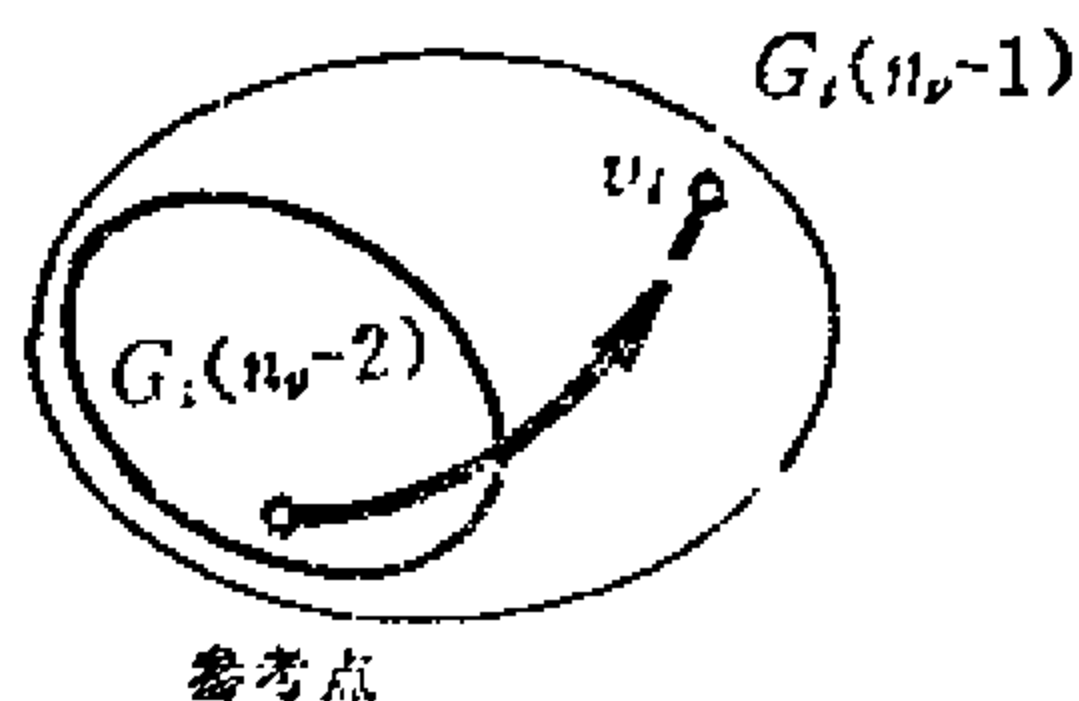


图8-3-5 $G_i(n_v-1)$ 修改后的树

从 $G_i(n_v-1)$ 中取出边 y_i 和顶点 v_i 得到的子图 $G_i(n_v-2)$ 有 n_v-1 个顶点和 n_v-2 条边, 且没有回路. 因此, $G_i(n_v-2)$ 能看成是一个线图的树. 这样, 在 $G_i \times (n_v-2)$ 中, 至少存在两个度数为 1 的顶点, 设 v_i 是这

两个顶点之一, 且不是参考点. 又设边 y_i 是连接到顶点 v_i 的一条边, 假定 y_i 是连接顶点 v_m 和 v_i 之间的边. 注意顶点 v_i 是边 y_i 的主点. 如果 v_m 是参考点, 则 y_i 列只有一个非零元素. 如果 v_m 不是参考点, 那么用上述的运算能把边 y_i 移到参考点, 而不改变这个树的关联矩阵的行列式.

连续进行这样的过程, 我们可以把一个树变成一个主树, 而不改变这个树的关联矩阵的行列式. 并且, 树中的每一条边被移到这条边的主点和参考点之间. 假定, 把一个给定的树经由这一过程得到的主树叫做给定树的对应主树, 那么我们可以看出, 一个树的关联矩阵的行列式等于对应主树关联矩阵的行列式.

定理8-3-1 设 $y_{k_1}, y_{k_2}, \dots, y_{k_m}$ 是一个完全树的边, 其中 $t_i = (y_{k_1} y_{k_2} \dots y_{k_m})$ 是电流图 G_i 的一个树, $t_v = (y_{k_1} y_{k_2} \dots y_{k_m})$ 是电压图 G_v 的一个树. 又设 $A_i(k_1 k_2 \dots k_m)$ 是 t_i 的关联矩阵, $A_v(k_1 k_2 \dots k_m)$ 是 t_v 的关联矩阵, 两者的参考点是相同的. 那么

$$\sigma_k = |A_i(k_1 k_2 \cdots k_m)| + |A_o'(k_1 k_2 \cdots k_m)| = V[t_i \text{ 和 } t_o \text{ 的 } SP] \quad (8-3-11)$$

因为我们能直接从 t_i 和 t_o 得到每一条边的主点, 所以我们可以直接从 t_i 和 t_o 的符号置换求出 σ_k , 而不必把它们变成主树.

显然, 如果一个完全树仅包含似无源元件, 那么 $A_i(k_1 k_2 \cdots k_m)$ 和 $A_o(k_1 k_2 \cdots k_m)$ 是相同的.

规则 如果一个完全树仅包含似无源元件, 那么此完全树的 σ_k 是 $+1$.

例8-3-1 考虑图8-3-6所示的线图 G , 我们可以得到电流图

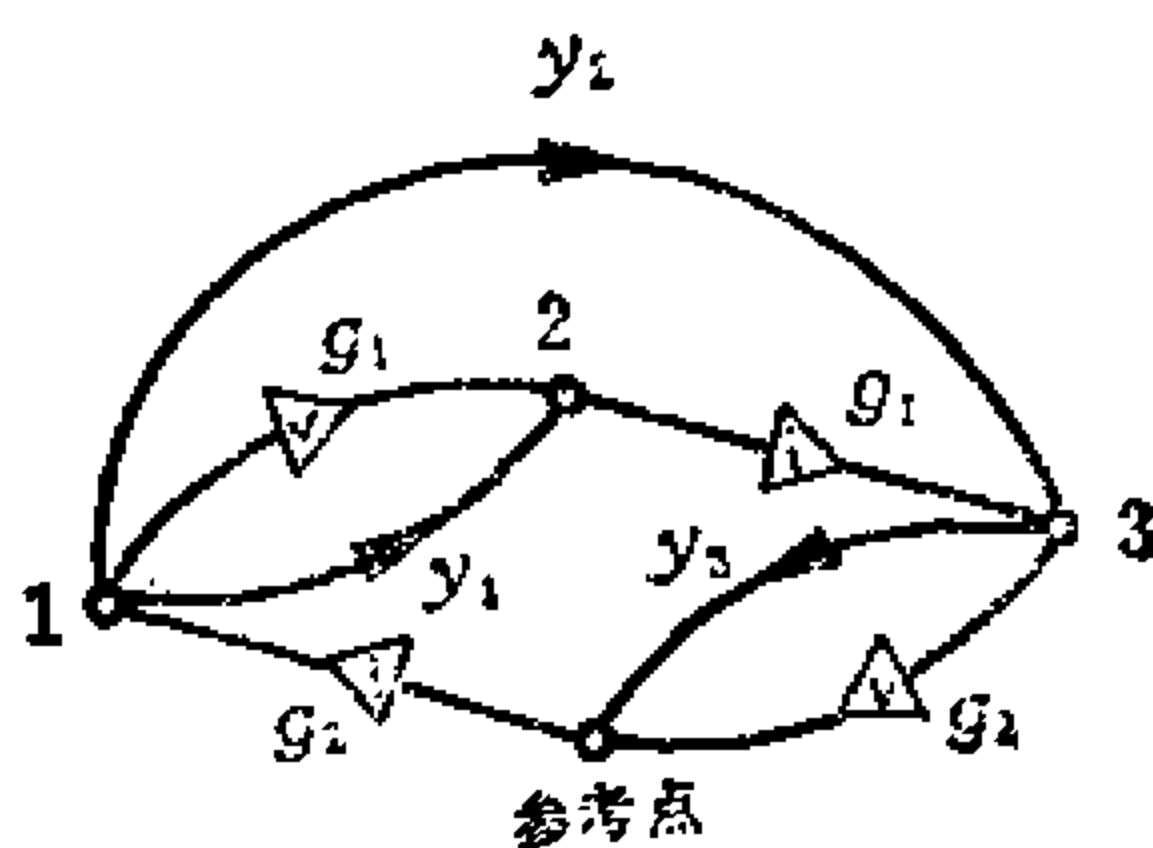


图8-3-6 线图 G

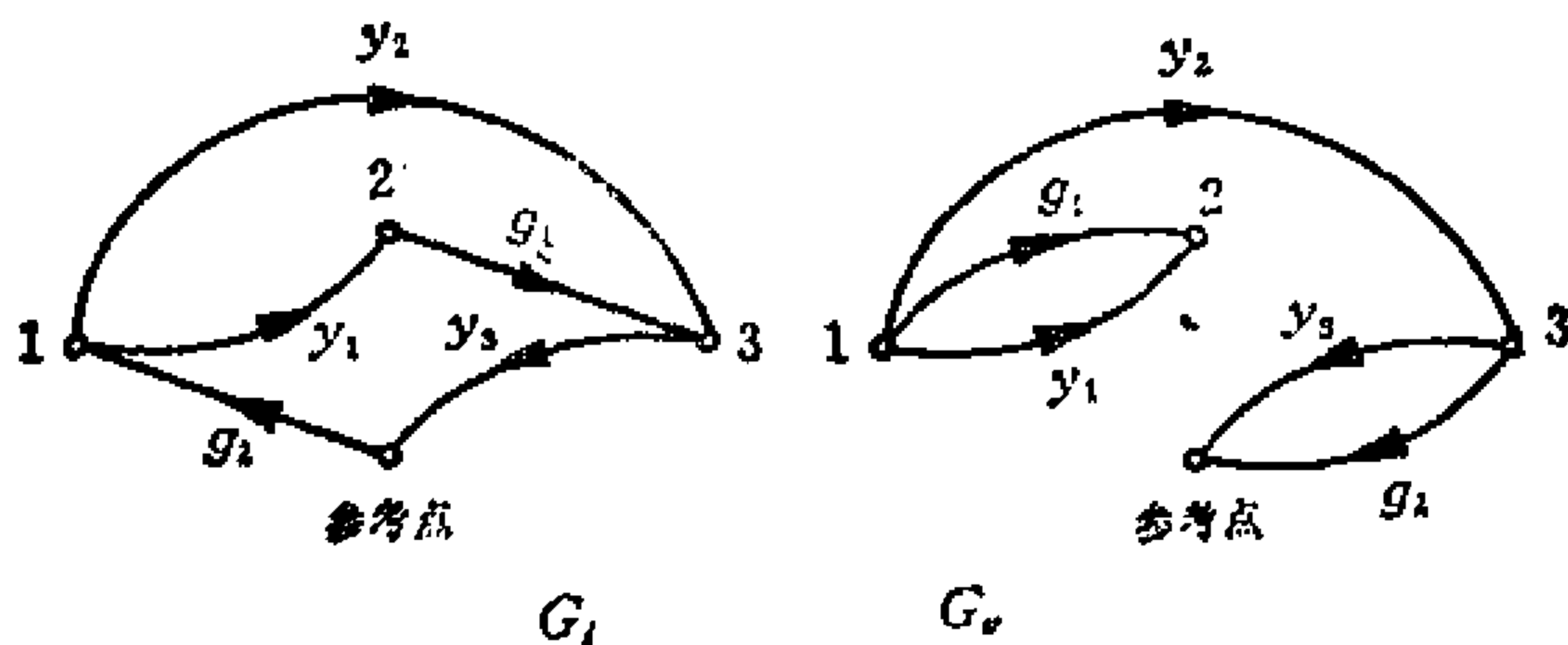


图8-3-7 电流图和电压图

G_i 和电压图 G_v ，如图8-3-7所示，从这些图能求出所有的完全树和每一个完全树的符号，如表8-3-1所示。因此

$$|A_i Y(A_v)^t| = y_1 y_2 y_3 - y_1 y_2 g_2 - y_2 y_3 g_1 + y_2 g_1 g_2$$

表8-3-1 完 全 树 及 其 符 号

G_i 的树	G_i 的树是 否也是 G_v 树的?	符号	$V[SP]$
$y_1 y_2 y_3$	是	+1	仅有似无源元件
$y_1 y_2 g_2$	是	-1	$V \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ t_i & \begin{pmatrix} g_2^- & y_1^- & y_2^- \\ y_2 & y_1^- & g_2 \end{pmatrix} \\ t_v & \end{bmatrix} = -1$
$y_1 g_1 y_3$	否		
$y_1 g_1 g_2$	否		
$y_2 y_3 g_1$	是	-1	$V \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ t_i & \begin{pmatrix} y_2 & g_1 & y_3 \\ y_2 & g_1^- & y_3 \end{pmatrix} \\ t_v & \end{bmatrix} = -1$
$y_2 y_3 g_2$	否		
$y_2 g_1 g_2$	是	+1	$V \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ t_i & \begin{pmatrix} g_2^- & g_1 & y_2^- \\ y_2 & g_1^- & g_2 \end{pmatrix} \\ t_v & \end{bmatrix} = 1$
$y_3 g_1 g_2$	否		

8-4 开路策动点函数

在前面章节里，我们已经研究过节点导纳矩阵的行列式的拓扑公式，要求出开路策动点导纳函数的拓扑公式，只要研究节点导纳矩阵的代数余子式 Δ_{ii} 即可。

图8-4-1所示的网络是由一个给定网络 N 和一个连接在 N 的输入点 i 和 o 之间的导纳 y 组成的。设 Δ' 是这个网络的节点导纳矩阵的行列式。



图8-4-1 网络 N 和 y

由式(8-1-23), Δ' 可以写成

$$\Delta' = \sum_{(j)} e_j \times (\text{网络 } N \text{ 连同 } y \text{ 的完}$$

全树 t_j 的树枝导纳乘积) (8-4-1)

这些完全树中, 有一些包含 y 。一些不包含 y 。不包含 y 的完全树就是给定的网络 N 的完全树。因此, 式(8-4-1)能表示成

$$\Delta' = \sum_{(j)} e_j \times (N \text{ 的完全树 } t_j \text{ 树枝导纳乘积}) + \sum_{(j)} e_j \times (\text{含 } y \text{ 的完全树 } t_j \text{ 树枝导纳乘积}) \quad (8-4-2)$$

也就是:

$$\Delta' = V + y W_{(i, o; i, o)} \quad (8-4-3)$$

其中 V 和 $W_{(i, o; i, o)}$ 定义如下。

定义8-4-1

$$V = \sum_{(j)} e_j \times (\text{给定网络 } N \text{ 的完全树 } t_j \text{ 树枝导纳乘积}) \quad (8-4-4)$$

而

$$W_{(i, o; i, o)} = \frac{1}{y} \sum_{(r)} e_r \times (\text{完全树 } t_r(y) \text{ 树枝导纳乘积}) \quad (8-4-5)$$

其中 $t_r(y)$ 是包含 y 的完全树。

现在, 我们可以一般地来定义符号 $W_{(j+k; i, o)}$ 。

定义8-4-2

$$W_{(j,k,i,o)} = \frac{1}{y} \sum_{(k)} e_k \times (\text{完全树 } t_k(y) \text{ 树枝导纳乘积}) \quad (8-4-6)$$

其中 $t_k(y)$ 是包含 y 的完全树。 y 的位置由 $W_{(j,k,i,o)}$ 的下标来表示，也就是说， y 的电流边是从 j 到 k ， y 的电压边是从 i 到 o 。

因为图8-4-1中的网络没有外加电源，故我们有

$$A_i Y(A_v)' V_o = 0 \quad (8-4-7)$$

为了得到非平凡解，

$$|A_i Y(A_v)'| = \Delta' = 0 \quad (8-4-8)$$

因此，据式(8-4-3)，

$$V + y!V_{(i,o,i,o)} = 0 \quad (8-4-9)$$

或

$$-y = \frac{V}{W_{(i,o,i,o)}} \quad (8-4-10)$$

$-y$ 的拓扑表示如图8-4-2所示。由定义可见：

$$-y = \frac{J_i}{v_i} \quad (8-4-11)$$

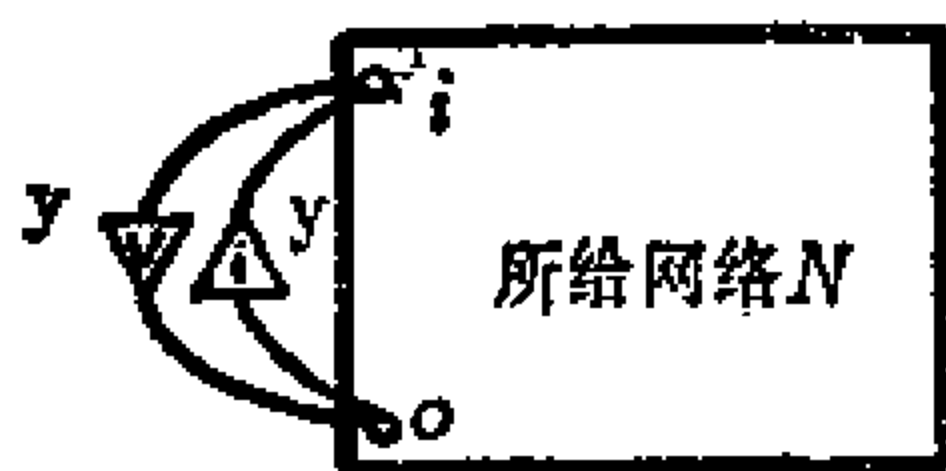


图8-4-2 网络 N 和 y

其中 J_i 是从参考点 o 流入顶点 i 的电流， v_i 是从顶点 i 到参考点 o 的电压。所以 $-y$ 是网络 N 的顶点 i 和 o 之间的开路策动点导纳 $Y_{oi,oi}$ 。这样，式(8-4-10)的右端就给出了顶点 i 和 o 之间的策动点导纳函数的拓扑公式：

$$Y_{oi,oi} = \frac{V}{W_{(i,o,i,o)}} \quad (8-4-12)$$

从式(8-4-6)我们可以看出， $W_{(i,o,i,o)}$ 能由以下步骤得到：

1. 将 y 接在顶点 i 和 o 之间。
2. 找出所有包含 y 的完全树。
3. 确定每一个包含 y 的完全树的符号。
4. 将这些完全树导纳乘积的每一项中的 y 去掉，带上由第 3 步求得的符号，再求代数和，所得的结果即为 $W_{(i+o, i+o)}$ 。

例如，在图8-3-6的 G 中，选取 3 为参考点，按以下步骤求出 $W_{(1+3, 1+3)}$ ：

1. 将 y 接到 G 的顶点 1 和 3 上，如图8-4-3所示。

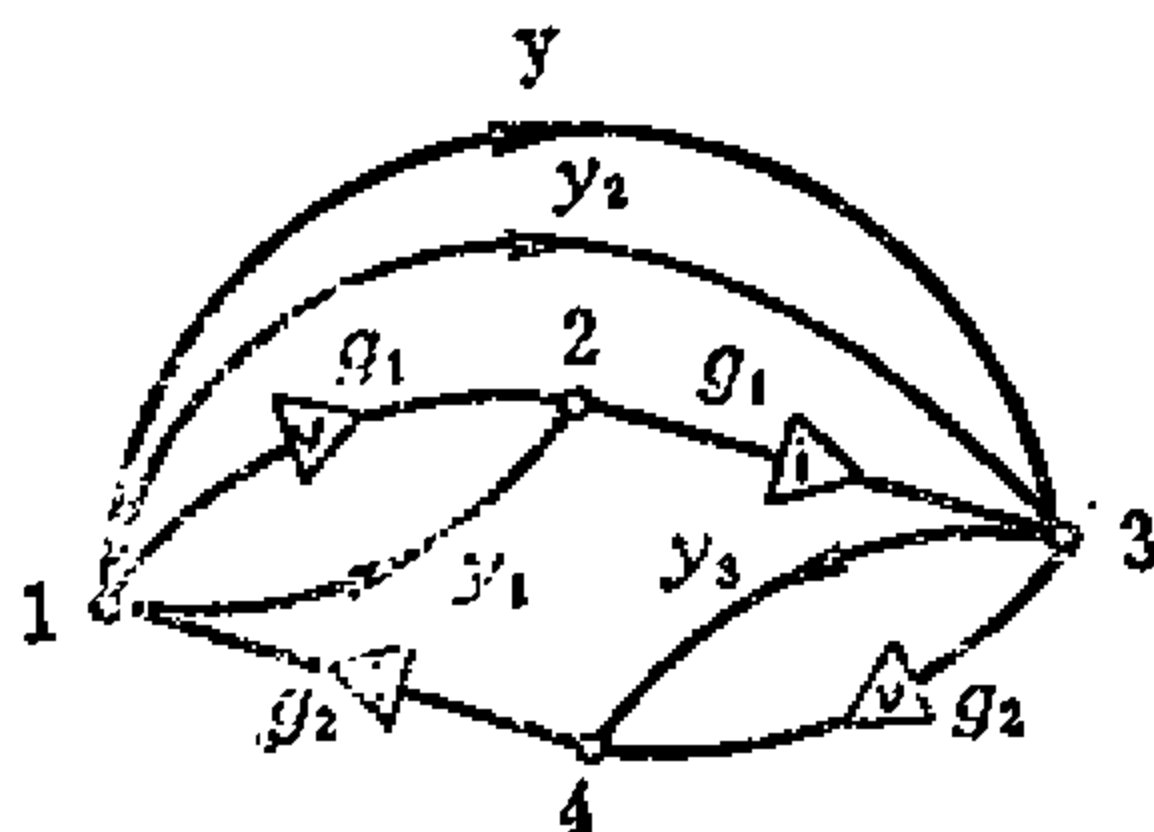


图8-4-3 线图 G 连同顶点 1, 3 之间的 y

2. 求出所得的图的电流图 G_i' 和电压图 G_v' ，如图 8-4-4 所示。

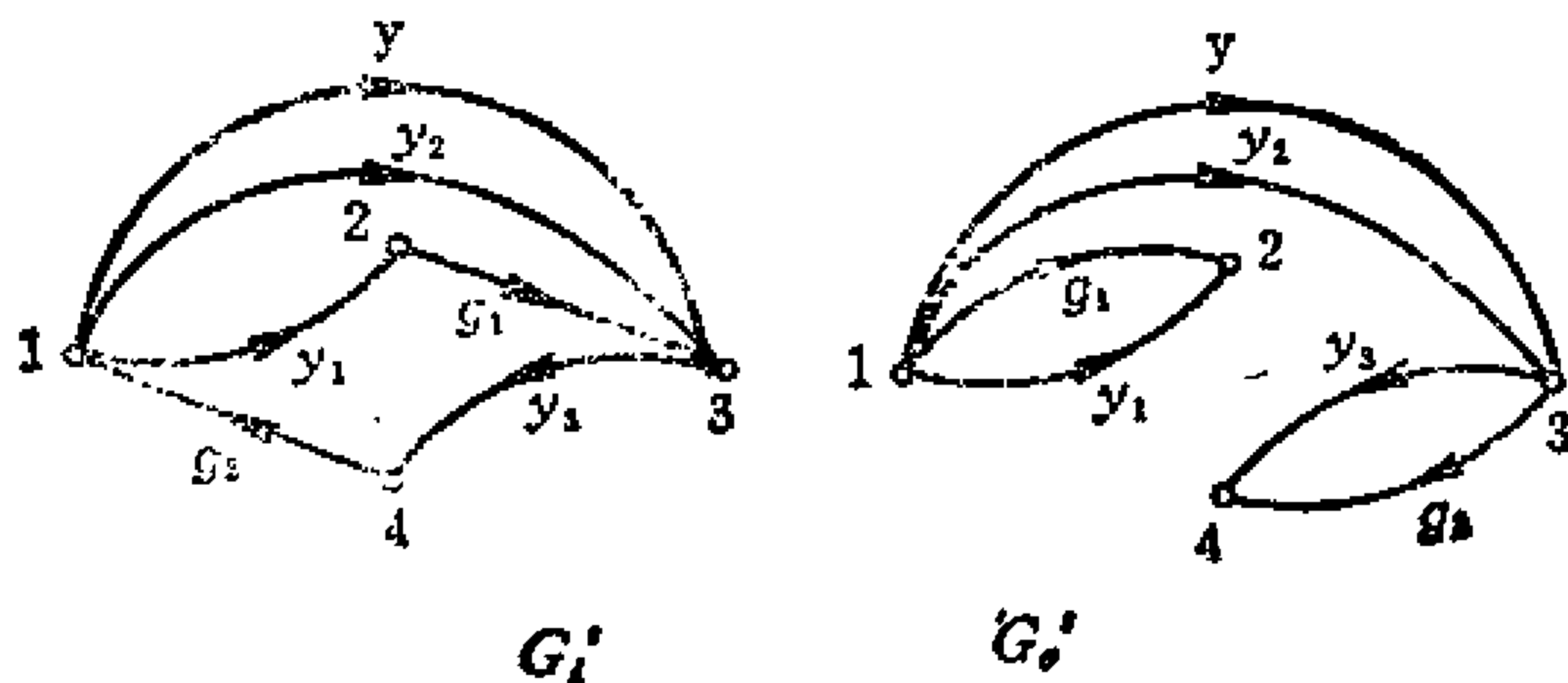


图8-4-4 图8-4-3中线图的电流图和电压图

3. 找出电流图 G' 中所有包含 y 的树:

$$yy_1y_2, yy_1g_2, yy_2g_1, yg_1g_2$$

4. 从第 3 步得到的树中选出也属于电压图 G'' 的树:

$$yy_1y_2, yy_1g_2, yy_2g_1, yg_1g_2$$

5. 确定第 4 步得到的每一个完全树的符号。因为 y 和 y_2 是并联的, 只要用 y 来代替 y_2 , 这些完全树的符号就与表 8-3-1 中的符号相同。

6. 由此得到 $W_{(1,3;1,3)}$:

$$W_{(1,3;1,3)} = y_1y_2 - y_1g_2 - y_2g_1 + g_1g_2$$

我们可以用不同的方法得到同样的结果。显然, 知道了节点导纳矩阵 $A_iY(A_v)'$ 的行列式和代数余子式 Δ'_{pp} , 就能求出开路策动点函数。因为我们已经研究过 $A_iY(A_v)'$ 的行列式, 所以, 我们只要考虑 $A_iY(A_v)'$ 的代数余子式 Δ'_{pp} 即可。同样明显地是

$$\Delta'_{pp} = |A_{i-p}Y(A_{v-p})'| \quad (8-4-13)$$

其中 A_{i-p} 是从 A_i 中删去第 p 行得到的, A_{v-p} 是从 A_v 中删去第 p 行得到的。我们知道, A_{i-p} 是线图 $G_i(p=0)$ 的关联矩阵, 这个线图是从 G_i 合并顶点 p 和参考点 0 得到的。而 A_{v-p} 是由 G_v 合并顶点 p 和参考点 0 得到的线图 $G_v(p=0)$ 的关联矩阵。因此

$$\Delta'_{pp} = \sum_{(T)} g_j \times [G_i(p=0) \text{ 和 } G_v(p=0) \text{ 的完全树树枝导纳乘积}] \quad (8-4-14)$$

设边集合 $(y_{k_1}y_{k_2}\cdots y_{k_m})$ 是 $G_i(p=0)$ 和 $G_v(p=0)$ 的完全树, 则由边 $y_{k_1}, y_{k_2}, \cdots, y_{k_m}$ 构成的子图叫做完全 2-树, 记为 $t_{2,p,\dots}$ 。因为如把顶点 p 和参考点 0 合并, $t_{2,p,\dots}$ 就变成一个完全树, 所以 $t_{2,p,\dots}$ 由两部分组成, 一部分包含顶点 p , 另一部分包含顶点 0 , 并且这两部分含有 G 的所有顶点, 而不含回路。

用完全 2-树的概念, 式 (8-4-14) 能表示为

$$\Delta'_{p,p} = \sum_{(j)} e_j \times (\text{完全2-树 } t_{2,p,o} \text{ 树枝导纳乘积}) \quad (8-4-15)$$

其中 e_j 是考虑到把顶点 p 和 o 合并 (o 是参考点) 的完全2-树的符号置换。显然, 如果我们把边 y 加到顶点 p 和参考点之间, y 连同完全2-树 $t_{2,p,o}$ 中的所有边就变成所得图中的一个树。因此式(8-4-5)成立且等于 $\Delta'_{p,p}$ 。例如, 把图8-3-7中的电流图和电压图中顶点1和3合并, 得到 $G_i(1=3)$ 和 $G_o(1=3)$, 如图8-4-5所示, 从这些图中我们容易得到 $W_{(1,3; 1,3)}$ 。

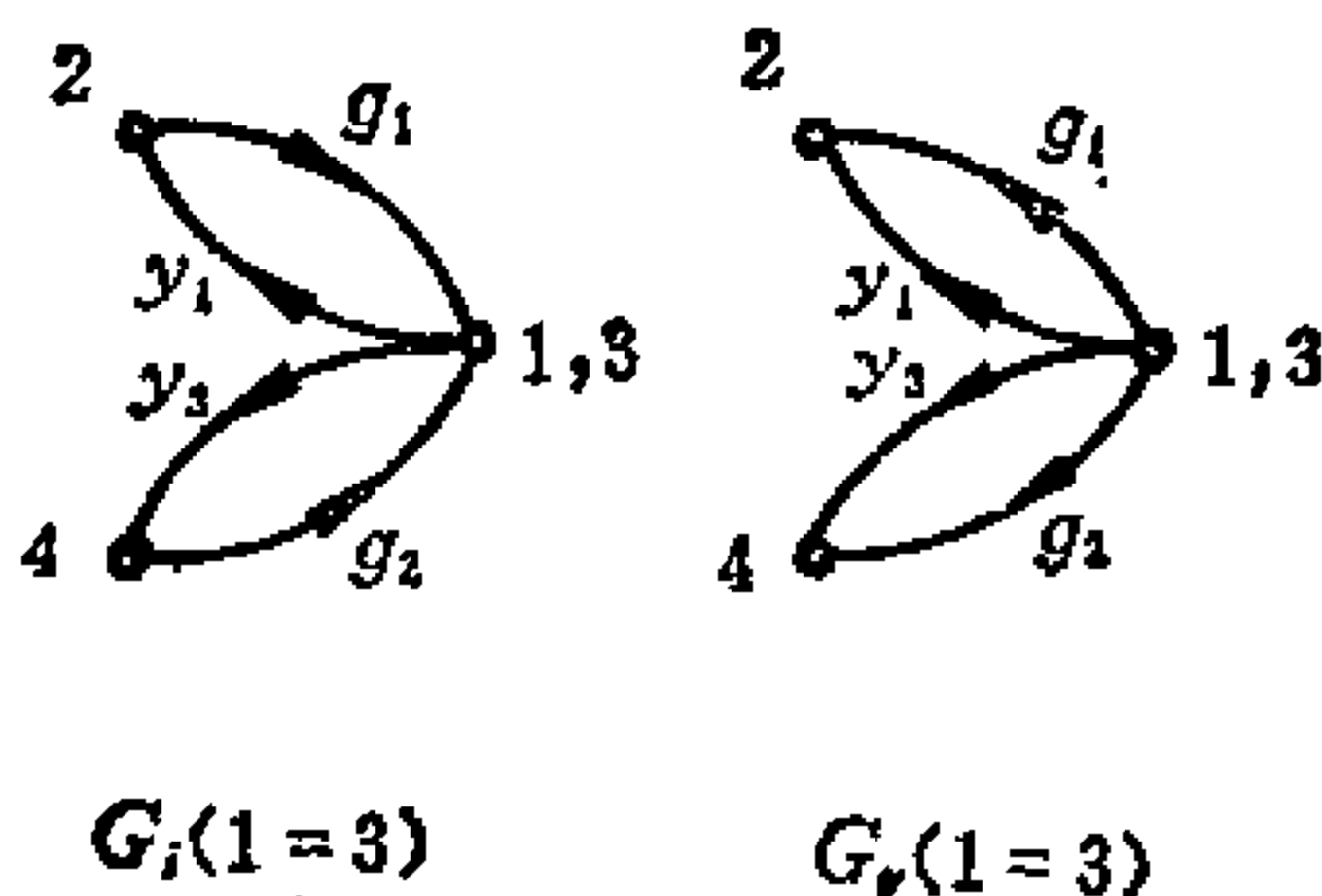


图8-4-5 从图8-3-7中 G_i 和 G_o 得到的 $G_i(1=3)$ 和 $G_o(1=3)$

8-5 开路转移函数

在图8-4-1中, 我们把导纳 y 接到网络 N 的输入顶点 i 和 o 之间来求代数余子式 $\Delta'_{i,i}$ 。为了用拓扑方法来计算一个开路转移函数的代数余子式, 我们把满足

$$y v_{i,k} = i_{i,o} \quad (8-5-1)$$

的导纳 y 象图8-5-1那样连接*, , 其中 i 和 o 是网络 N 的输入顶

* 原书把式(8-5-1)误为 $y i_{i,o} = v_{i,i}$, 现已改正。——译注

点， j 和 k 是输出顶点。

现在这个网络的节点导纳矩阵的行列式 Δ' 是



图8-5-1 网络与似有源的 y

$$\begin{aligned}\Delta' &= \sum_{(j)} e_j \times (\text{完全树树枝导纳乘积}) \\ &= \sum_{(j)} e_j \times (\text{不含 } y \text{ 的完全树的树枝导纳乘积}) \\ &\quad + \sum_{(j')} e_{j'} \times (\text{含 } y \text{ 的完全树的树枝导纳乘积})\end{aligned}\quad (8-5-2)$$

也就是：

$$\Delta' = V + yW_{(i:o, j:k)} \quad (8-5-3)$$

其中

$$V = \sum_{(j)} e_j \times (\text{网络 } N \text{ 的完全树树枝导纳乘积}) \quad (8-5-4)$$

$$W_{(i:o, j:k)} = \frac{1}{y} \sum_{(j')} e_{j'} \times (\text{含 } y \text{ 的完全树树枝导纳乘积}) \quad (8-5-5)$$

同前面给出的理由一样， Δ' 必为零，也就是

$$-y = \frac{V}{W_{(i:o, j:k)}} \quad (8-5-6)$$

因为 $-y$ 等价于颠倒 y 的电流边的方向，如图8-5-2所示，我们能够看出， $-y$ 就等于开路转移函数 $Y_{o(i:o, j:k)}$ 。因此

$$Y_{o(i:o, j:k)} = \frac{V}{W_{(i:o, j:k)}} \quad (8-5-7)$$

求 $W_{(i,o; j,k)}$ 的步骤和求 $W_{(i,o; i,o)}$ 的一样, 只不过这里 y 的电流边是从顶点 i 连接到顶点 o 的, y 的电压边从顶点 j 连接到顶点 k . 注意, y 的电流边的定向与网络函数定义的电流 $J_{i,o}$ 的方向相反(后者是从顶点 o 到顶点 i). 例如, 图8-3-6中 G 的 $W_{(1,3; 2,4)}$ 能由以下步骤得到:

1. 将 y 的电流边从顶点1接到顶点3, y 的电压边从顶点2接到顶点4 (图8-5-3).

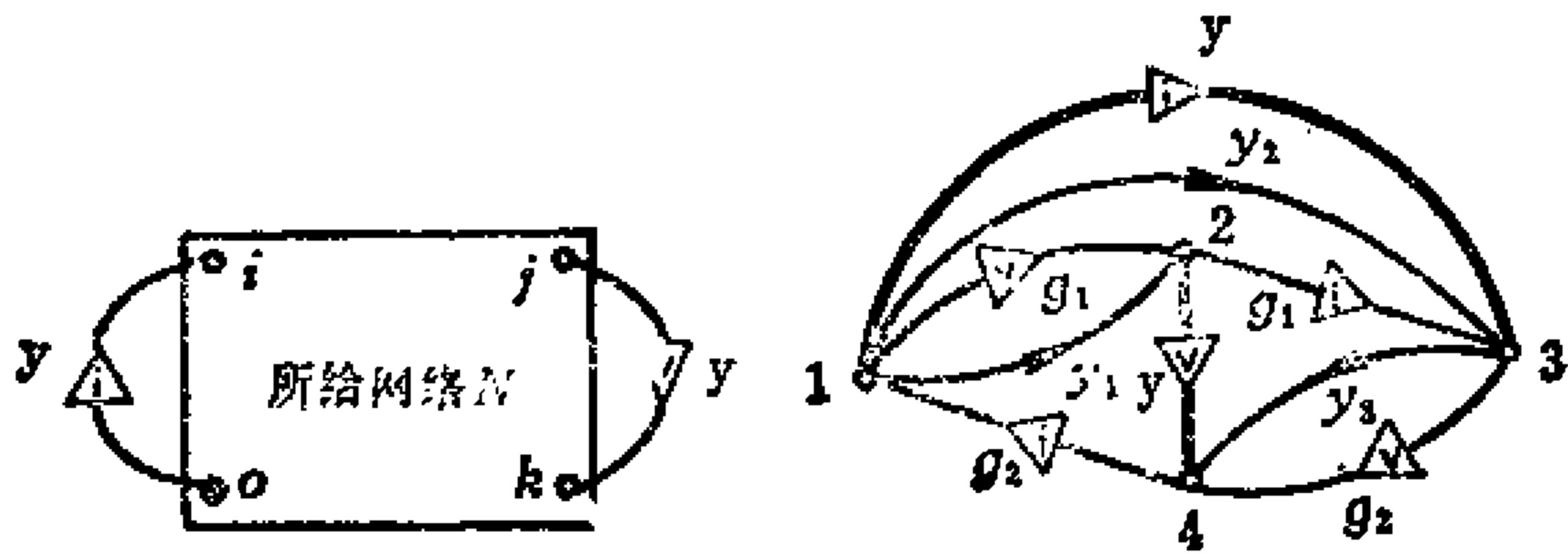


图8-5-2 网络 N 与 y 图8-5-3 有 y 的线图 $G(y)$

2. 画出所得线图的电流图和电压图 (图8-5-4).

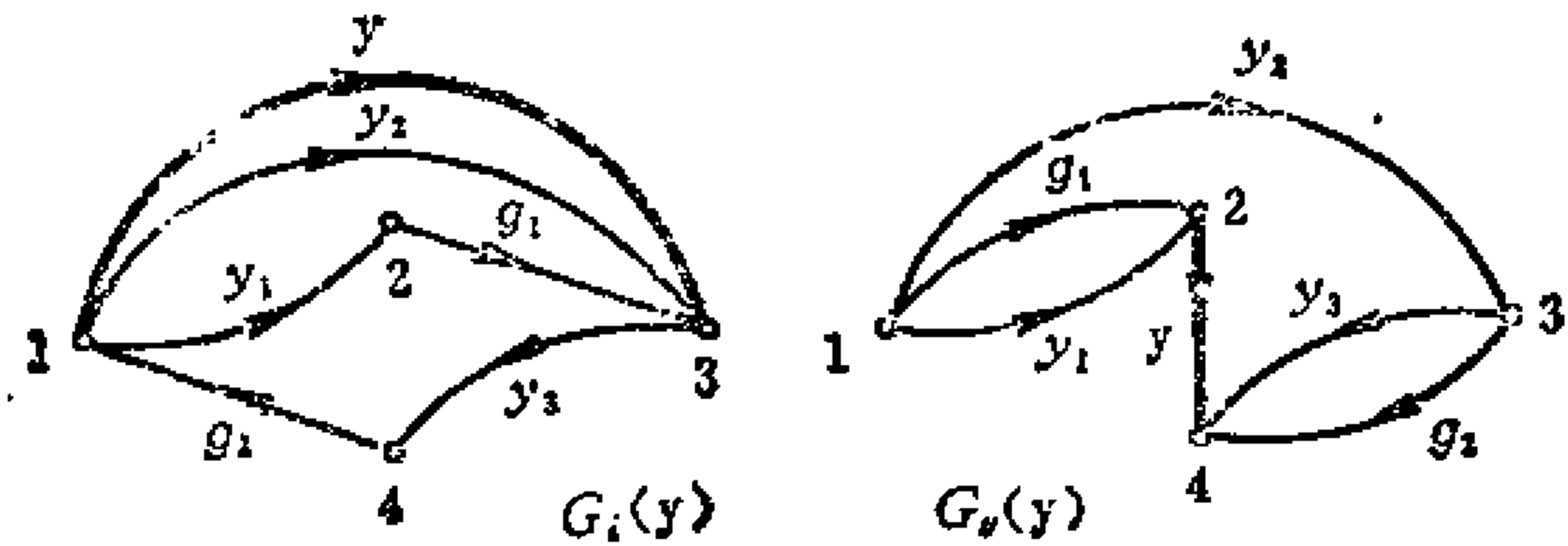


图8-5-4 图8-5-3中 G 的电流图 $G_i(y)$ 和电压图 $G_v(y)$

3. 找出电流图中包含 y 的所有树:

$$yy_1y_3, yy_1g_2, yy_3g_1, yg_1g_2$$

4. 从第 3 步得到的树中, 选出也属于电压图的树:

$$yy_1y_3, yy_1g_2, yy_3g_1, yg_1g_2$$

5. 确定第 4 步得到的每一个完全树的符号:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & & 1 & 2 & 3 \\ V \begin{bmatrix} t_i & y & y_1^- & y_3 \\ t_o & y_1 & y & y_3 \end{bmatrix} = 1, & V \begin{bmatrix} t_i & g_2^- & y_1^- & y^- \\ t_o & y_1 & y & g_2 \end{bmatrix} = -1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & & 1 & 2 & 3 \\ V \begin{bmatrix} t_i & y & g_1 & y_3 \\ t_o & g_1 & y & y_3 \end{bmatrix} = -1, & V \begin{bmatrix} t_i & g_2 & g_1 & y^- \\ t_o & g_1 & y & g_2 \end{bmatrix} = +1 \end{matrix}$$

6. 由此得到 $W_{(1,3,2,4)}$:

$$W_{(1,3,2,4)} = y_1y_3 - y_1g_2 - y_3g_1 + g_1g_2$$

从关于参考点 o 的基本节点方程:

$$\begin{bmatrix} v_{i,o} \\ v_{j,k} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta'} \begin{bmatrix} \Delta'_{ii} & \Delta'_{ji} - \Delta'_{ki} \\ \Delta'_{ij} - \Delta'_{ik} & \Delta'_{ii} + \Delta'_{kk} - \Delta'_{ik} - \Delta'_{kj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{i,o} \\ J_{j,k} \end{bmatrix} \quad (8-5-8)$$

利用式(8-4-12)和(8-5-7), 我们能写出如下方程:

$$\begin{bmatrix} v_{i,o} \\ v_{j,k} \end{bmatrix} = \frac{1}{V} \begin{bmatrix} W_{(i,o, i,o)} & W_{(j,k, i,o)} \\ W_{(i,o, j,k)} & W_{(j,k, j,k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{i,o} \\ J_{j,k} \end{bmatrix}$$

这就是开路网络函数的拓扑公式。

8-6 短路网络函数

从式(8-5-8), 我们可以得到

$$\begin{bmatrix} J_{i,o} \\ J_{j,k} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta'_{i,ij} + \Delta'_{i,kk} - \Delta'_{i,jk} - \Delta'_{i,kj}}$$

$$\times \begin{bmatrix} \Delta'_{ii} + \Delta'_{kk} - \Delta'_{ik} - \Delta'_{ki} & -(\Delta'_{ji} - \Delta'_{ki}) \\ -(\Delta'_{ij} - \Delta'_{ik}) & \Delta'_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{i,o} \\ v_{j,k} \end{bmatrix} \quad (8-6-1)$$

这个方程右端的元素就是短路网络函数。把它与式(8-5-8)比较，我们可以看出，除了 $(\Delta'_{iii} + \Delta'_{ikk} - \Delta'_{ijk} - \Delta'_{ikj})$ 外，其他的都已在前面研究过了。因此，我们只要找出 $(\Delta'_{iii} + \Delta'_{ikk} - \Delta'_{ijk} - \Delta'_{ikj})$ 的拓扑公式，就可以得到短路网络函数的拓扑公式。

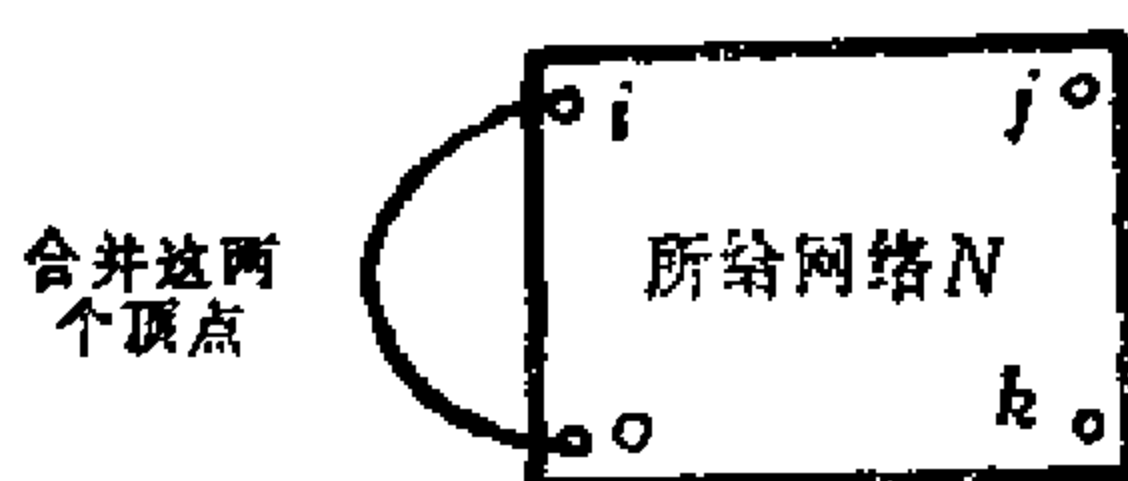


图8-6-1 网络 $N(i=o)$

考虑从网络 N 合并顶点 i 和 o 得到的网络 $N(i=o)$ ，如图8-6-1所示。由 $N(i=o)$ 的基本节点方程，我们有

$$\begin{bmatrix} v_{p,o} \\ v_{j,k} \end{bmatrix} = \frac{1}{\underline{\Delta}} \begin{bmatrix} \underline{\Delta}_{pp} & \underline{\Delta}_{jp} - \underline{\Delta}_{kp} \\ \underline{\Delta}_{pi} - \underline{\Delta}_{pk} & \underline{\Delta}_{jj} + \underline{\Delta}_{kk} - \underline{\Delta}_{jk} - \underline{\Delta}_{kj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{p,o} \\ J_{j,k} \end{bmatrix} \quad (8-6-2)$$

因为 $\underline{\Delta}$ 是网络 $N(i=o)$ 的节点导纳矩阵的行列式，而 $N(i=o)$ 是从 N 合并顶点 i 和 o 得到的网络，所以 $\underline{\Delta}$ 等于所给网络 N 的节点导纳矩阵 $A_i Y(A_o)'$ 的代数余子式 Δ'_{ii} 。并且，式(8-6-2)中的代数余子式 $\underline{\Delta}_{pp}$ 是这样—个矩阵的行列式，这个矩阵是由 N 的节点导纳矩阵 $A_i Y(A_o)'$ 删去对应于顶点 i 和 p 的第 i 、第 p 行和第 i 、第 p 列得到的。由式(8-5-9)，网络 $N(i=o)$ 的 $W_{(ijk)(ikj)}$ 等于

$$W_{(ijk)(ikj)} = \underline{\Delta}_{ii} + \underline{\Delta}_{kk} - \underline{\Delta}_{ik} - \underline{\Delta}_{ki} \quad (8-6-3)$$

因此

$$N(i=o) \text{ 的 } W_{(j+k, j+k)} = N \text{ 的 } A_i Y(A_o)' \text{ 的} \\ \Delta'_{i,ijj} + \Delta'_{i,ikk} - \Delta'_{i,jik} - \Delta'_{i,kij} \quad (8-6-4)$$

由式(8-4-15), (8-5-8)和(8-5-9)

$$N(i=o) \text{ 的 } W_{(j+k, j+k)} = \sum_{(j)} \sigma_j \times [N(i=o) \text{ 的完全2-树 } t_{2,j,k} \\ \text{树枝导纳乘积}] \quad (8-6-5)$$

可以看出, $N(i=o)$ 的每一个完全2-树 $t_{2,j,k}$ 是把 $N(i=o)$ 的顶点 j 和 k 合并而得到的 $N(i=o, j=k)$ 的一个完全树。
因此

$$N(i=o) \text{ 的 } W_{(j+k, j+k)} = \sum_{(j)} \sigma_j \times [N(i=o, j=k) \text{ 的完全树} \\ \text{树枝导纳乘积}] \quad (8-6-6)$$

设 $U_{(iso, j+k)}$ 定义如下:

$$U_{(iso, j+k)} = \sum_{(j)} \sigma_j \times [N(i=o, j=k) \text{ 的完全树树枝导纳乘积}] \quad (8-6-7)$$

由式(8-6-7), (8-5-8)和(8-5-9), 式(8-6-1)能表示为

$$\begin{bmatrix} J_{iso} \\ J_{j+k} \end{bmatrix} = \frac{1}{U_{(iso, j+k)}} \begin{bmatrix} W_{(j+k, j+k)} & -W_{(j+k, iso)} \\ -W_{(iso, j+k)} & W_{(iso, iso)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{iso} \\ v_{j+k} \end{bmatrix} \quad (8-6-8)$$

此式给出短路网络函数的拓扑公式。

如果不用合并顶点 i 和 o 及顶点 j 和 k 的方法, 我们也可以用以下步骤求出 $U_{(iso, j+k)}$:

1. 将似无源导纳 y_1 接在顶点 i 和 o 之间, 将似无源导纳 y_2 接在顶点 j 和 k 之间。
2. 找出所有既含 y_1 又含 y_2 的完全树, 并求出 V , 换句话说, 求得

$$V(y_1 y_2) = \sum_{(i)} \sigma_i \times (\text{既含 } y_1 \text{ 又含 } y_2 \text{ 的完全树树枝导纳乘积})$$

(8-6-9)

3. $U_{(i, o, j, k)}$ 是

$$U_{(i, o, j, k)} = \frac{1}{y_1 y_2} V(y_1 y_2)$$

一般说来, 从 $N(i=o, j=k)$ 来求出 $U_{(i, o, j, k)}$ 比较容易。例如, 要求出图8-3-6中 G 的 $U_{(1, 3, 2, 4)}$ 可以

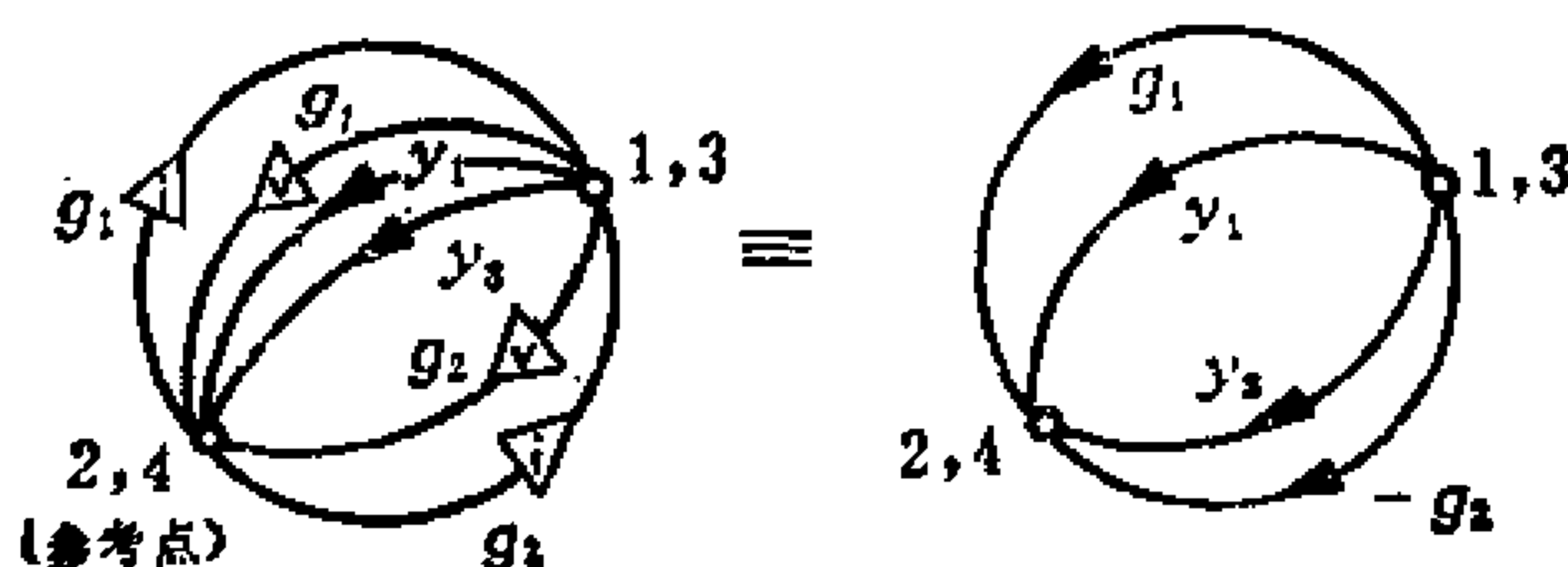


图8-6-2 图8-3-6中 G 的 $G(1=3, 2=4)$

象图8-6-2那样构造 $G(1=3, 2=4)$ 。然后求出 $G(1=3, 2=4)$ 的所有完全树, 我们得到

$$U_{(1, 3, 2, 4)} = y_1 + y_3 - g_1 - g_2$$

8-7 单 向 网 络

前面介绍的用拓扑公式分析网络的优点是, 如果一个网络的导纳被看作是任意的, 在拓扑公式中就没有相消项。换句话说, 如果边 $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_m}$ 是树 (或者在似有源网络的情况是完全树), 项 $y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_m}$ 将在拓扑公式所得到的行列式中。因为不可能有其他树也由 $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_m}$ 组成, 这样, 项 $y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_m}$ 就不

会被消去。对于代数余子式也是这样。因此，只要我们采用拓扑公式，就不必担心相消项的问题。然而，在似有源网络的情况下，必须计算每一个完全树的符号，这大概算作这种方法的一个缺点。如果我们对每个导纳 y 的电压边和电流边的位置加以限制，允许某些相消项的存在就能避免涉及这个符号问题。达到这个目的的方法之一是只用单向导纳来表示网络。

定义8-7-1 一个单向导纳(unistor) y 定义为

$$y v_{po} = i_{pk} \tag{8-7-1}$$

其中 v_{po} 是顶点 p 到参考点 o 的电压， i_{pk} 是从顶点 p 流到顶点 k 的电流。式(8-7-1)给出的单向导纳的拓扑表示如图8-7-1。

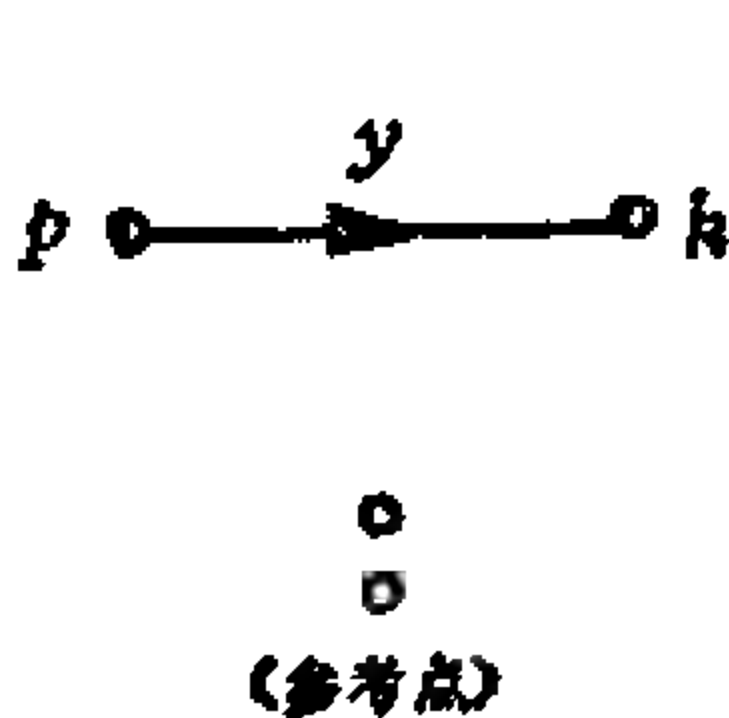


图8-7-1 单向导纳的表示法

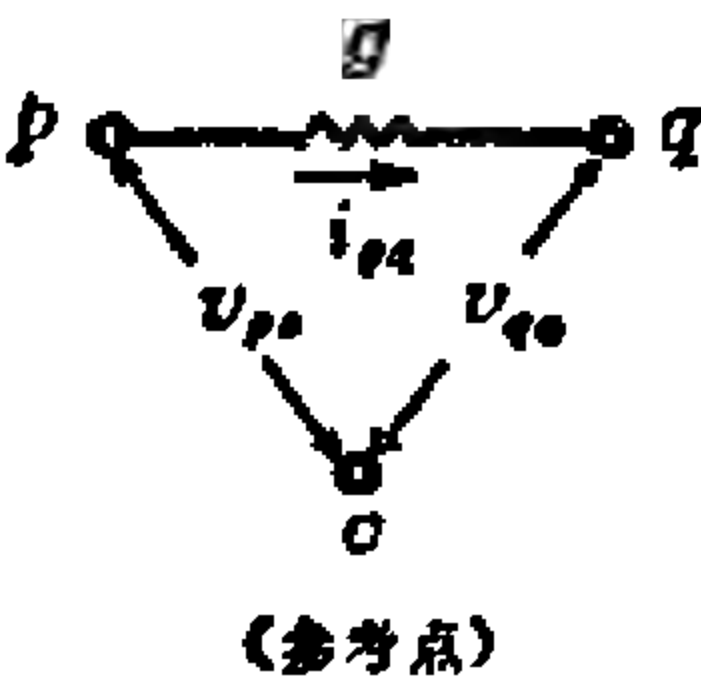


图8-7-2 电导 g

考虑一个连接顶点 p 和 q 之间的电导，如图8-7-2所示。从等式

$$g(v_{po} - v_{qo}) = i'_{pq} \tag{8-7-2}$$

我们能看出，如果定义

$$g v_{po} = i_{pq} \tag{8-7-3}$$

$$g v_{qo} = i''_{pq} \tag{8-7-4}$$

那么

$$i_{pq} = i'_{pq} - i''_{pq} \tag{8-7-5}$$

我们可以用两个满足式(8-7-3)和(8-7-4)的单向导纳来表示电导

g ，如图8-7-3所示。

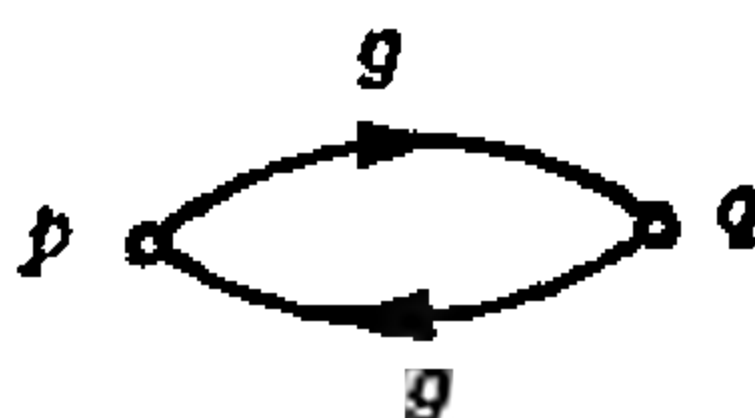


图8-7-3 电导 g 的单向导纳表示法

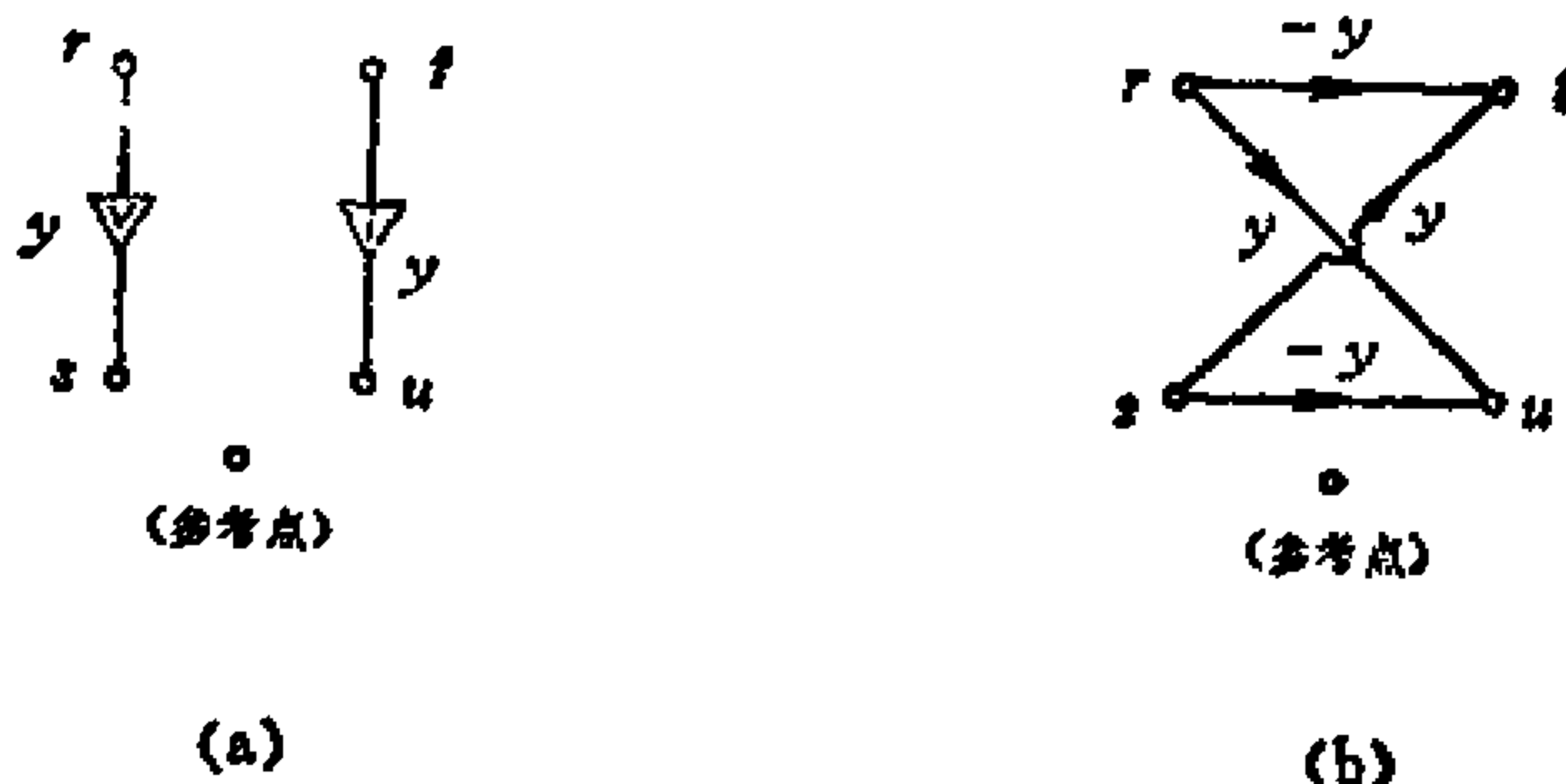


图8-7-4 导纳 y
(a) y 的电压边和电流边；(b) y 的单向导纳表示法

一般地说，假定我们有一个如图8-7-4(a)所示的导纳 y ，其中

$$y v_{rs} = i_{tu} \quad (8-7-6)$$

考虑图8-7-4(b)所示的单向导纳网络，我们可以看出，在顶点 r 流出的总电流是

$$(-y) v_{ro} + y v_{ro} = 0 \quad (8-7-7)$$

同样，在顶点 s 流出的总电流也等于 0。另一方面，在顶点 t 流出的总电流是

$$- [(-y) v_{ro} + y v_{so}] = y (v_{ro} - v_{so}) = i_{tu} \quad (8-7-8)$$

其中 i_{tu} 是式(8-7-6)给出的电流。并且在顶点 u 流出的总电流是

$$- [y v_{ro} + (-y) v_{so}] = -y (v_{ro} - v_{so}) = -i_{tu} \quad (8-7-9)$$

因此图8-7-4(b)中的单向导纳网络就代表图8-7-4(a)中的导纳 y 。

当 $s = u$ 时，图8-7-4(b)中的单向导纳网络如图8-7-5(a)所示。当 $s = u$ 且 $r = t$ 时，这个单向导纳网络如图8-7-5(b)所示，这是似无源导纳元件的表示法。

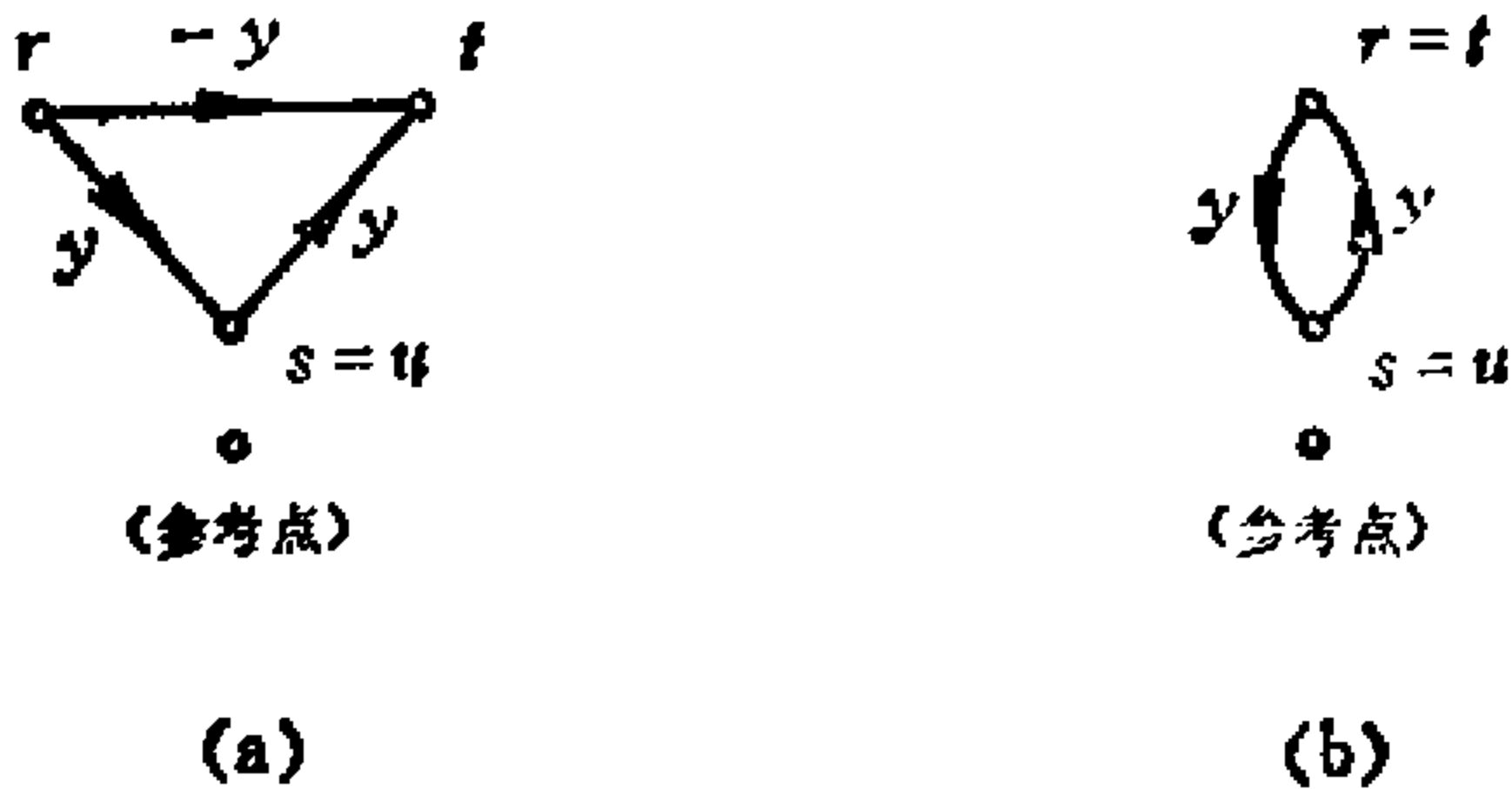


图8-7-5 图8-7-4中单向导纳网络的特殊情况

(a)当 $s = u$ 时的单向导纳网络；(b)当 $s = u$ 且 $r = t$ 时的单向导纳网络

注意，根据单向导纳的定义，任何一个与参考点连接，且其方向离开参考点的单向导纳可以省略。现在我们知道，任何一个导纳能用单向导纳来表示。例如，图8-7-6中的网络可以用图8-7-7(a)所示的单向导纳网络表示。

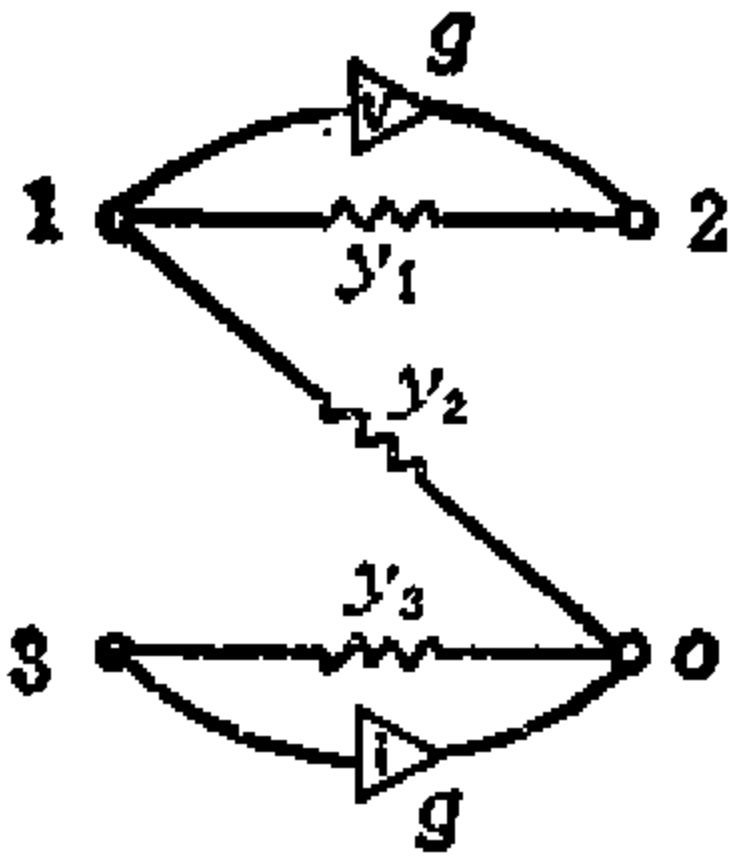


图8-7-6 一个网络

取顶点 o 作为参考点，图8-7-7(a)中的单向导纳网络可以简化为图8-7-7(b)中的网络，它也表示图8-7-6中的网络。注意，当两个单向导纳连接在相同的顶点之间（并联），并且方向相同时，我们可以把它们的权加在一起，用一个单向导纳代替它们。

设 N_u 是一个单向导纳组成的网络，那么对于 N_u 中所有的

单向导纳，以 o 为参考点，我们有以下等式：

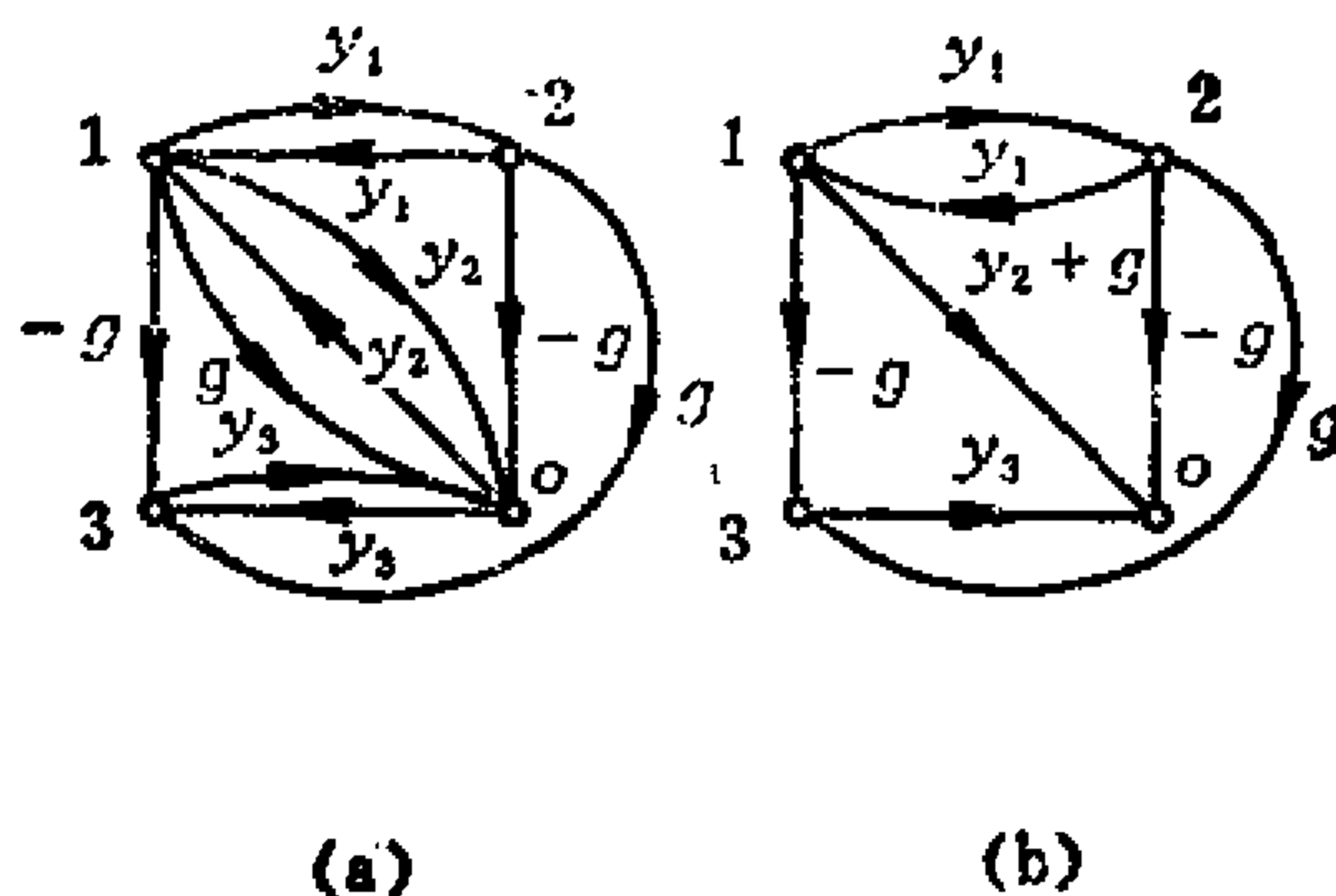


图8-7-7

(a) 单向导纳网络 N ; (b) 以 o 为参考点的简化的单向导纳网络 N

$$\begin{aligned}
 y_1 v_{p_1 o} &= i_{p_1 k_1} \\
 y_2 v_{p_2 o} &= i_{p_2 k_2} \\
 &\vdots \\
 y_n v_{p_n o} &= i_{p_n k_n}
 \end{aligned}
 \tag{8-7-10}$$

它们可以写成矩阵形式，

$$YV_c = I_c \tag{8-7-11}$$

其中

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & & & 0 \\ & y_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & y_n \end{bmatrix} \tag{8-7-12}$$

$$V_c = \begin{bmatrix} v_{p_1 o} \\ v_{p_2 o} \\ \vdots \\ v_{p_n o} \end{bmatrix} \tag{8-7-13}$$

$$I_e = \begin{bmatrix} i_{p_1 k_1} \\ i_{p_2 k_2} \\ \vdots \\ i_{p_n k_n} \end{bmatrix} \quad (8-7-14)$$

设 G_i 和 G_v 是 N_u 的电流图和电压图, 把图8-7-8(a)所示的从顶点 i 到顶点 j 的每一个单向导纳, 看成是图8-7-8(b)所示从顶点 i 到 j 的电流边、从顶点 i 到参考点的电压边的简洁记法。我们可容易看出, N_u 的电流图 G_i 正好和 N_u 相同。因此, 电

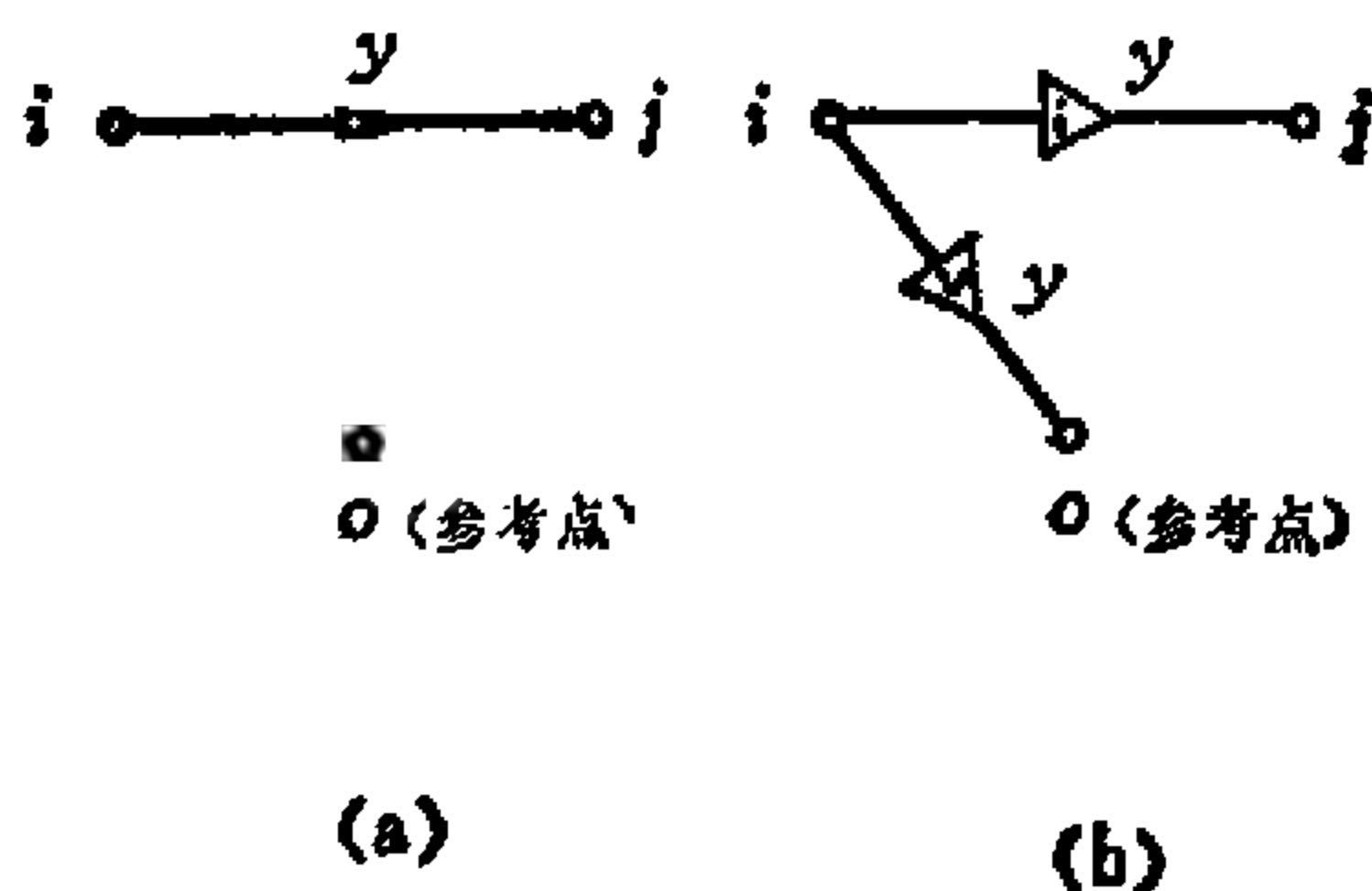


图8-7-8

(a) 单向导纳 y , (b) 单向导纳 y 的电压边及电流边

图 G_i 的关联矩阵 A_i 就是 N_u 的关联矩阵 A 。于是据克希霍夫电流定律, 我们有

$$AI_e = AYV_e = 0 \quad (8-7-15)$$

在节点变换中, 由式(8-1-19)

$$V_e = A_v' V_u \quad (8-7-16)$$

其中 A_v 是电压图 G_v 的关联矩阵。因为每一条电压边是从对应电流边所连接出来的那个顶点接出来的, 所以 A_v 中 $+1$ 的位置正好与 A_i 中 $+1$ 的位置相同。另一方面, 每一条电压边都是接在

参考点上，而电流边却不一定，因此 A_i 中没有 -1 。于是 A_i 可以从 A_i 中将所有 -1 改为 0 得到。

定义8-7-2 符号 A^+ 定义为从 A 中将所有 -1 用 0 代换得到的矩阵。

用这个定义，我们有

$$A_i = N_n \text{ 的 } A^+ \quad (8-7-17)$$

于是式(8-7-16)中的节点变换变成

$$V_i = (A^+)' V_n \quad (8-7-18)$$

将此式代入式(8-7-15)得

$$AY(A^+)' V_n = 0 \quad (8-7-19)$$

这就是网络 N_n 的基本节点方程。当有外部电流接在 N_n 参考点与某些顶点之间时，式(8-7-19)将变成

$$AY(A^+)' V_n = J \quad (8-7-20)$$

例8-7-1 考虑由单向导纳组成的网络 N_n ，如图8-7-9所示。

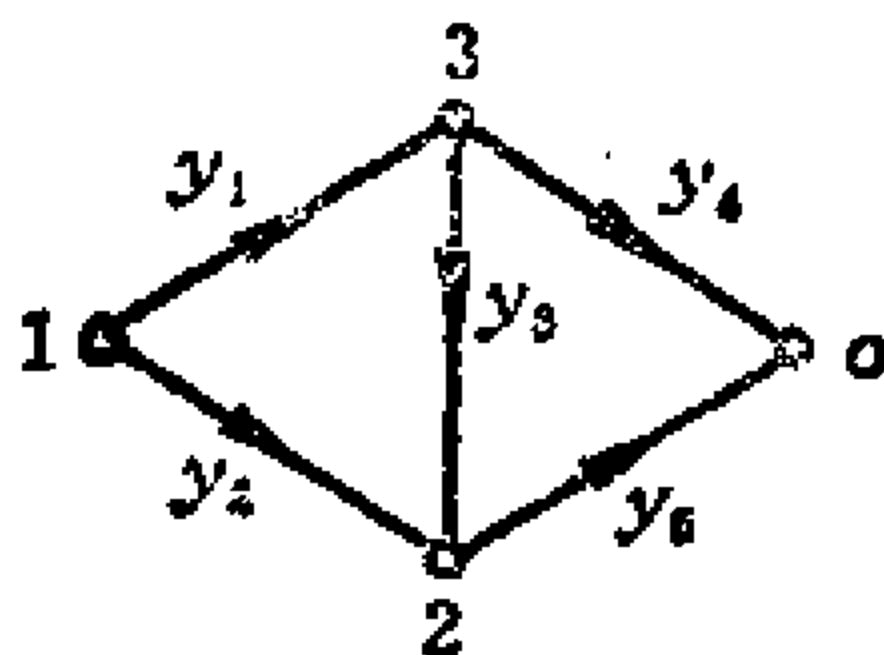


图8-7-9 网络 N_n 。

以 0 为参考点的关联矩阵是

$$A = \begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

因此

$$A^+ = \begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

所以 N_n 的节点导纳矩阵为

$$\begin{aligned} AY(A^+)' &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad \begin{bmatrix} y_1 & & & & \\ & y_2 & & & \\ & & y_3 & & \\ & & & y_4 & \\ & & & & y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y_1 + y_2 & 0 & 0 \\ -y_2 & y_5 & -y_3 \\ -y_1 & 0 & y_3 + y_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

利用比内-柯西定理，节点导纳矩阵 $AY(A^+)'$ 的行列式可表示为

$$|AY(A^+)'| = \sum [\text{AY 的大子行列式}] \times [(A^+)' \text{ 对应的大子行列式}]$$

$$= \sum (y_{j_1} y_{j_2} \cdots y_{j_m}) |A(j_1 j_2 \cdots j_m)| |A^+(j_1 j_2 \cdots j_m)|$$

(8-7-21)

其中 $A(j_1 j_2 \cdots j_m)$ 和 $A^+(j_1 j_2 \cdots j_m)$ 分别是由 A 和 A^+ 的列 j_1, j_2, \cdots, j_m 组成的方矩阵。我们知道，如果边 $y_{j_1}, y_{j_2}, \cdots, y_{j_m}$ 构成 N_n 中的一个树，那么 $A(j_1 j_2 \cdots j_m)$ 是非奇异的，同样，如果边 $y_{j_1},$

i_2, \dots, y_{i_m} 构成 N_n 的电压图 G_n 中的一个树, 那么 $A^+(j_1 j_2 \dots j_m)$ 也是非奇异的。

现在, 为了后面的分析, 定义有向树的概念如下。

定义8-7-3 有向树是 N_n 中的一个树, 其中任一顶点到参考点都存在一条有向路径。

例如, 在图8-7-10中, (y_1, y_2, y_3) 是一个有向树, 而 (y_1, y_3, y_4) 不是有向树, 其中 o 是参考点。

由有向树的定义, 式(8-7-20)可以表达为

$$|AY(A^+)^t| = \sum \text{有向树 } t_0 \text{ 树枝导纳乘积} \quad (8-7-22)$$

其中 t_0 是以 o 为参考点的有向树。证明留给读者。

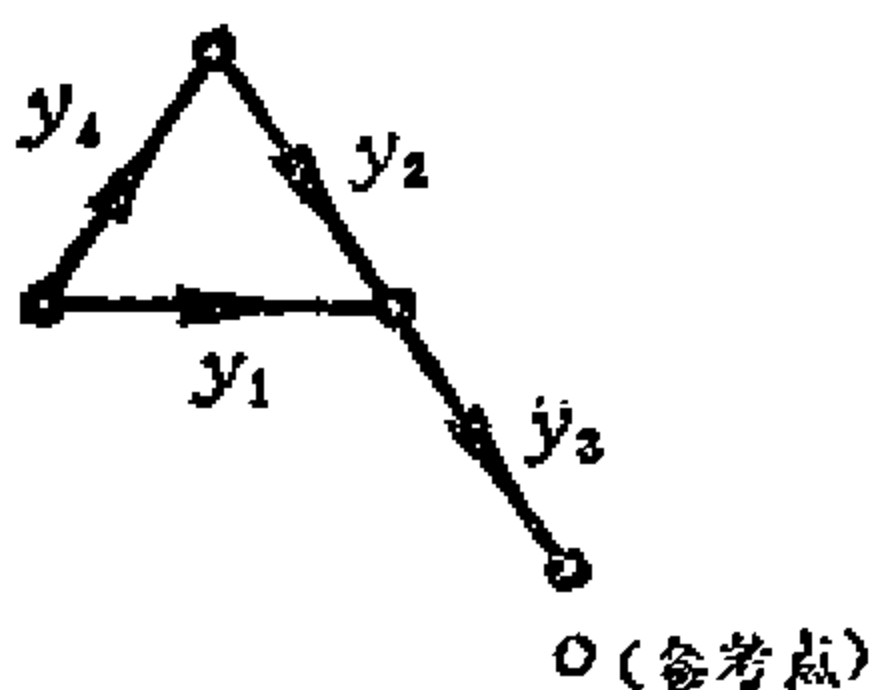


图8-7-10 网络 N_n

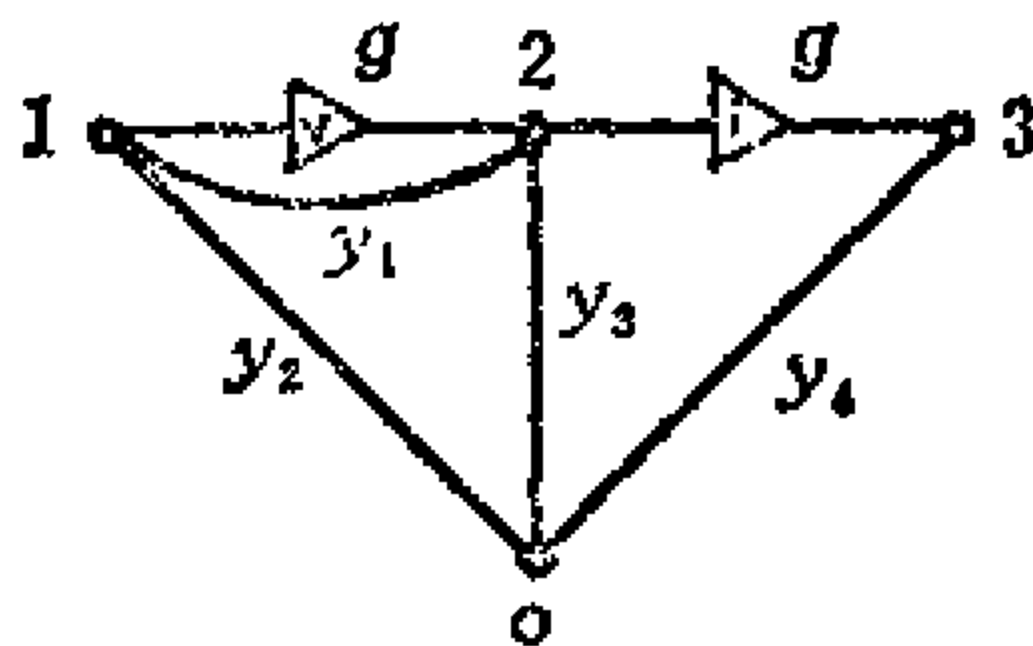


图8-7-11 电网络 N

例8-7-2 考虑图8-7-11中的网络, 其对应的由单向导纳组成的单向网络 N_n 如图8-7-12(a)所示, 它可以简化成图8-7-12(b)的形式。从这个网络 N_n , 我们可以求出节点导纳矩阵的行列式。

$$\Delta = |AY(A^+)^t| = y_1 y_2 y_4 + (y_1 - g) y_3 y_4 + y_3 y_1 g - y_2 y_4 (-g) + y_2 y_3 y_4$$

经简化, 可得: $\Delta = y_1 y_2 y_4 + y_1 y_3 y_4 + y_2 y_3 y_4 - y_2 y_4 g$

我们也能求出代数余子式的拓扑公式, 例如,

$$\Delta_{ii} = \sum \text{有向2-树 } t_{2,i,o} \text{ 树枝导纳乘积} \quad (8-7-23)$$

然而，如在前面有源网络的拓扑分析中所作的那样，我们可以用

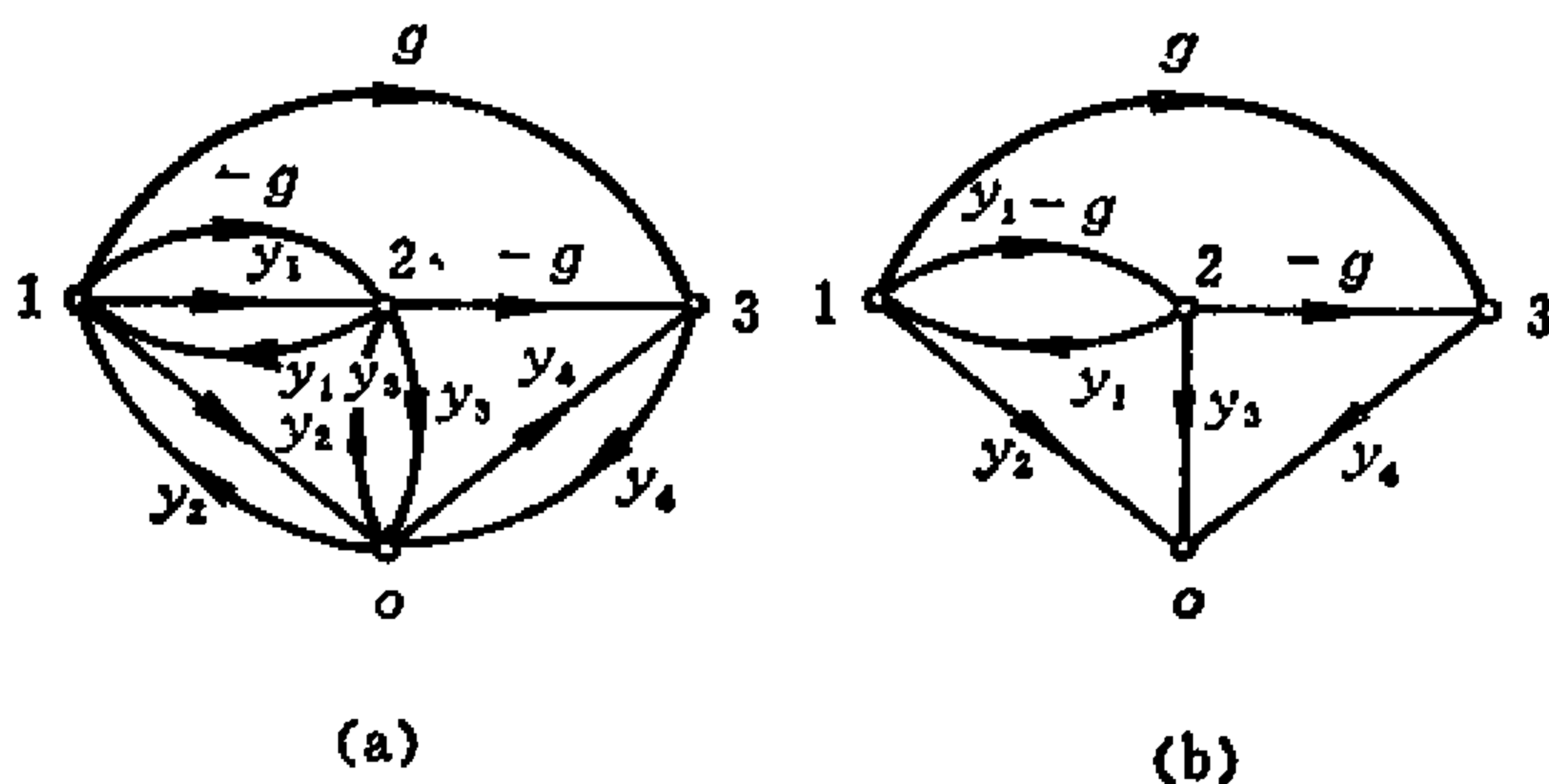


图8-7-12

(a) N 的单向导纳网络；(b) 简化后的单向导纳网络 N_s 。

加入一个导纳 y 的方法来比较简单地得到所求的解。

这种用单向网络进行的拓扑分析并不怎样方便，因为在最终结果中仍有相消项存在*。

有好几种把似无源网络及似有源网络结合起来进行拓扑分析的技巧，可以使确定每一个完全树的符号的步骤变得简单。但我们在这一章就不再讨论它们了。

8-8 电网络的等效变换

有许多电网络在固定的顶点之间有相同的网络函数。这些电网络叫做定点条件下的等效网络。这里我们来讨论一种算法，一

* 可参阅陈树柏主编《网络图论及其应用》，科学出版社，1982。——译注

个给定网络在一个点集下如何用拓扑方法构造一个等效网络，这种算法称为等效变换。

考虑由两个子网络 N_A 和 N_B 组成的网络 N ，这两个网络由顶点 $1, 2, \dots, n$ 连接，如图8-8-1所示。顶点 a_1, a_2, \dots, a_l 和顶点 $1, 2, \dots, n$ 在 N_A 中，顶点 b_1, b_2, \dots, b_f 和顶点 $1, 2, \dots, n$ 在 N_B 中。不失一般性，设顶点 n 是参考点， V_A 是列向量，其中每一个元素 v_{ap} 是顶点 a_p 到参考点 n 的节点电压， $p=1, 2, \dots, l$ ；设 V_B 是列向量，其中每一个元素 v_{bq} 是顶点 b_q 到参考点 n 的节点电压， $q=1, 2, \dots, f$ ；又设 V_C 是列向量，其中每个元素 v_c 是顶点 c 到参考点 n 的节点电压， $c=1, 2, \dots, n-1$ 。以此类似，设 J_A 是由 j_{ap} 组成的列向量， j_{ap} 是从参考点 n 流入顶点 a_p 的电流， $p=1, 2, \dots, l$ ；设 J_B 是列向量，其中每个元素 j_{bq} 是从参考点 n 流入顶点 b_q 的电流， $q=1, 2, \dots, f$ ； J_C 是电流向量，其中每一元素 j_c 是从参考点 n 流入顶点 c 的电流， $c=1, 2, \dots, n-1$ 。

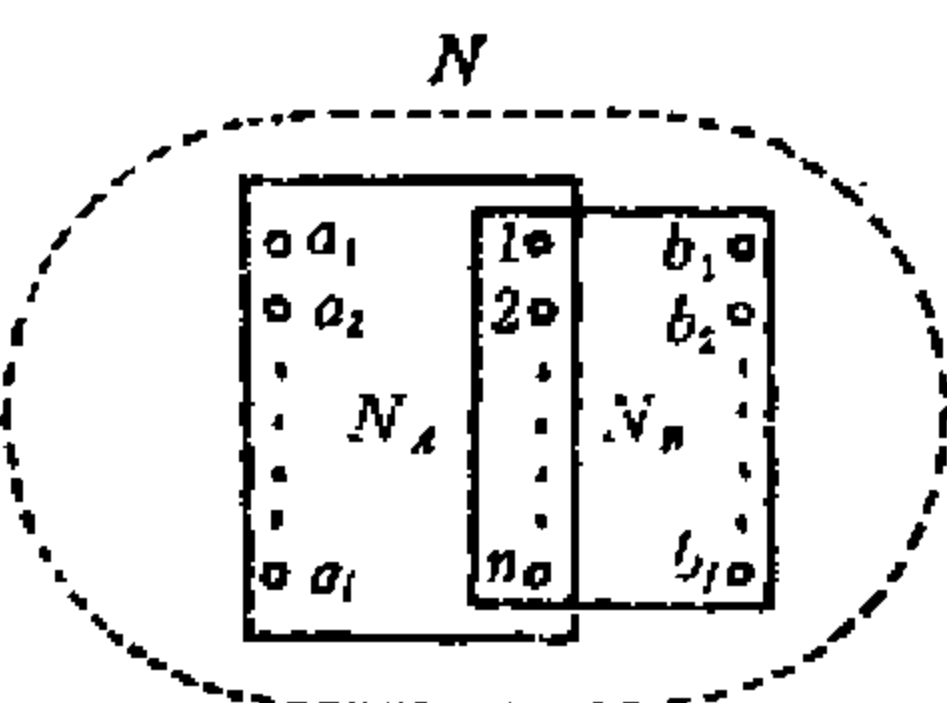


图8-8-1 由 N_A 和 N_B 组成的网络 N

网络 N 的基本节点方程可表示为：

$$\begin{bmatrix} Y_{A11} & Y_{A12} & 0 \\ Y_{A21} & Y_{A22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_C \\ V_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{B11} & Y_{B12} \\ 0 & Y_{B21} & Y_{B22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_C \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_A \\ J_C \\ J_B \end{bmatrix} \quad (8-8-1)$$

其中 $\begin{bmatrix} Y_{A11} & Y_{A12} \\ Y_{A21} & Y_{A22} \end{bmatrix}$ 取自子网络 N_A , 而 $\begin{bmatrix} Y_{B11} & Y_{B12} \\ Y_{B21} & Y_{B22} \end{bmatrix}$ 取自子网络 N_B . 将式(8-8-1)重写, 我们有

$$\begin{bmatrix} Y_{A11} & Y_{A12} \\ Y_{A21} & Y_{A22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{B11} & Y_{B12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_C \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_A \\ J_C \end{bmatrix} \quad (8-8-2)$$

$$Y_{B11}V_C + Y_{B12}V_B = J_B \quad (8-8-3)$$

由式(8-8-3), V_B 能表示为

$$V_B = (Y_{B22})^{-1}J_B - (Y_{B22})^{-1}Y_{B21}V_C \quad (8-8-4)$$

将此代入式(8-8-2), 我们有

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} Y_{A11} & Y_{A12} \\ Y_{A21} & Y_{A22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Y_{B11} - Y_{B12}(Y_{B22})^{-1}Y_{B21} \end{bmatrix} V_C \\ & = \begin{bmatrix} J_A \\ J_C - Y_{B12}(Y_{B22})^{-1}J_B \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8-8-5)$$

这是假定 Y_{B22} 非奇异的情况下得到的, 显然, 式(8-8-1)和(8-8-5)给出了子网络 N_A 中的顶点之间相同的网络函数. 另一方面, 式(8-8-5)表明我们可以用新的子网络 N_C 来代替子网络 N_B , N_C 的节点导纳矩阵等于 $Y_{B11} - Y_{B12}(Y_{B22})^{-1}Y_{B21}$, 它有一个电流源为 $-Y_{B12}(Y_{B22})^{-1}J_B$, 如图8-8-2所示.

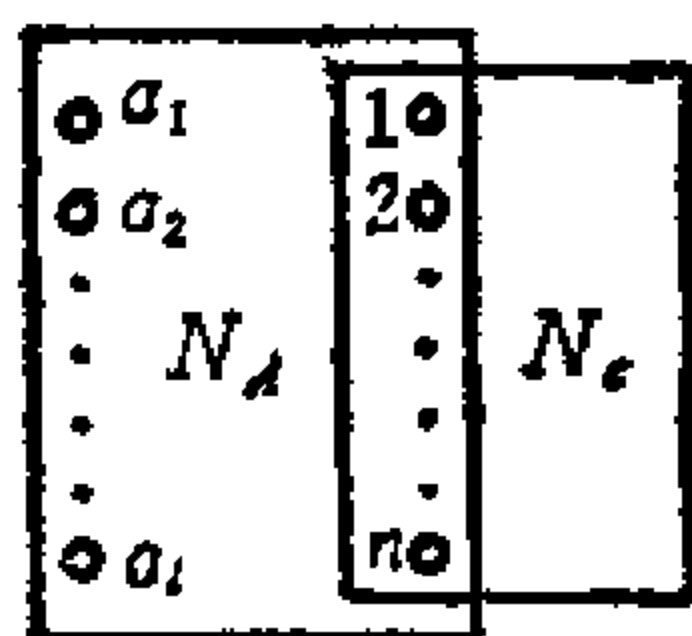


图8-8-2 N 的等效网络

当我们单独考虑子网络 N_B , 并计算顶点 $1, 2, \dots, n$ 中每一对顶点之间的 n 端短路导纳函数时, 我们可以看出, 答案正好等于 $Y_{B11} - Y_{B12}(Y_{B22})^{-1}Y_{B21}$. 并且 $-Y_{B12}(Y_{B22})^{-1}J_B$ 表示在 N_B 中由于 J_B 产生的从参考点 n 到顶点 c 的等效 n 端短路电流源,

这里 $c = 1, 2, \dots, n-1$. 因此, 只要 Y_{B22} 是非奇异的, (这是顶点

1, 2, ..., n 中每一对顶点之间存在 n 端短路导纳函数的必要条件), 我们就可以求出子网络 N_B , 从而消去顶点 b_1, b_2, \dots, b_f , 而不改变子网络 N_A 中任一对顶点之间的 N 的网络函数. 求子网络 N_c 的规则如下:

规则 a 从参考点 n 到每一个顶点 u ($u = 1, 2, \dots, n-1$), 我们给出 N_c 中的一个电流源 J_u , 它等于 N_B 的 n 端短路电流 i_u :

$$N_c \text{ 中的 } J_u = N_B \text{ 中的 } i_u \Big|_{v_1=v_2=\dots=v_{n-1}=0} \quad (8-8-6)$$

其中 v_p 是从顶点 p 到参考点 n 的节点电压, $p = 1, 2, \dots, n-1$, i_u 是从顶点 u 流入参考点 n 的电流.

规则 b 在顶点 1, 2, ..., n-1 中每一对顶点 (t, u) 之间给出 N_c 中的导纳 y_{tu} 和 y_{ut} , 它们满足

$$y_{tu}v_u = i_t \quad (8-8-7)$$

和 $y_{ut}v_t = i_u \quad (8-8-8)$

其中 y_{tu} 和 y_{ut} 等于 N'_B (没有电流源的 N_B) 的 n 端短路转移导纳函数, 即

$$y_{tu} = N'_B \text{ 中的 } \frac{J_t}{v_u} \Big|_{\substack{v_1=v_2=\dots=v_{n-1}=0 \\ v_u \neq 0}} \quad (8-8-9)$$

$$y_{ut} = N'_B \text{ 中的 } \frac{J_u}{v_t} \Big|_{\substack{v_1=v_2=\dots=v_{n-1}=0 \\ v_t \neq 0}} \quad (8-8-10)$$

规则 c 从顶点 1, 2, ..., n-1 中每一个顶点 u 到参考点 n 给出 N_c 的 y_{un} , 规定为

$$y_{un}v_u = i_u \quad (8-8-11)$$

它等于 N'_B 的顶点 u 和参考点 n 之间的 n 端短路策动点导纳函数, 即

$$y_{un} = N'_B \text{ 中的 } \frac{J_u}{v_u} \Big|_{\substack{v_1=v_2=\dots=v_{n-1}=0 \\ v_u \neq 0}} \quad (8-8-12)$$

例8-8-1 考虑图8-8-3中的网络，注意因为似无源元件的方向是任意的，所以在这个图中允许用无向边来表示似无源元件。这样做是很方便的，因为我们可以任需要的时候指定适当的方向。假定我们只需要考虑 N_A 中顶点之间的网络函数。由于在 N_B 中没有电流源，我们可以从规定 b 开始。设顶点 3 是参考点，则

$$y_{12} = \left. \frac{J_1}{v_2} \right|_{v_1=0} = \frac{y_3 y_4 g}{(y_1 + y_4)(y_2 + y_3)}$$

$$y_{21} = \left. \frac{J_2}{v_1} \right|_{v_2=0} = 0$$

根据规则 c ，

$$y_{13} = \left. \frac{J_1}{v_1} \right|_{v_2=0} = \frac{y_1 y_4}{y_1 + y_4}$$

$$y_{23} = \left. \frac{J_2}{v_2} \right|_{v_1=0} = \frac{y_2 y_3}{y_2 + y_3}$$

所得的网络如图8-8-4所示。

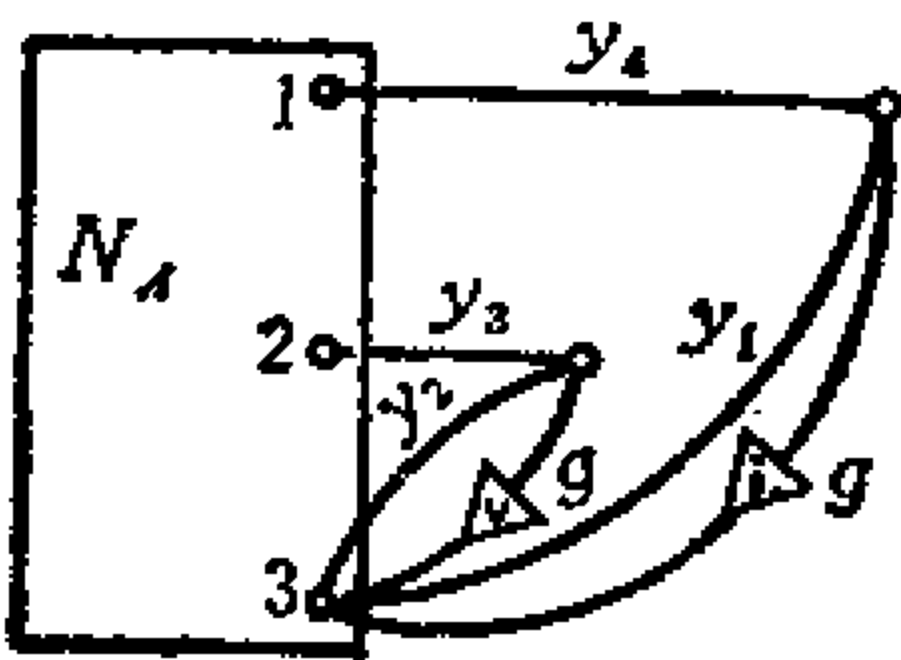


图8-8-3 一个给定的网络

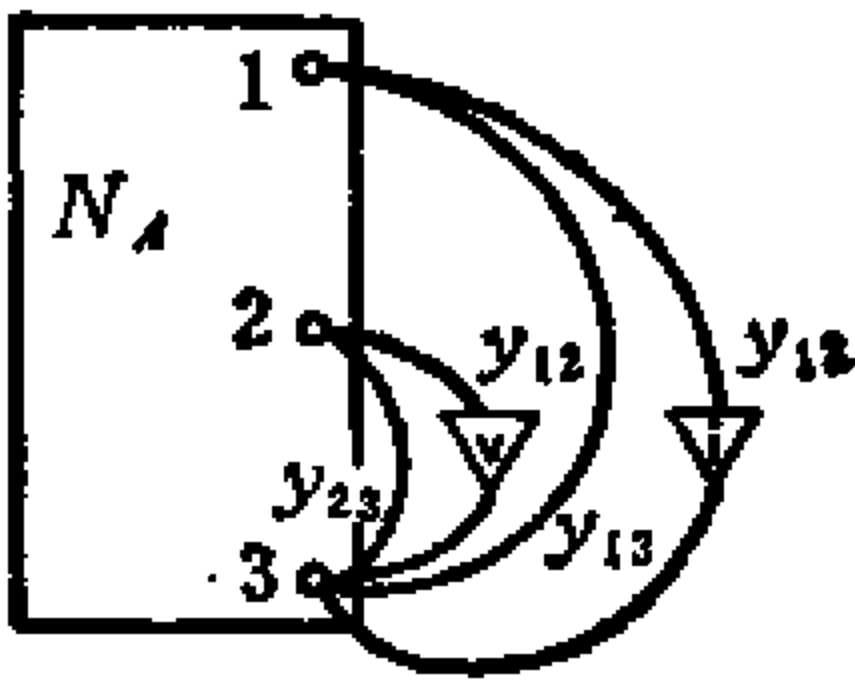


图8-8-4 等效网络

当子网络 N_B 不包含似有源元件（包括互感耦合元件）时，规则 b 和 c 变成一条规则。

规则 b' 在顶点 $1, 2, \dots, n$ 中每一对顶点 (t, u) 之间，我们给

出 N_c 中 t 与 u 之间的似无源导纳 \tilde{y}_{tu} , 它等于 N'_c 中 t 和 u 之间的 n 端短路转移导纳函数的负数 (参考点是 t, u 以外的点);

$$\tilde{y}_{ik} = \frac{J'_i}{v'_k} \left| \begin{array}{c} \varphi_{1i} - \varphi_{2i} - \dots - \varphi_{ni} = 0 \\ \varphi'_{ki} \neq 0 \end{array} \right| = N'_k \text{ 中的}$$

$$\frac{J'_k}{v'_i} \left| \begin{array}{c} \varphi_{1i} - \varphi_{2i} - \dots - \varphi_{ni} = 0 \\ \varphi'_{ki} \neq 0 \end{array} \right| \quad (8-8-13)$$

其中 J'_p 是从顶点 $1, 2, \dots, n$ 中除 t 和 u 以外任选作参考点的 r 流入顶点 p 的电流, v'_p 是从顶点 p 到所选作参考点 r 的电压, $p = t, u$.

为了给出 n 端短路网络函数的拓扑公式, 我们采用如下符号。

定义8-8-1 关于一个线图 G 的符号 $W_{n_1, n_2, \dots, n_t}^{n_1, n_2, \dots, n_t}$ 定义为

$$W_{n_1, n_1 | \overline{n_2 \dots n_k}} = \sum g_i \times (\text{完全 } k\text{-树 } t_{n_1, n_1 | \overline{n_2 \dots n_k}} \text{ 的树枝导纳乘积}) \quad (8-8-14)$$

这里符号 $t_{n_0, n_1 | \overline{n_2 \dots n_k}}$ 表示图 G 的一个子图, 当顶点 n_2, \dots, n_k 被合并时, 它连同一条外加的边 γ 变成一个完全树, 其中 γ 的电流边是从 n_0 接到 n_k , 而 γ 的电压边是从 n_1 接到 n_k .

定义8-8-2 对于线图 G 的符号 V_{j_1, j_2, \dots, j_n} 定义为

$$V_{\overline{n_1 n_2 \dots n_k}} = \sum e_j \times (\text{完全 } k\text{-树 } t_{\overline{n_1 n_2 \dots n_k}} \text{ 的树枝导纳乘积}) \quad (8-8-15)$$

其中子图 t_{x_1, x_2, \dots, x_k} 表示当顶点 x_1, x_2, \dots, x_k 被合并时, 它变成一个完全树.

用这些定义, 我们就可以给出 n 端短路网络函数的拓扑公

式。

考虑由式(8-8-12)给出的策动点函数

$$y_{un} = \frac{I_u}{U_u} \bigg|_{\substack{v_1, v_2, \dots, v_{n-1} = 0 \\ v_u \neq 0}} \quad (8-8-16)$$

在 N'_B 中将除 u 外的顶点 $1, 2, \dots, n$ 全部合并起来, 我们得到一个新的网络, 记为 $N'_B[p=n; p=1, 2, \dots, n-1, p \neq u]$ 。那么, 式(8-8-16)就简化成这个新网络 $N'_B[p=n; p=1, 2, \dots, n-1, p \neq u]$ 的开路策动点导纳函数。于是

$$y_{un} = \left\{ N'_B[p=n; p=1, 2, \dots, n-1, p \neq u] \text{ 的 } V_{u, u+n} \right\} \quad (8-8-17)$$

其中

$$V = \sum \sigma_j \times \{ N'_B[p=n; p=1, 2, \dots, n-1, p \neq u] \text{ 的完全树树枝导纳乘积} \} \quad (8-8-18)$$

因为 $N'_B[p=n; p=1, 2, \dots, n-1, p \neq u]$ 是由 N'_B 合并除 u 外的 $1, 2, \dots, n$ 各顶点得到的, 所以

$$N'_B[p=n; p=1, 2, \dots, n-1, p \neq u] \text{ 的 } V = N'_B \text{ 的 } V_{\overline{1 \ 2 \dots u-1 \ u+1 \dots n}} \quad (8-8-19)$$

$$\text{并且, } N'_B[p=n; p=1, 2, \dots, n-1, p \neq u] \text{ 的 } W_{u, u+n} = N'_B \text{ 的 } V_{\overline{1 \ 2 \dots n}} \quad (8-8-20)$$

因此

$$y_{un} = N'_B \text{ 的 } \frac{V_{\overline{1 \ 2 \dots u-1 \ u+1 \dots n}}}{V_{\overline{1 \ 2 \dots n}}} \quad (8-8-21)$$

注意, 这个等式的分子 $V_{\overline{1 \ 2 \dots u-1 \ u+1 \dots n}}$ 的下标不包含顶点 u 。这就是一个 n 端短路策动点导纳函数的拓扑公式。

式(8-8-9)以及式(8-8-19)中的导纳 y_{un} 可以看作

$$y_{tu} = N'_B[p=n; p=1, 2, \dots, n-1, p \neq t, u] \text{ 的 } \left. \frac{J_t}{v_u} \right|_{v_t=0} \quad (8-8-22)$$

其中 $N'_B[p=n; p=1, 2, \dots, n-1, p \neq t, u]$ 是 N'_B 合并除顶点 t 和 u 以外的 $1, 2, \dots, n$ 各顶点得到的。从式(8-6-8)和定义8-8-2, 我们知道

$$y_{tu} = \left. \frac{J_t}{v_u} \right|_{v_t=0} = N'_B[p=n; p=1, 2, \dots, n-1, p \neq t, u] \text{ 的 } \frac{-W_{n, t | 1 \dots t-1 \dots u-1 \dots u}}{V_{1 \dots n}} \quad (8-8-23)$$

我们有

$$y_{tu} = N'_B \text{ 的 } \frac{-W_{n, t | 1 \dots t-1 \dots u-1 \dots u}}{V_{1 \dots n}} \quad (8-8-24)$$

注意, 当 N'_B 不包含似有源元件 (包括互感耦合元件) 时, 这个等式变成

$$\tilde{y}_{tu} = \tilde{y}_{ut} = -y_{tu} = N'_B \text{ 的 } \frac{W_{n, t | 1 \dots t-1 \dots t+1 \dots u-1 \dots u}}{V_{1 \dots n}} \quad (8-8-25)$$

等效电流源也可以由拓扑公式得到。设 J_b 是在 N_B 中从参考点 n 流入到顶点 b 的电流源, 其中 $b \neq 1, 2, \dots, n-1$ 。那么从参考点 n 到顶点 t ($t=1, 2, \dots, n$), 对应于 J_b 的等效电流源 J_t 由等效变换给出。

因为

$$N'_B \text{ 的 } \left. \frac{J_t}{J_b} \right|_{v_1=v_2=\dots=v_{n-1}=0} = N'_B[p=n; p=1, 2, \dots, n-1, p \neq t] \text{ 的 } \left. \frac{J_t}{J_b} \right|_{v_t=0} \quad (8-8-26)$$

而且,

$$\begin{aligned}
 N_B''[p=n; p=1, 2, \dots, n-1, p \neq t] \text{ 的 } \left. \frac{J_t}{J_b} \right|_{v_1=0} \\
 = N_B''[p=n; p=1, 2, \dots, n-1, p \neq t] \text{ 的 } \left. \frac{J_{t \neq b}}{J_{b \neq t}} \right|_{v_1=0}
 \end{aligned}
 \quad (8-8-27)$$

其中 N_B'' 是从 N_B 中删去除 J_b 外的所有电流源得到的, $N_B''[p=n; p=1, 2, \dots, n-1, p \neq t]$ 是从 N_B'' 合并除顶点 t 外的顶点 $1, 2, \dots, n$ 得到的。式(8-8-27)的右端可以看作两个短路导纳函数的比值。因此由式(8-6-8), 我们有

$$\left. \frac{J_t}{J_b} \right|_{v_1=0} = N_B''[p=n; p=1, 2, \dots, n-1, p \neq t] \text{ 的 } \frac{W_{b, t | 1 \dots n}}{W_{t, t | n}} \quad (8-8-28)$$

或者

$$\left. \frac{J_t}{J_b} \right|_{v_1=v_2=\dots=v_{n-1}=0} = N_B' \text{ 的 } \frac{W_{b, t | 1 \dots 2 \dots t-1, t+1 \dots n}}{W_{1 \dots 2 \dots n}} \quad (8-8-29)$$

注意, 如果我们用式(8-8-29), 就必须对 N_B 中每一个电流源找出等效电流源 J_1, J_2, \dots, J_{n-1} 。

假定子网络 N_B 不但是由似无源元件组成, 而且在顶点 $1, 2,$

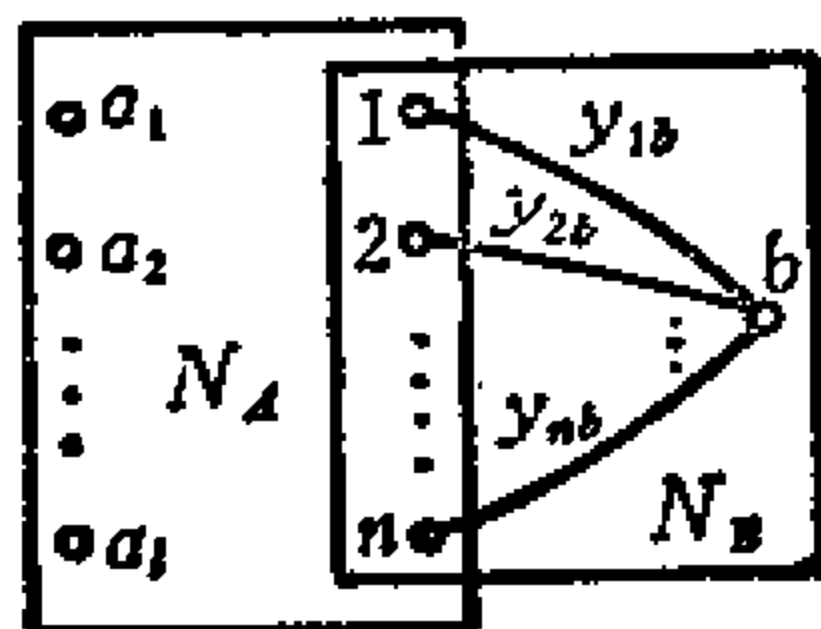


图8-8-5 一个有特殊结构的网络 N_B

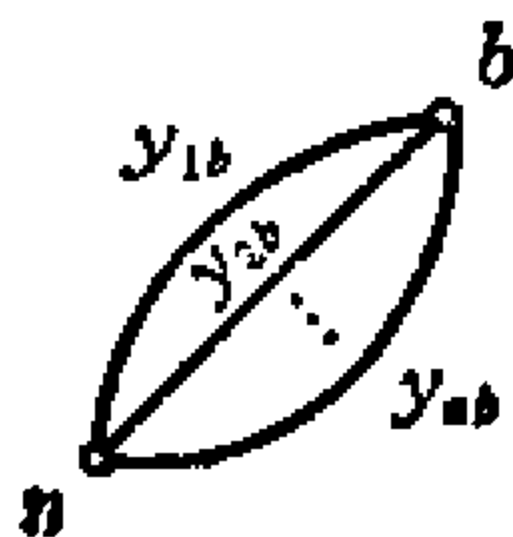


图8-8-6 合并了顶点 $1, 2, \dots, n$ 的 N_B

\dots, n (它们是 N_B 与子网络 N_A 的公共点)之外还有一个顶点 b , 如图8-8-5所示。为了简便, 令 y_{rb} 是顶点 r 和 b 之间的导纳, $r=1, 2, \dots, n$ 。我们可以看出, 式(8-8-25)中分母是 N_B 合并顶点 $1, 2, \dots, n$ 所得的网络的树枝导纳乘积之和。合并顶点 $1, 2, \dots, n$ 所得的网络如图8-8-6所示。容易看出, 这个网络的树枝导纳乘积之和恰好就是每个导纳之和。因此

$$V_{\overline{1 \ 2 \ \dots \ n}} = \sum_{r=1}^n y_{rb} \quad (8-8-30)$$

另一方面, $W_{ut | \overline{1 \ 2 \ \dots \ t-1 \ t+1 \ \dots \ u-1 \ u+1 \ \dots \ n}}$ 是 N_B 合并除顶点 t 和 u 外的顶点 $1, 2, \dots, n$ 所得的网络的2-树 $t_{2ut, n}$ 的树枝导纳乘积之和。合并除顶点 t, u 外的顶点 $1, 2, \dots, n$ 所得的网络如图8-8-7所示。因此

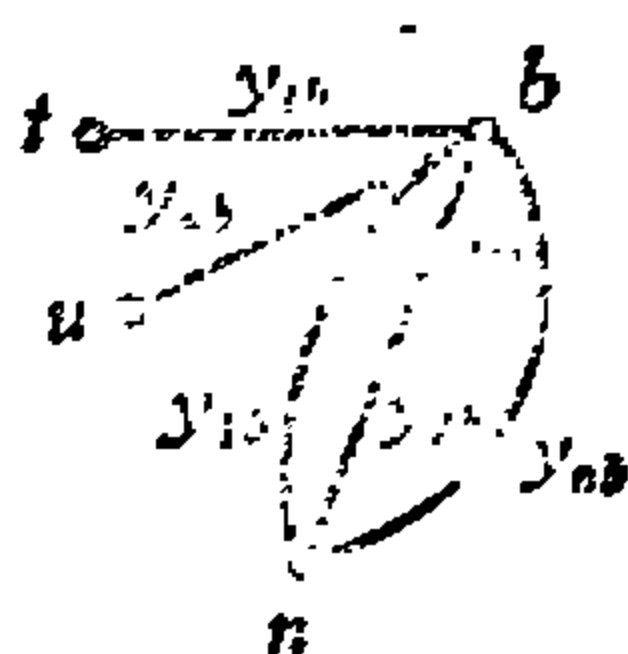


图8-8-7 合并除 t, u 外的顶点 $1, 2, \dots, n$ 的 N_B

$$W_{ut | \overline{1 \ 2 \ \dots \ t-1 \ t+1 \ \dots \ u-1 \ u+1 \ \dots \ n}} = y_{tb} y_{ub} \quad (8-8-31)$$

于是

$$y_{tu} = \frac{y_{tb} y_{ub}}{\left(\sum_{r=1}^n y_{rb} \right)} \quad (8-8-32)$$

这就是网孔-星形变换的公式。当 $n=3$ 时, 式(8-8-32)就是众所周知的 $t-\pi$ 变换。

习 题

1. 利用式(8-1-23), (8-3-11), (8-4-1)和(8-5-5)给出的拓朴公式求出图 P-8-1 中网络的开路策动点函数 I_{10}/V_{10} 和转移函数 I_{20}/V_{10} 。

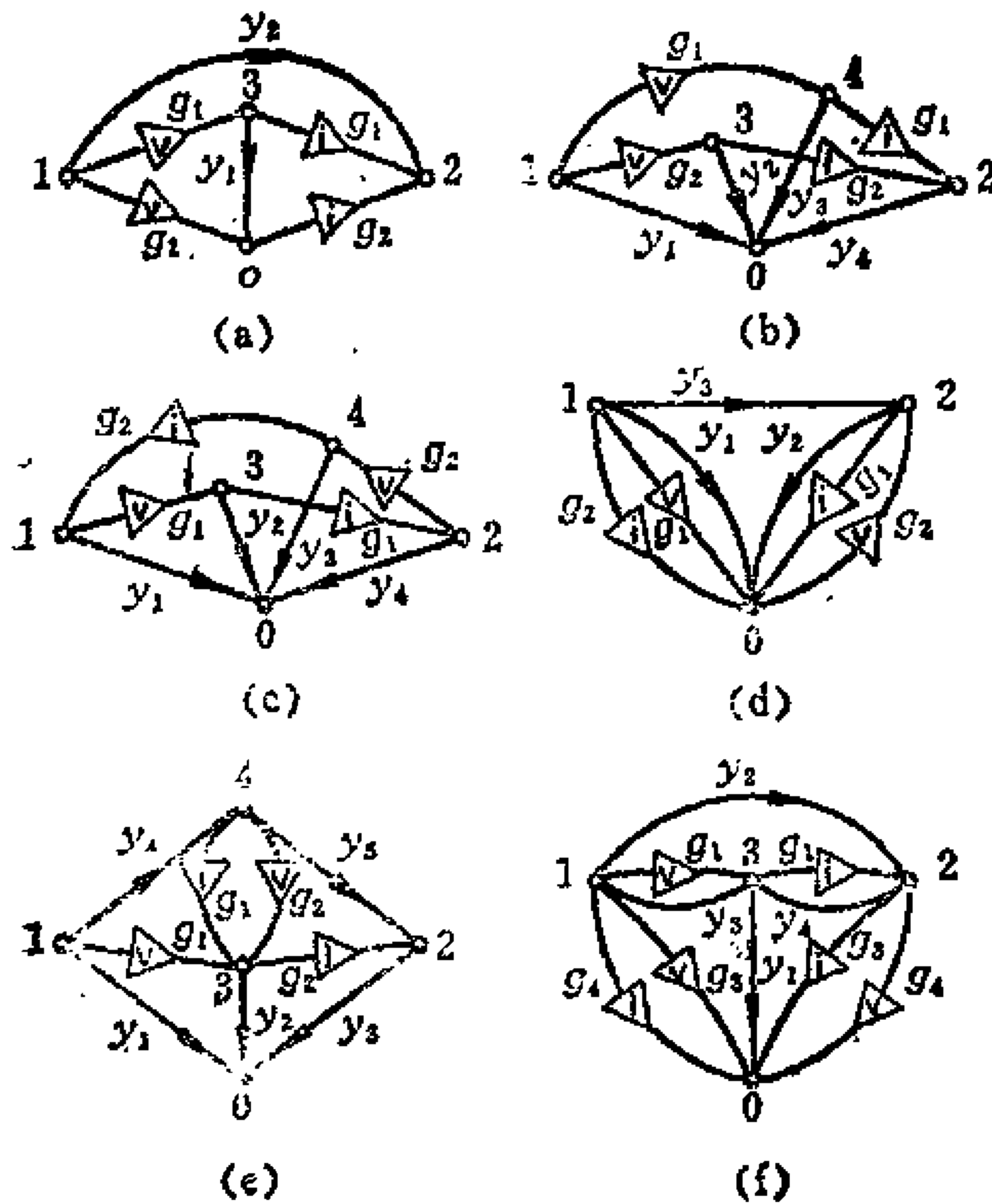
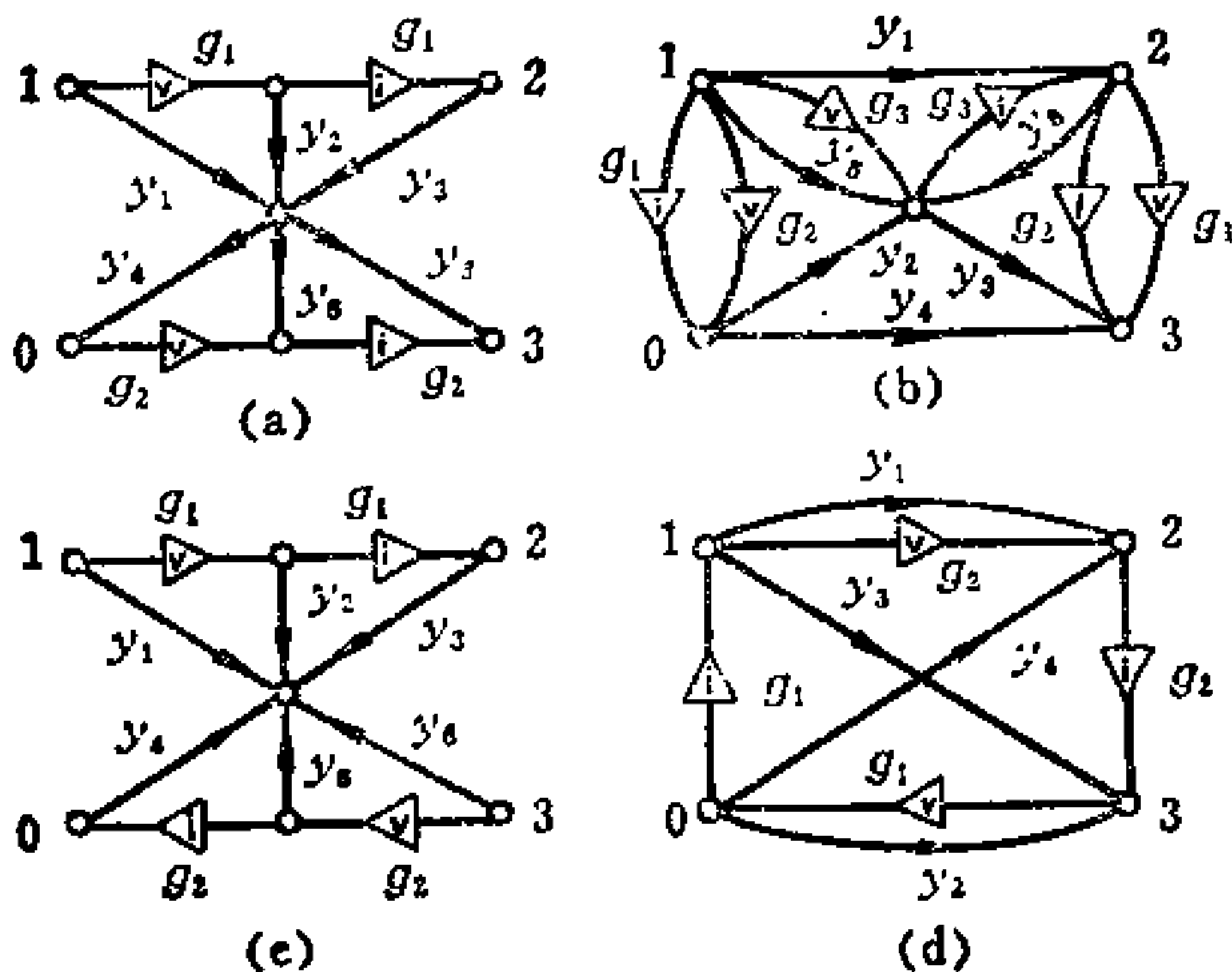


图 P-8-1 似有源网络

2. 利用式(8-1-23), (8-3-11)和(8-5-5)求出图P-8-2中网络的开路转移函数 I_{23}/V_{10} 。



图P-8-2 似有源网络

3. 利用式(8-4-1)和(8-5-5), 求出图P-8-2中网络的电压比 V_{23}/V_{10} 。

4. 利用似有源网络的拓扑公式〔式(8-1-23), (8-3-11)和(8-5-5)〕证明对于似无源网络式(7-5-60)给出的拓扑公式 $I_{23}/V_{10} = V/(W_{12,30} - W_{13,20})$

提示: 一个包含边 $y_{23,10}$ 的树或在 $W_{12,30}$ 中, 或在 $W_{13,20}$ 中, 其中 $y_{23,10}$ 的电流边是从顶点 2 到顶点 3, 而 $y_{23,10}$ 的电压边是从顶点 1 到顶点 0。

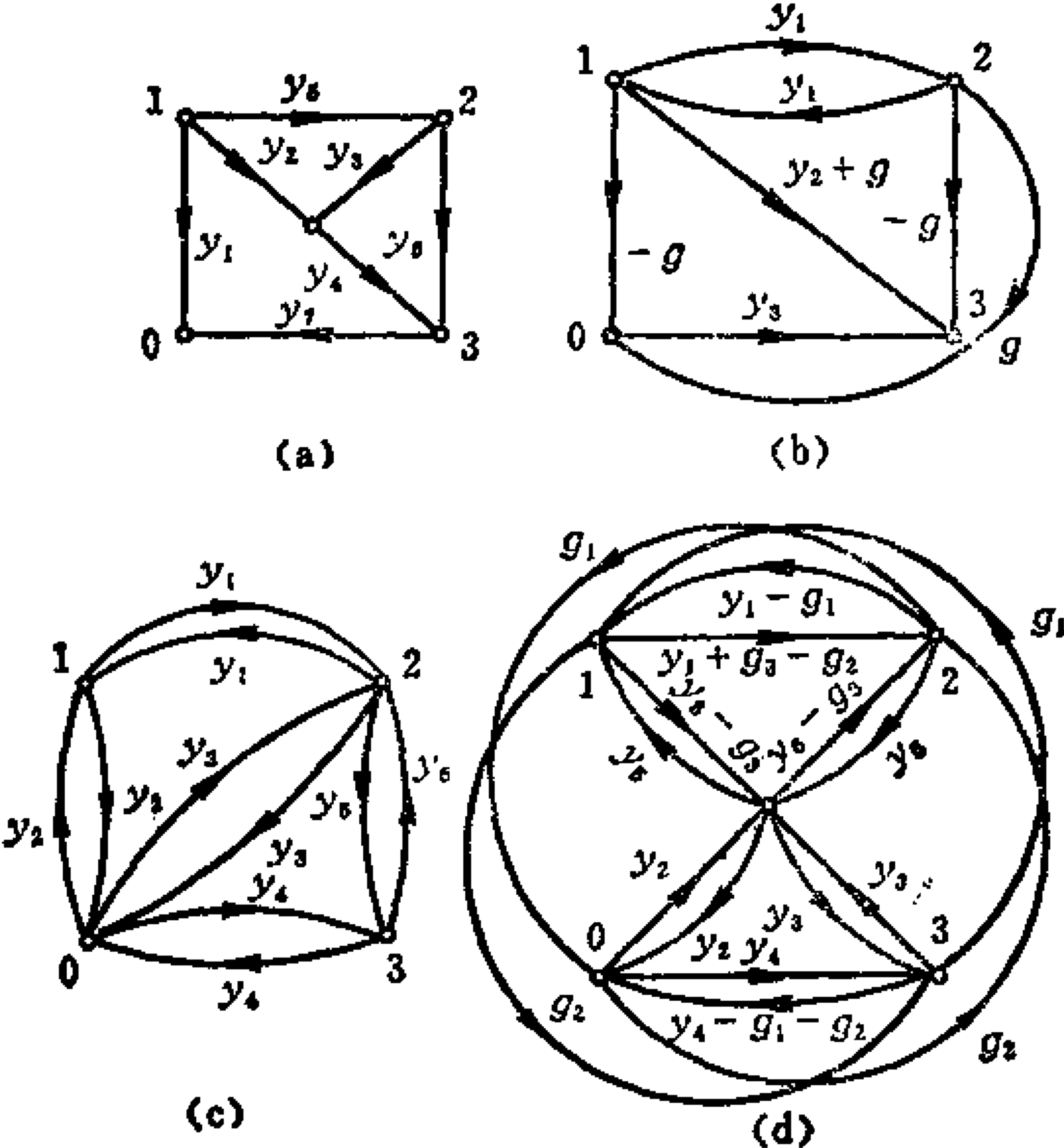
5. 说明 $B_e Z B_i^t$ 是一个网络的网孔阻抗矩阵。其中 B_e 和 B_i^t 分别为电压图和电流图的回路矩阵, Z 是阻抗对角矩阵 (阻抗 j

等于导纳 y 的倒数)。

6. 证明或否定以下说法：为了确定一个完全树的符号，我们将所有似无源元件短路，然后求所得图的符号置换。换句话说，一个完全树的符号仅取决于这个完全树的似有源元件。

7. 先将网络变成单向网络，再利用式(8-7-22)求出图 P-8-1 中网络的开路策动点函数 I_{10}/V_{10} 和开路转移函数 I_{20}/V_{10} 。

8. 推导一种求单向网络电压比的方法，并用此法求出图 P-8-8 中单向网络的电压比 V_{23}/V_{10} ，以检验你的方法正确与否。



图P-8-8 单向导纳网络

9. 当单向网络没有相消项时, 找出公式

$$\Delta = \sum \text{有向树 } t_0 \text{ 树枝导纳乘积}$$

成立的条件。

10. 推导在有固定参考点的单向网络中求有向树数目的公式。

11. 推导一个单向网络的网孔阻抗矩阵行列式的公式。

12. 证明式(8-7-23)。

13. 参照式(8-7-23), 推导 Δ_{ij} 的拓扑公式。

14. 推导单向网络的短路网络函数的公式。

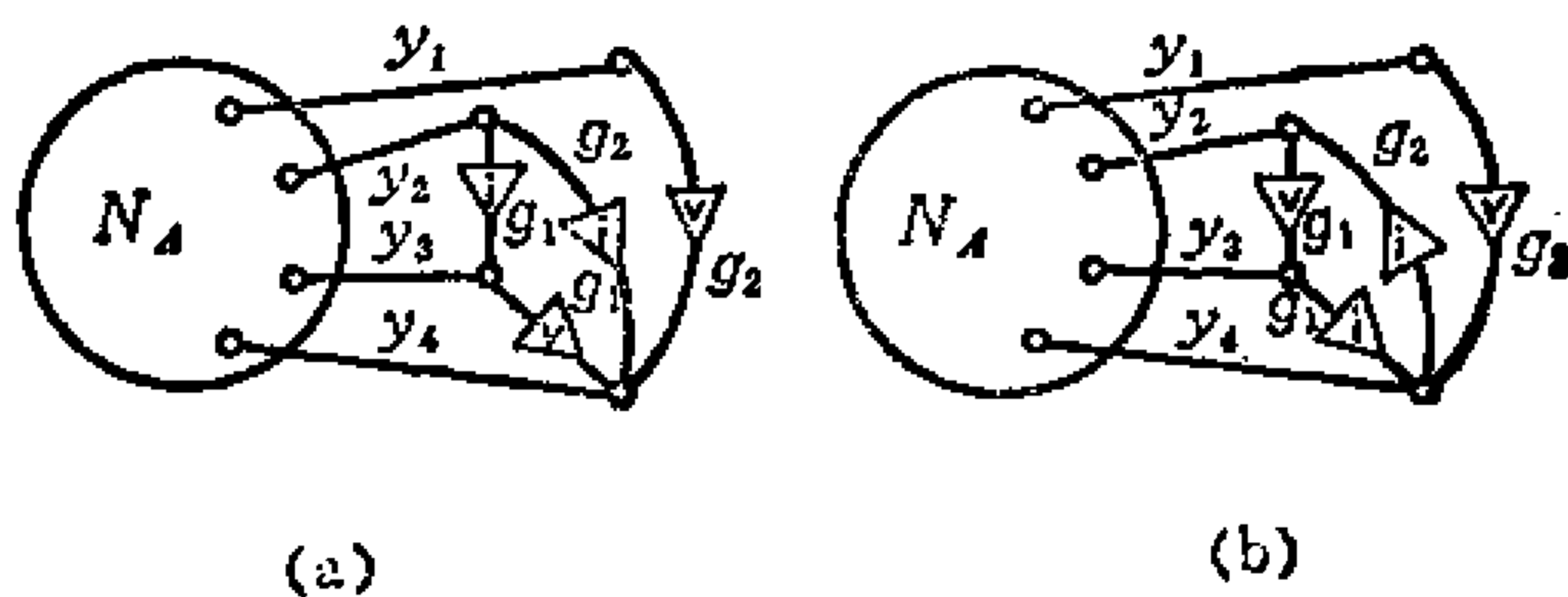


图 P-8-15

15. 利用式(8-8-9), (8-8-10)和(8-8-12), 求出图 P-8-15中网络的等效网络。

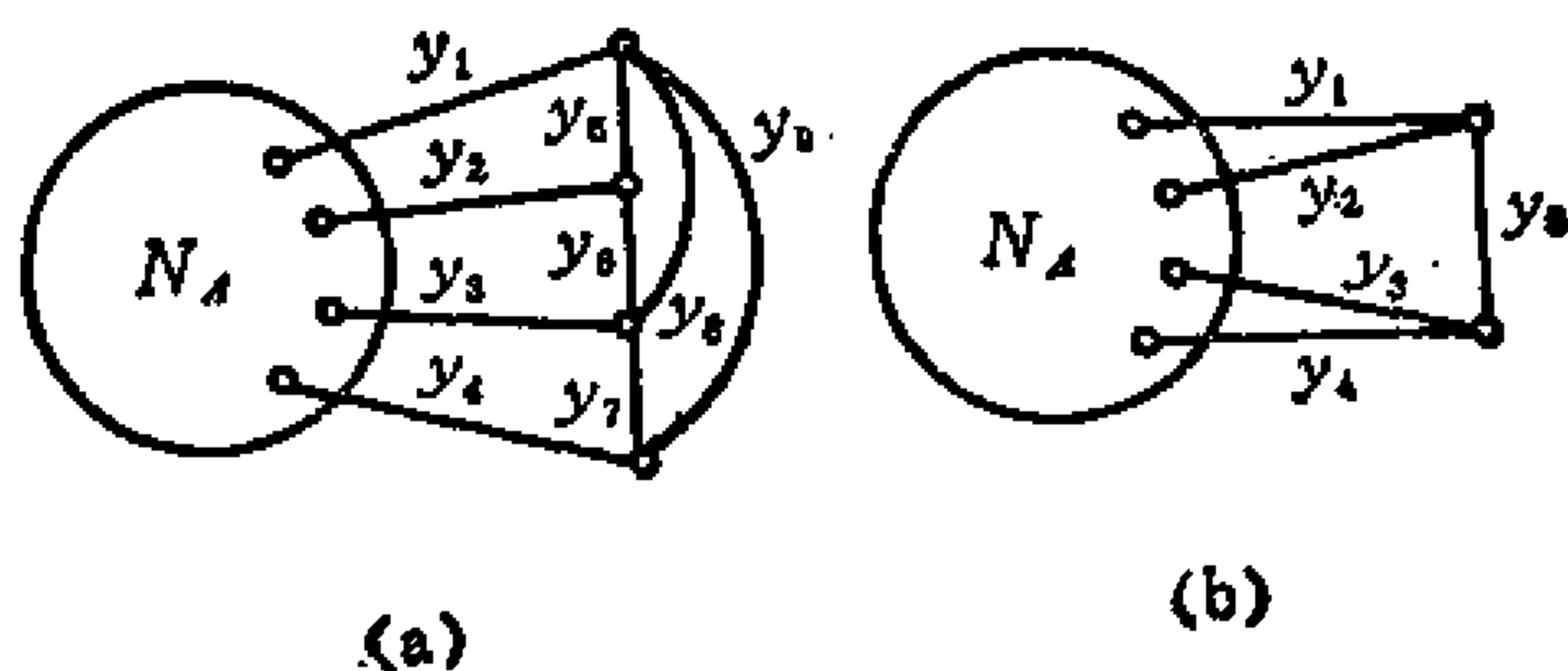
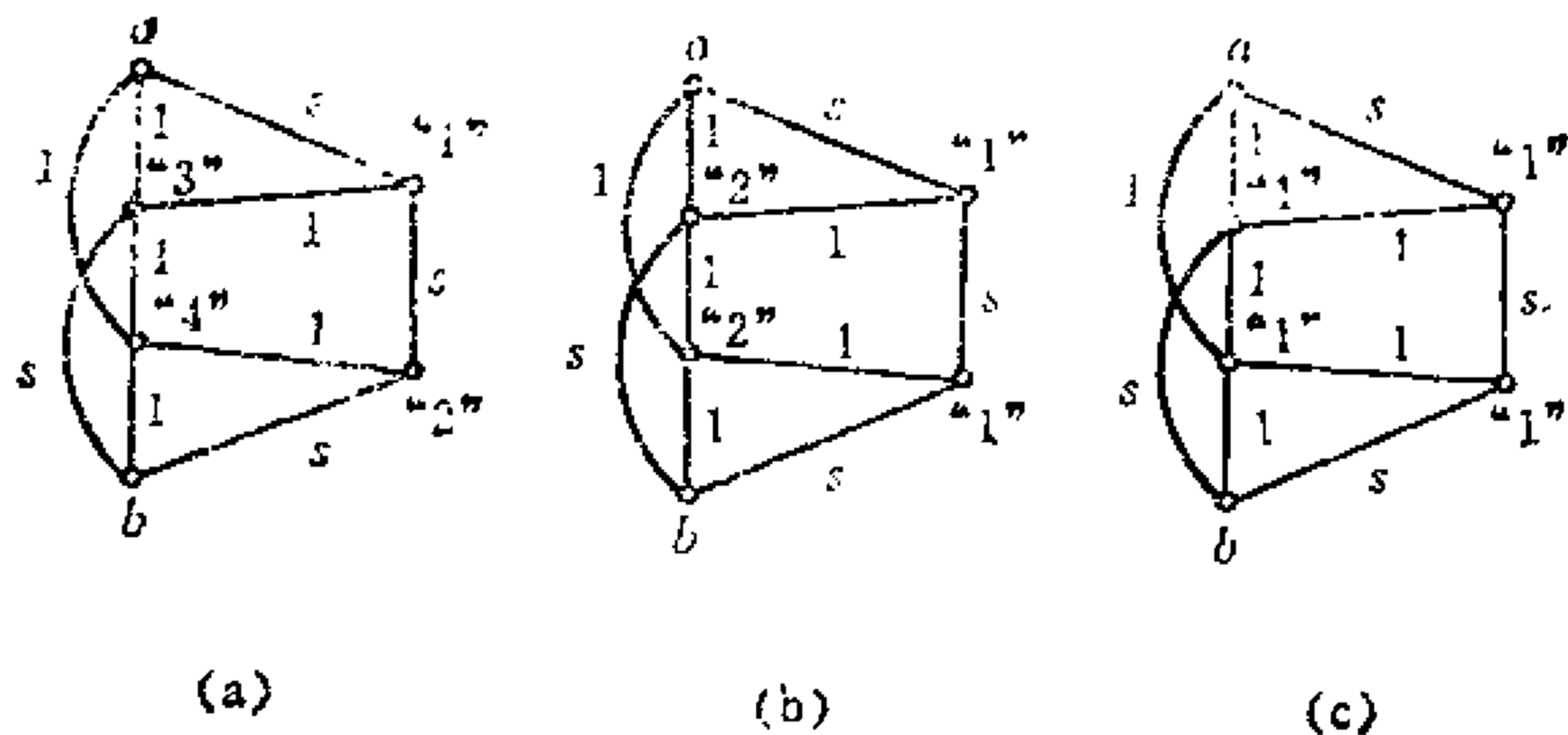


图 P-8-16

16 利用式(8-8-12)和(8-8-13), 求出图P-8-16中网络的等效网络。

17. 求出图P-8-17中网络的开路策动点函数 V_{ab}/I_{ab} , 逐次运用式(8-8-21)以及式(8-8-25)或(8-8-32), 使标“1”的顶点首先被移去, 然后用一步运算移去所有标“2”的顶点, 接着移去标“3”的顶点, 最后移去标“4”的顶点。



图P-8-17

第九章 树的生成

9-1 生成树的必要性

考虑矩阵

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \quad (9-1-1)$$

M 的行列式能表示为

$$|M| = \sum_{(j)} \delta_{j_1 j_2 \cdots j_n i_1 i_2 \cdots i_n} m_{2j_2} \cdots m_{ni_n} \quad (9-1-2)$$

我们可以看出，只要 M 的元素互不相同，上式中任意两项 $m_{1j_1} m_{2j_2} \cdots m_{ni_n}$ 与 $m_{1j'_1} m_{2j'_2} \cdots m_{nj'_n}$ 是不同的。但是，如果 M 是一个节点导纳矩阵（或其他任一导纳矩阵 $Q_1 Y Q_2^t$ ，这里 Q_1 和 Q_2 都是割集矩阵）。导纳 y 可以在不止一项中出现。因此，当我们展开这个矩阵的行列式时，一般说来，有许多项可以互相抵消。例如，图9-1-1中网络的节点导纳矩阵是

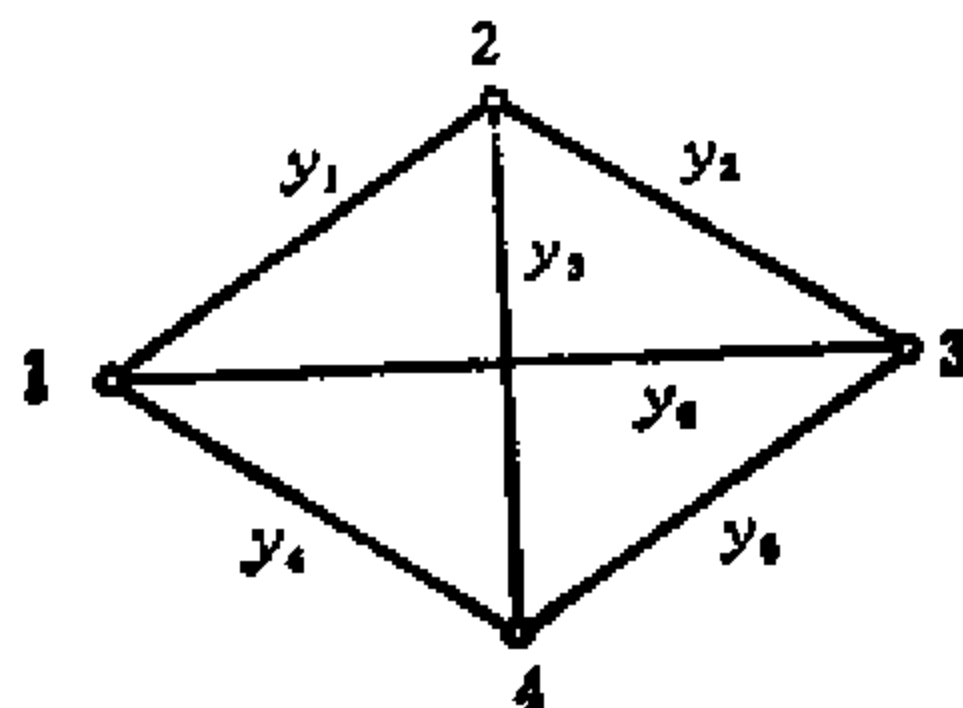


图9-1-1 一个网络

$$AY A' = \begin{bmatrix} y_1 + y_4 + y_6 & -y_1 & -y_6 \\ -y_1 & y_1 + y_2 + y_3 & -y_2 \\ -y_6 & -y_2 & y_2 + y_5 + y_6 \end{bmatrix} \quad (9-1-3)$$

这个矩阵的行列式是

$$\begin{aligned} |AY A'| &= (y_1 + y_4 + y_6)[(y_1 + y_2 + y_3)(y_2 + y_5 + y_6) - y_2^2] \\ &\quad + y_1[(-y_1)(y_2 + y_5 + y_6) - y_2 y_6] \\ &\quad - y_6[y_1 y_2 + y_6(y_1 + y_2 + y_3)] \\ &= y_1^2 y_2 + y_1^2 y_5 + y_1^2 y_6 + y_1 y_2^2 + y_1 y_2 y_5 + y_1 y_2 y_6 \\ &\quad + y_1 y_2 y_3 + y_1 y_3 y_5 + y_1 y_3 y_6 + y_1 y_2 y_4 + y_1 y_4 y_5 \\ &\quad + y_1 y_4 y_6 + y_2^2 y_4 + y_2 y_4 y_5 + y_2 y_4 y_6 + y_2 y_3 y_4 \\ &\quad + y_3 y_4 y_5 + y_3 y_4 y_6 + y_1 y_2 y_6 + y_1 y_5 y_6 + y_1 y_6^2 \\ &\quad + y_2^2 y_6 + y_2 y_5 y_6 + y_2 y_6^2 + y_2 y_3 y_6 + y_3 y_5 y_6 \\ &\quad + y_3 y_6^2 - y_1 y_2^2 - y_2^2 y_4 - y_2^2 y_6 - y_1^2 y_2 - y_1^2 y_5 \\ &\quad - y_1^2 y_6 - y_1 y_2 y_6 - y_1 y_2 y_6 - y_1 y_6^2 - y_2 y_6^2 - y_3 y_6^2 \\ &= y_1 y_2 y_5 + y_1 y_2 y_3 + y_1 y_3 y_5 + y_1 y_3 y_6 + y_1 y_2 y_4 \\ &\quad + y_1 y_4 y_5 + y_1 y_4 y_6 + y_2 y_4 y_5 + y_2 y_4 y_6 + y_2 y_3 y_4 \\ &\quad + y_3 y_4 y_5 + y_3 y_4 y_6 + y_1 y_5 y_6 + y_2 y_5 y_6 + y_2 y_3 y_6 \\ &\quad + y_3 y_5 y_6 \end{aligned}$$

其中有许多项被相消掉了。由此式我们可以看出，前面给出的网络（除单向网络外的所有网络）的拓扑公式的一个优点就是，只要所给网络的导纳互不相同，就不会有这些相消项。

我们前面研究的网络拓扑分析要求知道网络的所有的树。假定我们有一个由 n_v 个顶点， n_e 条边组成的网络，为了得到所有的树，要检查 $n_v - 1$ 条边的所有可能组合，这样我们必须检验

$\binom{n_e}{n_v - 1}$ 个边集合。例如，对于有 5 个顶点和 10 条边的完全图来

说，4 条边的集合有 $\binom{10}{4} = 210$ 个，然而，其中的树有 $5^3 = 125$

个。对于 6 个顶点的完全图来说，5 条边的集合有 3003 个，但其中仅有 $6^4 = 1296$ 个树。7 个顶点的完全图有 6 条边的集合 54264 个，但其中仅有 16807 个是树。

以上事实说明，对 $n_n - 1$ 条边的所有集合进行检验以得到所有的树不是一种简便的方法。理想的方法是按照一定的步骤生成树，而无须担心我们是否得到了所有的树；并且，这种系统的方法还应当保证，同一个树不会重复产生，因而用不着检查重复的树。这一章我们要研究两种生成树的方法，这两种方法都不会产生重复的树，而且步骤都相当简单。用这两种方法求所有的树所花的计算量也大致相同。

9-2 用初等树变换来生成树

设 t_1 和 t_2 是线图 G 的树，我们已经知道，如果 $t_1 - t_2$ 中有 k 条边，则 t_1 与 t_2 的距离是 k 。显然，如果 $t_1 - t_2$ 中有 k 条边，那么 $t_2 - t_1$ 中也有 k 条边。假定 t_1 与 t_2 的距离为 1，且

$$t_1 - t_2 = (e) \quad (9-2-1)$$

$$t_2 - t_1 = (e') \quad (9-2-2)$$

则 t_2 可以写为

$$t_2 = t_1 \oplus (e, e') \quad (9-2-3)$$

这就是从 t_1 到 t_2 的初等树变换。

考虑关于树 t_1 的一个基本割集 S 。假定 S 包含 t_1 中的边 e ，于是我们知道， t_1 中其他边都不会在 S 中。我们用符号 $S_e(t_1)$ 来表示这个割集，其中下标 e 表示边 e 在 $S \cap t_1$ 中，括号中的 t_1 表示割集 $S_e(t_1)$ 是关于树 t_1 的一个基本割集。因为在关于树 t_1 的基本割集中，包含边 e 的仅有一个，故 $S_e(t_1)$ 就是包含边 e 的关于树 t_1 的基本割集。设 (e_1, e_2, \dots, e_m) 是 t_1 ，则关于树 t_1 的基本割集的集合由 $S_{e_1}(t_1), S_{e_2}(t_1), \dots, S_{e_m}(t_1)$ 组成。为了简单，我们

用 m 代替 $n_e - 1$ 。

假定 $S_e(t_1)$ 由边 e, a_1, a_2, \dots, a_k 组成，又假定树 t_2 与 t_1 距离为 1 且不包含边 e 。设

$$t_2 - t_1 = (b) \quad (9-2-4)$$

则将 b 添加到树 t_1 中，就会得到一个包含边 e 的回路。于是，据基本割集的定义，边 b 必在 $S_e(t_1)$ 中。

定理9-2-1 设 t_1 和 t_2 是树，且二者距离为 1。又设

$$t_1 - t_2 = (e) \quad (9-2-5)$$

$$t_2 - t_1 = (b) \quad (9-2-6)$$

则边 b 必在 $S_e(t_1)$ 中。反之，若边 b 在 $S_e(t_1)$ 中，则 $t_1 \oplus (e, b)$ 是树。

现在，我们把定理9-2-1推广。

定理9-2-2 对于树 t_0 ，设 t_1, t_2, \dots, t_p 是所有使

$$t_0 - t_r = (e) \quad r = 1, 2, \dots, p \quad (9-2-7)$$

的树，又设

$$t_r - t_0 = (b_r) \quad r = 1, 2, \dots, p \quad (9-2-8)$$

则 $S_e(t_0) = (e, b_1, b_2, \dots, b_p) \quad (9-2-9)$

反之，假设 $S_e(t_0)$ 由式9-2-9给出，则对 $r = 1, 2, \dots, p, t_0 \oplus (e, b_r)$ 是满足式(9-2-7)的全部树。

例9-2-1 考虑图9-1-1中的线图，设 t_0 是 (y_1, y_2, y_3) ，则树 $t_1 = (y_2, y_3, y_4)$ 及 $t_2 = (y_2, y_3, y_6)$ 是满足定理9-2-2中关于 y_1 条件的全部树。即

$$t_0 - t_1 = (y_1)$$

$$t_0 - t_2 = (y_1)$$

因此，基本割集 $S_{y_1}(t_0) = (y_1, y_4, y_6)$ 。

运用定理9-2-2，我们可以根据已知的关于树 t_0 的基本割集，得到所有与树 t_0 距离为 1 的树。这可以用下一个例子来说明。

例9-2-2 考虑图9-1-1中的线图，关于树 $t_0 = (y_1, y_2, y_3)$ 的

基本割集的集合包括:

$$S_{y_1}(t_0) = (y_1, y_2, y_6)$$

$$S_{y_2}(t_0) = (y_2, y_5, y_6)$$

$$S_{y_3}(t_0) = (y_3, y_4, y_5)$$

于是, 所有与 t_0 距离为 1 的树如下:

由 $S_{y_1}(t_0)$,

$$t_1 = t_0 \oplus (y_1, y_4) = (y_2, y_3, y_4)$$

$$t_2 = t_0 \oplus (y_1, y_6) = (y_2, y_3, y_6)$$

由 $S_{y_2}(t_0)$,

$$t_3 = t_0 \oplus (y_2, y_5) = (y_1, y_3, y_5)$$

$$t_4 = t_0 \oplus (y_2, y_6) = (y_1, y_3, y_6)$$

由 $S_{y_3}(t_0)$,

$$t_5 = t_0 \oplus (y_3, y_4) = (y_1, y_2, y_4)$$

$$t_6 = t_0 \oplus (y_3, y_5) = (y_1, y_2, y_5)$$

现在, 我们来定义树的集合 T^c .

定义9-2-1 $T^c = \{t_0 \oplus (e, b); b \in S_e(t_0), b \neq e\}$ (9-2-10)

由此记号, 我们有引理9-2-1.

引理9-2-1 与树 t_0 距离为 1 的每个树恰在以下集合的一个之中, 这里 $t_0 = (e_1, e_2, \dots, e_m)$:

$$T^{c_1}, T^{c_2}, \dots, T^{c_m}$$

运用定理9-2-2, 证明是容易的. 注意由于 T^c 中的每一个树 t 是由替换 t_0 中的边 e_r 得到的, 故树 t 不可能包含边 e_r . 另一方面, 因为 T^c 中的树 t 与 t_0 距离为 1, 故 t_0 中除 e_r 外所有的边都在 t 中. 因此, 若 $s \neq r$, 则树 t 不可能在 T^{c_s} 中. 这样, 对 $k = 1, 2, \dots, m$, T^{c_k} 中所有的树都与 t_0 不同.

一般地说, $T^{c_1}, T^{c_2}, \dots, T^{c_m}$ 中的树再加上 t_0 还不是一个线图 G 中所有的树. 如果我们取出在这些集合中之一的 (比如说 T^{c_1}) 每

一个树 t ，求出所有和 t 距离为 1 的树，我们就可能求出更多的树。

为了考查这一点，设 $\underline{T}^{e_1 e_2}$ 为如下定义的树的集合：

$$\underline{T}^{e_1 e_2} = \{t' \oplus (e_1, b); b \in S_{e_1}(t'), t' \in T^{e_1}, b \neq e_1\} \quad (9-2-11)$$

例如，从例 9-2-2 中的 $T^{y_1} = \{(y_2, y_3, y_4), (y_2, y_3, y_6)\}$ ，这里 $t_0 = (y_1, y_2, y_3)$ ，我们可以得到 $\underline{T}^{y_1 y_2}$ 如下。在图 9-1-1 的线图中， $t_1 = (y_2, y_3, y_4)$ ，割集 $S_{y_2}(t_1)$ 是

$$S_{y_2}(t_1) = (y_2, y_5, y_6)$$

而割集 $S_{y_2}(t_2)$ （这里 $t_2 = (y_2, y_3, y_6)$ ）是

$$S_{y_2}(t_2) = (y_1, y_2, y_4, y_5)$$

注意， $S_{y_2}(t_1)$ 和 $S_{y_2}(t_2)$ 分别是关于树 t_1 和树 t_2 的基本割集，并且，边 y_2 必然在这两个基本割集中。因此，集合 $\underline{T}^{y_1 y_2}$ 由以下的树组成：

$$\left. \begin{aligned} t'_1 &= t_1 \oplus (y_2, y_6) = (y_3, y_4, y_5) \\ t'_2 &= t_1 \oplus (y_2, y_5) = (y_3, y_4, y_6) \end{aligned} \right\} \text{由 } S_{y_2}(t_1) \text{ 得到}$$

$$\left. \begin{aligned} t'_3 &= t_2 \oplus (y_2, y_1) = (y_1, y_3, y_6) \\ t'_4 &= t_2 \oplus (y_2, y_4) = (y_3, y_4, y_6) \\ t'_5 &= t_2 \oplus (y_2, y_5) = (y_3, y_5, y_6) \end{aligned} \right\} \text{由 } S_{y_2}(t_2) \text{ 得到}$$

对于这个集合 $\underline{T}^{y_1 y_2}$ ，有两个问题，一个是 t'_3 与 t_0 的距离为 1，这样 t'_3 就在集合 T^{y_1} 、 T^{y_2} 和 T^{y_3} 的一个之中。第二个问题是由 t_1 得到的树 t'_2 和由 t_2 得到的树 t'_4 相同。因此，为了确实只得到与 t_0 的距离为 2 的树，我们还必须找出更多的限制条件。

定义 9-2-2

$$T^{e_1 e_2} = \{t' \oplus (e_2, b); b \in S_{e_2}(t') \cap S_{e_2}(t_0), t' \in T^{e_1}, b \neq e_2\} \quad (9-2-12)$$

例如，由例 9-2-1 和 9-2-2 中的 $S_{y_1}(t_1)$ 和 $S_{y_2}(t_0)$ 得

$$S_{y_1}(t_1) \cap S_{y_2}(t_0) = (y_2, y_5, y_6) \cap (y_2, y_5, y_6) = (y_2, y_5) y_6$$

故 t'_1 和 t'_2 在 $T^{y_1 y_2}(t_0)$ 中。另一方面，

$$S_{y_2}(t_2) \cap S_{y_2}(t_0) = (y_1, y_2, y_4, y_5) \cap (y_2, y_5, y_6) = (y_2, y_5)$$

因此, 在 t'_1, t'_4 和 t'_5 中, 只有 t'_5 在 $T^{y_1 y_2}$ 中, 即

$$T^{y_1 y_2} = \{(y_3, y_4, y_5), (y_3, y_4, y_6), (y_3, y_5, y_6)\}$$

因为 $S_{e_2}(t_0)$ 是关于树 t_0 的包含边 e_2 的基本割集, 而边 e_1 和 e_2 都在 t_0 中, 故割集 $S_{e_2}(t_0)$ 不包含边 e_1 . 于是, $S_{e_2}(t') \cap S_{e_2}(t_0)$ 也不包含边 e_1 . 因此不可能用边 e_1 去替换边 e_2 来得到 $T^{e_1 e_2}$ 中的树. 这就说明, $T^{e_1 e_2}$ 中每一个树都包含 t_0 中除 e_1 和 e_2 之外的所有边, 故 $T^{e_1 e_2}$ 中的每一个树与 t_0 距离为 2.

一般地说, 我们定义集合 $T^{e_1 e_2 \cdots e_k}$ 如下.

定义9-2-3

$$T^{e_1 e_2 \cdots e_{k-1} e_k} = \{t' \oplus (e_k, b); b \in S_{e_k}(t') \cap S_{e_k}(t_0), t' \in T^{e_1 e_2 \cdots e_{k-1}}, b \neq e_k\} \quad (9-2-13)$$

其中 $t_0 = (e_1, e_2, \cdots, e_m), k \leq m$.

t_0 称为参考树. 我们将要说明, 从 t_0 出发, 根据式(9-2-13), 可以生成所有的树. 换句话说, 按照式(9-2-13)生成所有的树的步骤如下. 首先, 我们生成第一个树 $t_0 = (e_1, e_2, \cdots, e_m)$, 以它作为参考树. 然后用基本割集 $S_{e_i}(t_0)$ 中的弦去替换枝 e_i , 生成类 T^{e_i} , 这里 $i = 1, 2, \cdots, m$. 取这些类 T^{e_i} 中的每一个, 对于 $i < j \leq m$, 用弦 $e_k \in S_{e_j}(t) \cap S_{e_j}(t_0)$ 替换枝 e_j . 然后, 我们又从 $T^{e_i e_j}$ 出发, 生成 $T^{e_i e_j e_k}$, 这里 $i < j < k \leq m$, 且每一次都要求弦是在关于当前的 (即由它出发的) 树与参考树的基本割集之中. 现在, 我们可以说明两个事实. 第一, 我们可以按照这个过程生成所有的树. 第二, 不会发生重复. 为了证明这两个事实, 我们采用如下的定义.

定义9-2-4 设 t 和 t' 是两个树, t_0 是参考树. 如果

1. $e_j \notin t', e_i \in t' \cap t_0$ (显然 $e_j \neq e_i$).
2. $e_j \in S_{e_i}(t') \cap S_{e_i}(t_0)$

则称边的有序对 (e_i, e_j) 关于 t' 和 t_0 具有前向性质.

如果

1. $e_i \in t, e_i \in t_0, e_i \neq e_j$.
2. $e_i \in S_{e_j}(t), e_j \in S_{e_i}(t_0)$.

则称边的有序对 (e_i, e_j) 关于 t 和 t_0 具有后向性质.

运用式(9-2-13),我们可以看出,如果 (e_i, e_j) 关于 t' 和 t_0 具有前向性质,那么,通过上述步骤,用 e_j 替换 e_i ,我们可以向前得到一个新的树 t'' .如果 (e_i, e_j) 关于 t 和 t_0 具有后向性质,则用 e_i 去替换 t 中的边 e_j ,就产生一个新的树 t''' .从这个新的树 t''' 出发,通过以上步骤,又可以生成 t .这就是说,我们可以通过上述步骤向后生成树 t''' ,它与参考树 t_0 有一条以上的公共边.为了证明这一结论的正确性,我们只需要注意,如果我们从 t 用 e_i 替换 e_j 来生成 t''' ,相应的基本割集不变,即

$$S_{e_j}(t) = S_{e_j}(t''') \quad (9-2-14)$$

现在我们要说明,如果 t_0 是参考树,而 t 是任意一个树,我们总可以找到一个树 t' ,使 t' 与 t_0 的公共边比 t 与 t_0 的公共边多一条,且 t 可以由 t' 通过上述步骤生成.于是根据归纳法,我们可以从参考树出发,通过上述步骤生成任何一个树.

定理9-2-3 设 t_0 是参考树, t 是任意一个树($t \neq t_0$).对于每一条边 $e_i \in t_0 - t$,存在一条边 $e_j \in t - t_0$,使得 (e_i, e_j) 关于 t 和 t_0 具有后向性质.因此存在一个树 t' ,使得 (e_i, e_j) 关于 t' 和 t_0 具有前向性质.

证明: 设 $C_{e_i}(t)$ 是由弦 e_i 产生出树 t 的基本回路,即 $C_{e_i}(t)$ 是一个由树 t 加上边 e_i 所构成的一个回路.因为 $S_{e_i}(t_0)$ 是一个割集, $S_{e_i}(t_0) \cap C_{e_i}(t)$ 包含偶数条边且非空,所以在交集中还有另一条边 e_j .因为 $e_j \in C_{e_i}(t)$,所以 $e_j \in t$ 并且 $e_j \in S_{e_i}(t)$.因为 $e_j \in S_{e_i}(t_0)$, $e_j \notin t_0$,因此 (e_i, e_j) 关于 t 和 t_0 具有后向性质.其余仿此证明. (证毕)

这样,一个线图的每一个树都能通过这一过程生成.然而,

如果 $S_{e_i}(t_0) \cap C_{e_i}(t)$ 包含两条以上的边, 则有可能多次生成 t . 如果我们不作某些限制, 那么重复是不可避免的, 这可从下例中看到.

例9-2-13 考虑图9-1-1中的线图. 设 t_0 是 (y_1, y_3, y_6) , 则

$$T^{y_1} = \{(y_3, y_4, y_5), (y_2, y_6, y_8)\}$$

$$T^{y_1 y_6} = \{(y_2, y_3, y_4), (y_3, y_4, y_6), (y_2, y_3, y_8)\}$$

因为

$$S_{y_3}(t_0) = (y_2, y_3, y_4, y_6) \text{ 和 } S_{y_3}(y_2, y_3, y_4) = (y_1, y_3, y_6, y_8)$$

据式(9-2-13), 对 $S_{y_3}(y_2, y_3, y_4) \cap S_{y_3}(t_0)$ 中除 y_3 外所有的 b , $(y_2, y_3, y_4) \oplus (y_3, b)$ 就是 (y_2, y_4, y_6) . 又因为 $S_{y_3}(y_3, y_4, y_6) = (y_1, y_2, y_3)$, 故对 $S_{y_3}(y_3, y_4, y_6) \cap S_{y_3}(t_0)$ 中除 y_3 外所有的 b , $(y_3, y_4, y_6) \oplus (y_3, b)$ 也是 (y_2, y_4, y_6) . 这样, 我们看到了在由式(9-2-13)得到的 $T^{y_1 y_3 y_6}$ 中就有重复的树.

假定我们采用序列 $(y_1 y_3 y_5)$, 即先形成 T^{y_1} , 后形成 $T^{y_1 y_3}$, 最后再形成 $T^{y_1 y_3 y_5}$ 来得到树 (y_2, y_4, y_6) , 则

$$T^{y_1 y_3} = \{(y_2, y_6, y_8), (y_2, y_4, y_6)\}$$

现在, 对 $S_{y_5}(y_2, y_6, y_8) \cap S_{y_5}(t_0)$ 中除 y_6 外所有的 b , $(y_2, y_6, y_8) \oplus (y_5, b)$ 不是树, 因为在这种情况下边 b 不存在. 而对 $S_{y_5}(y_2, y_4, y_6) \cap S_{y_5}(t_0)$ 中除 y_6 外所有的 b , $(y_2, y_4, y_6) \oplus (y_6, b) = (y_2, y_4, y_6)$. 这样, 在由 $T^{y_1 y_3}$ 通过式(9-2-13)得到的 $T^{y_1 y_3 y_5}$ 中, 就没有重复的树.

不重复地生成树的技巧基于以下基本事实.

引理9-2-2 设 e_i 是 t_0 中的一条边, 它与 t_0 中一个度数为 1 的顶点相连. 又设 t 是任意的一个树, $e_i \notin t$. 那末必定正好存在一条边 $e_j \in t$, 使得 (e_i, e_j) 关于 t 和 t_0 具有后向性质.

证明: 由于定理9-2-3的证明是那样地清楚, 我们仅需要说明 $S_{e_i}(t_0) \cap C_{e_i}(t)$ 中, 只包含两条边 e_i 和 e_j .

因为 e_i 是 t_0 的一条边, 并且与 t_0 中一个度数为 1 的顶点相

连, 所以 e_i 关于 t_0 的基本割集由与这个顶点 (在 t_0 中度数为 1, 且与 e_i 连接) 关联的边组成. 显然, 在这些边中只有一条在 $C_{e_i}(t)$ 中, 这是因为 $C_{e_i}(t)$ 的每一个顶点的度数为 2, e_i 是与该顶点相连的两条边中的一条, 这样, 只有 (e_i, e_i) 具有对于 t 和 t_0 的后向性质. (证毕)

这个引理保证了在 $T^{e_1 e_2 \cdots e_{k-1} e_k}$ 中对于任一个树 t , 如果边 e_k 与参考树 t_0 中度数为 1 的顶点相连, 那么在 $T^{e_1 e_2 \cdots e_{k-1}}$ 中只有一个树, 从它出发, 按照式(9-2-13)能得到树 t .

我们也注意到, 任何重复总是发生在同一类 $T^{e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_r}}$ 中. 换句话说, 如果

$$(i_1, i_2, \cdots, i_r) \neq (j_1, j_2, \cdots, j_p) \quad (9-2-15)$$

则 $T^{e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_r}} \cap T^{e_{j_1} e_{j_2} \cdots e_{j_p}} = \phi \quad (9-2-16)$

这个结果可以直接导出, 因为若 t 和 t' 是两个不同类的树, 则

$$t_0 - t = (e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_r}) \quad (9-2-17)$$

$$t_0 - t' = (e_{j_1}, e_{j_2}, \cdots, e_{j_p}) \quad (9-2-18)$$

由假设即知, 它们是不同的. 这就足以使我们找到避免在同一类中重复的一种步骤.

定义9-2-5 如果边的有序集 $(e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k})$ 的每一个子集 $(e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_r})$ ($r = 1, 2, \cdots, k$) 都由连通子图的边所组成, 则称边的有序集构成一个 M 序列.

大家知道, 一个树的边总可以排成一个 M 序列. 事实上, 如果开始的树 t_0 是由计算机生成的, 要将 t_0 的边排成 M 序列是很容易的. 由 M 序列的定义, 我们得到定理9-2-4.

定理9-2-4 设 $t_0 = (e_1, e_2, \cdots, e_m)$ 是参考树, 如果 $(e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_p})$ 是一个 M 序列, 则由 $T^{e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_{p-1}}}$ 按照式(9-2-13)生成的 $T^{e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_p}}$ 中的树全部是不同的. 其中 $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq m$.

证明: 因为对于第一步由 t_0 到 $T^{e_{i_1}}$ 来说, 结果是显然的, 于是我们可以作归纳法假设, 令 $T^{e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_{p-1}}}$ 中的树均不相同.

这样，如果这个类中的两个树由于替换了 e_{i_p} 而生成 $T^{e_1 e_2 \dots e_{i_p}}$ 中相同的树 t ，在这两种情况下，必然是用边 e_i 和 e_j 去替换 e_{i_p} 的。为了证明所需结果，只要证明对于类 $T^{e_1 e_2 \dots e_{i_p}}$ 中一个任意的树 t ，只有一条边 e_j 使得有序对 (e_{i_p}, e_j) 关于 t 和 t_0 具有后向性质，因为这样的 t 在 $T^{e_1 e_2 \dots e_{i_{p-1}}}$ 中就只有一个先前树 t_1 。为了证明这个结论，我们将线图变换成另一个图，其中 t 和 t_0 变成树 t' 和 t'_0 ，边 e_{i_p} 变成一条端边。然后由引理 9-2-2 来证明定理 9-2-4。

我们注意在 M 序列 $(e_1 e_2 \dots e_m)$ 中， e_{i_p} 后面的边是 t 和 t_0 的公共边（它们尚未被替换）。我们在所给的线图 G 中将这这些边短路，得到一个新的线图 G' 。设 t' 和 t'_0 分别是 t 和 t_0 在短路 $t \cap t_0$ 的所有边后剩下的子图，因为 t' 和 t'_0 是 G' 的树，这样，对于留下的树， e_{i_p} 的基本割集不受影响，即

$$S_{e_{i_p}}(t') = S_{e_{i_p}}(t) \quad (9-2-19)^*$$

$$S_{e_{i_p}}(t'_0) = S_{e_{i_p}}(t_0) \quad (9-2-20)$$

类似地， $T^{e_1 e_2 \dots e_{i_{p-1}}}$ 中的树去掉 $t \cap t_0$ 中的边变成 G' 中的树，且对这一类中任意的 t'_1 ， $S_{e_{i_p}}(t'_1)$ 不受影响。因此，用替换 e_{i_p} 的方法，在 G' 中产生的新树与 G 中的一样多。又由于 $(e_1 e_2 \dots e_m)$ 是一个 M 序列， $(e_1, e_2, \dots, e_{i_{p-1}})$ 和 $(e_1, e_2, \dots, e_{i_p})$ 都是连通的，且都不包含回路。故 e_{i_p} 是 t'_0 中的端边。因此，据引理 9-2-2，只有一条边 $e_j \in t'$ 使得 (e_{i_p}, e_j) 关于 t' 和 t'_0 具有后向性质。并且在 $T^{e_1 e_2 \dots e_{i_{p-1}}}$ 中只有一个树 t_1 不含 $t \cap t_0$ 中的边且能生成 t' 。这就说明，在 $T^{e_1 e_2 \dots e_{i_{p-1}}}$ 中只存在一个树 t_1 ，由它出发能生成 t 。（证毕）

我们用下面的例子来说明上述整个过程。

例 9-2-4 在 9-2-1 的线图中，经过以下步骤就将生成所有没

* 式 9-2-19 疑误，应删去。——译注

* 为了清楚起见，我们把原著此处的 t' 改成 t'_1 ，并把以下的叙述稍加更动。

——译注

有重复的树。

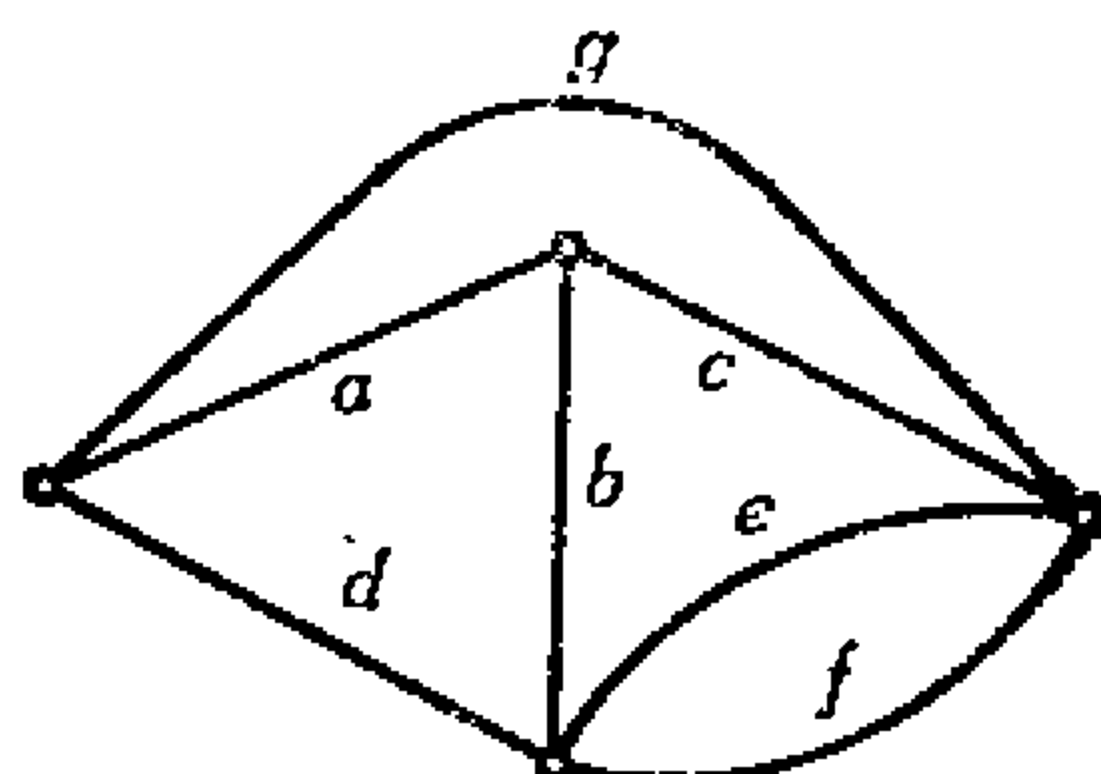


图9-2-1 线图G

第1步 取一个树 t_0 作为参考树。设

$$t_0 = (a, b, g)$$

在 t_0 中选取边的一个 M 序列。设 (abg) 就是所选的 M 序列。

第2步 关于 t_0 的基本割集是

$$S_a(t_0) = (a, c, d, e, f), S_b(t_0) = (b, d, e, f), S_g(t_0) = (c, e, f, g)$$

第3步 按照式(9-2-10)构成 T^a ;

$$\begin{aligned} T_a &= \{t_0 \oplus (a, e_i); e_i \in S_a(t_0), e_i \neq a\} \\ &= \{(b, c, g), (b, d, g), (b, e, g), (b, f, g)\} \end{aligned}$$

第4步 构成 T^{ab} ;

$$\begin{aligned} T^{ab} &= \{t' \oplus (b, e_i); e_i \in S_b(t') \cap S_b(t_0), t' \in T^a, e_i \neq b\} \\ &= \{(c, d, g), (c, e, g), (c, f, g)\} \end{aligned}$$

其中

$$S_b(b, c, g) \cap S_b(t_0) = (b, d, e, f) \cap (b, d, e, f) = (b, d, e, f)$$

$$S_b(b, d, g) \cap S_b(t_0) = (a, b, c) \cap (b, d, e, f) = (b)$$

$$S_b(b, e, g) \cap S_b(t_0) = (b)$$

$$S_b(b, f, g) \cap S_b(t_0) = (b)$$

第5步 构成 T^{abg} ;

$$T^{abg} = \{t' \oplus (g, e_i); e_i \in S_g(t') \cap S_g(t_0), t' \in T^{ab}, e_i \neq g\} \\ = \{(c, d, e), (c, d, f)\}$$

其中

$$S_g(c, d, g) \cap S_g(t_0) = (a, b, e, f, g) \cap (c, e, f, g) = (e, f, g)$$

$$S_g(c, e, g) \cap S_g(t_0) = (a, d, g) \cap (c, e, f, g) = (g)$$

$$S_g(c, f, g) \cap S_g(t_0) = (g)$$

第6步 构成 T^{ag} ;

$$T^{ag} = \{t' \oplus (g, e_i); e_i \in S_g(t') \cap S_g(t_0), t' \in T^a, e_i \neq g\} \\ = \{(b, c, d), (b, d, e), (b, d, f)\}$$

其中

$$S_g(b, c, g) \cap S_g(t_0) = (a, d, g) \cap (c, e, f, g) = (g)$$

$$S_g(b, d, g) \cap S_g(t_0) = (c, e, f, g) \cap (c, e, f, g) = (c, e, f, g)$$

$$S_g(b, e, g) \cap S_g(t_0) = (a, d, g) \cap (c, e, f, g) = (g)$$

$$S_g(b, f, g) \cap S_g(t_0) = (g)$$

第7步 构成 T^b ;

$$T^b = \{t_0 \oplus (b, e_i); e_i \in S_b(t_0), e_i \neq b\} \\ = \{(a, d, g), (a, e, g), (a, f, g)\}$$

第8步 构成 T^{bg} ;

$$T^{bg} = \{(a, c, d), (a, d, e), (a, d, f), (a, c, e), (a, c, f)\}$$

其中

$$S_g(a, d, g) \cap S_g(t_0) = (c, e, f, g) \cap (c, e, f, g) = (c, e, f, g)$$

$$S_g(a, e, g) \cap S_g(t_0) = (b, c, d, g) \cap (c, e, f, g) = (c, g)$$

$$S_g(a, f, g) \cap S_g(t_0) = (b, c, d, g) \cap (c, e, f, g) = (c, g)$$

第9步 构成 T^g ;

$$T^g = \{t_0 \oplus (g, e_i); e_i \in S_g(t_0), e_i \neq g\} \\ = \{(a, b, c), (a, b, e), (a, b, f)\}$$

G中所有的树就是类 $T^a, T^{ab}, T^{abg}, T^{ag}, T^b, T^{bg}, T^g$ 中的树再加上参考树 t_0 。

表面看来，在上面所给的过程中，最多要检验 $2^m - 1$ 个替换集合（这里 $m = n_s - 1$ ）。但是，我们注意到，如果任何一个替换产生了空集，接下来的替换就不需要再检验。因此，需要检验的数目可少于 $2^m - 1$ 。

在生成完全树（对有源网络而言）时，不论对电流图还是对电压图，我们都可以利用电流图的 M 序列，并允许所得的结果有相同的次序。在这种情况下，电压图的树将会出现重复，但这并不会使问题复杂化。对于有源网络来说，采用这种树的生成法有一个缺点，就是有可能生成超过需要的树。这是因为完全树的数目一般都远少于电流图或电压图中树的数目。

9-3 完全树的生成

这里，我们要介绍一种用修改割集矩阵的办法生成所有的完全树的过程。因为当电流图和电压图相同时，完全树就变成了树，所以这个过程对于生成一个线图中所有的树也适用。

设 Q_i 和 Q_v 分别是网络 G 的电流图 G_i 和电压图 G_v 的割集矩阵（或关联矩阵）。又设 Q_i 和 Q_v 的第 i 列都表示 G 的导纳 y_i 。对于 Q_i 和 Q_v 所作的如下运算称为初等运算：

1. 把一行加到另一行，或从一行中减去另一行。
2. 用 (-1) 乘一行。
3. 将两行互相交换位置。
4. 将两列互相交换位置。

结合运算 2 和 3，我们定义一个数 N 称为 M 数，用来表示我们为了使一个给定的矩阵成为所需的形式而用这两种运算的总次数。特别把 M 数 N_i 和 N_v 分别表示使割集矩阵（或关联矩阵） Q_i 和 Q_v 变成基本形式 $[Q_{i,11}U]$ 和 $[Q_{v,11}U]$ 所需要的运算次数，称为关于完全树 t_0 的基本 M 数，这里 t_0 对应于 $[Q_{i,11}U]$ 和 $[Q_{v,11}U]$

中的单位矩阵。

考虑一个完全树 t 。设 $A_i(t)$ 和 $A_v(t)$ 是 t 的电流图和电压图的关联矩阵，显然我们可以用初等运算把这两个矩阵变成单位矩阵，同时保持 $A_i(t)$ 和 $A_v(t)$ 的列之间的对应关系（也就是说，如果我们交换 $A_i(t)$ 的第 i 列和第 j 列，同时也交换 $A_v(t)$ 的第 i 列和第 j 列，反之亦然）。运算 1 不改变行列式的值，因此 $A_i(t) \cdot A_v(t)$ 的行列式等于

$$|A_i(t)| |A_v(t)| = (-1)^{N_i + N_v} \quad (9-3-1)$$

考虑关联矩阵 A_i 和 A_v ，其中

$$A_i = [A_{i_1} A_i(t)] \quad (9-3-2)$$

$$A_v = [A_{v_1} A_v(t)] \quad (9-3-3)$$

我们可用初等运算把这两个矩阵变成基本形式 $[Q_{i_1} U]$ 和 $[Q_{v_1} U]$ 。并且，为了使 $A_i(t)$ 和 $A_v(t)$ 变成基本形式中的单位矩阵，运算 2 和运算 3 对 A_i 用了 N_i 次，对 A_v 用了 N_v 次。因此，由式(8-1-23)给出的完全树 t 的符号等于 $(-1)^{N_i + N_v}$ 。

例9-3-1 设一个给定网络的关联矩阵 A_i 和 A_v 是

$$A_i = \begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$A_v = \begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

利用初等运算，我们能把这两个矩阵变成基本形式（基本割集矩阵）：

$$Q'_i = \begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$Q'_e = \begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

M 数为 $N_i = 1, N_e = 4$ 。因此完全树 $t_0 = (y_3, y_4, y_5)$ 的符号是 $(-1)^{N_i + N_e} = -1$ 。

为了简便，我们用正号或负号作为上标来表示一个完全树 t 的符号。例如，上例中树 t_0 的符号是 -1 ，所以我们用 $(y_3, y_4, y_5)^-$ 来表示。显然所有与完全树 t_0 距离为 1 的完全树在以下集合中：

$$\bigcup_{a \in t_0} T^a = \bigcup_{a \in t_0} \{t_0 \oplus (a, e); e \in S_a^i(t_0) \cap S_a^e(t_0), e \neq a\} \quad (9-3-4)$$

其中 $S_a^i(t_0)$ 是一个给定网络的电流图关于树 t_0 且包含边 a (t_0 的一条枝) 的基本割集， $S_a^e(t_0)$ 是这个网络的电压图中对于 t_0 且包含枝 a 的基本割集。为了直接从矩阵 Q_i 和 Q_e 中求出式 (9-3-4) 给出的集合中的这些完全树，我们采用以下定义。

定义9-3-1 两个 $m \times n$ 矩阵 $P = [p_{ij}]$ 和 $R = [r_{ij}]$ 的运算 \odot 是 P 和 R 的对应元素的乘积。即

$$P \odot R = [p_{ij} r_{ij}] \quad (9-3-5)$$

例如，如果 P 和 R 是

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

则

$$P \odot R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

由这个定义,所有与 t_0 距离为1的完全树都可由矩阵 $[Q_{i,1}U]$ 和 $[Q_{o,1}U]$ 按如下步骤求得,其中 t_0 对应 U .

第一步 算出 $[Q_{i,1}U] \odot [Q_{o,1}U]$. 注意 $[Q_{i,1}U] \odot [Q_{o,1}U]$ 的每一行 j 表示 $S_{ij}^i(t_0) \cap S_{oj}^o(t_0)$. 因为 $[Q_{i,1}U]$ 和 $[Q_{o,1}U]$ 的行 j 分别表示 $S_{ij}^i(t_0)$ 和 $S_{oj}^o(t_0)$.

第二步 在 $[Q_{i,1}U] \odot [Q_{o,1}U]$ 中,将行 j 处非零元素的列对应的边 e 去替换 a_i , 求出所有的完全树 $T^{e'}$ (这里行 j 是在单位矩阵 U 中,且与边 a_i 相对应的列是1的那一行).可以看出,这种替换得到了对于另一个树的另一个基本割集.如果这个非零元素是 $+1$, 那么得到的完全树与 t_0 符号相同.否则新完全树的符号与 t_0 相反.可以用下面的例子说明这些步骤.

例9-3-2 与 $t_0 = (y_3, y_4, y_5)^-$ 距离为1的所有完全树可由例9-3-1中的 Q'_i 和 Q'_o 得到.

首先算出 $Q'_i \odot Q'_o$:

$$Q'_i \odot Q'_o = \begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

于是 T^{y_1} 可以从 t_0 出发,用边 y_1 替换 y_3 得到,因为只有列 y_1 在代表 $S_{ij}^i(t_0) \cap S_{oj}^o(t_0)$ 的第一行有非零元素,即 $T^{y_1} = (y_1, y_4, y_5)^+$. 因为非零元素是 -1 , 故 (y_1, y_4, y_5) 的符号与 t_0 的符号相反.

与此类似, $T^{y_2} = (y_1, y_3, y_5)^-$, $T^{y_3} = (y_2, y_3, y_4)^-$. 为了求出与 t_0 距离大于1的所有的树,我们考虑能够分块为以下形式的割集矩阵 Q :

$$Q = [Q_{11}U] = \begin{array}{c|c|c|c} b_1 \cdots b_r & b'_1 \cdots b'_k & e_1 \cdots e_k & e_{k+1} \cdots e_m \\ \hline Q_a & Q_b & U_1 & 0 \\ \hline Q_c & Q_d & 0 & U_2 \end{array} \quad (9-3-6)$$

其中 $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_m)$ 是树 t_0 。假定我们将所有的列 e_1, \dots, e_k 和列 b'_1, \dots, b'_k 交换

$$\begin{bmatrix} Q_a & U_1 & Q_b & 0 \\ Q_c & 0 & Q_d & U_2 \end{bmatrix}$$

可以看出，矩阵

$$\begin{bmatrix} Q_b & 0 \\ Q_d & U_2 \end{bmatrix}$$

是非奇异的，当且仅当 Q_b 是非奇异的。因此，当且仅当 Q_b 可以用初等运算变成单位矩阵时，边 $b'_1, \dots, b'_k, e_{k+1}, \dots, e_m$ 构成一个树。为了用改变 t_0 的边 e_1, e_2, \dots, e_k 的方法求出所有的完全树，我们需要知道 $[Q_a Q_b]$ 的所有的非奇异的大子矩阵。换句话说，如果 G 是一个对应割集矩阵 Q 的线图，那么我们可以看出， $[Q_a Q_b]$ 是从 G 中短接了边 e_{k+1}, \dots, e_m 和删去了边 e_1, \dots, e_k 得到的线图 $G(\overline{e_{k+1} \cdots e_m}; \overline{e_1 \cdots e_k})$ 的割集矩阵。 $[Q_a Q_b]$ 的一个非奇异大子矩阵代表在 $G(\overline{e_{k+1} \cdots e_m}; \overline{e_1 \cdots e_k})$ 中的一个树，而这个树的边再加上边 e_{k+1}, \dots, e_m 构成原来线图中的一个树。知道了 $[Q_a Q_b]$ 的所有非奇异大子矩阵，我们就可以求出 $T^{e_1 \cdots e_k}$ 中所有的树。

考虑 Q_i 和 Q_v ，把它们分块为

$$Q_i = \begin{array}{c|c|c|c} b_1 \cdots b_r & b'_1 \cdots b'_k & e_1 \cdots e_k & e_{k+1} \cdots e_m \\ \hline Q_{i_a} & Q_{i_b} & U_1 & 0 \\ \hline Q_{i_c} & Q_{i_d} & 0 & U_2 \end{array} \quad (9-3-7)$$

$$Q_v = \begin{array}{c|c|c|c} b_1 \cdots b_r & b'_1 \cdots b'_k & e_1 \cdots e_k & e_{k+1} \cdots e_m \\ \hline Q_{v_a} & Q_{v_b} & U_1 & 0 \\ \hline Q_{v_c} & Q_{v_d} & 0 & U_2 \end{array} \quad (9-3-8)$$

那么, 当且仅当

$$\begin{bmatrix} Q_{ib} & 0 \\ Q_{id} & U_2 \end{bmatrix} \text{ 和 } \begin{bmatrix} Q_{vb} & 0 \\ Q_{vd} & U_2 \end{bmatrix}$$

都是非奇异的时, 边 $b'_1, \dots, b'_k, e_{k+1}, \dots, e_m$ 构成一个完全树. 因此, 如果我们知道电流图 $G_i(\overline{e_{k+1}, \dots, e_m}; \overline{e_1, \dots, e_k})$ 和电压图 $G_v(\overline{e_{k+1}, \dots, e_m}; \overline{e_1, \dots, e_k})$ 所有的完全树, 而这两个图的割集矩阵分别为 $[Q_i, Q_{ib}]$ 和 $[Q_v, Q_{vb}]$, 我们就可以用从 t_0 中替换边 e_1, \dots, e_k 的方法, 求得所有的完全树 (即 T^{e_1, \dots, e_k} 中所有的完全树). 换句话说, 为了得到 T^{e_1, \dots, e_k} 中所有的完全树, 我们把 $[Q_i, Q_{ib}]$ 和 $[Q_v, Q_{vb}]$ 看成一个给定网络的电流图和电压图的割集矩阵, 然后从它们求出所有的完全树.

假定 t'_0 是 $G_i(\overline{e_{k+1}, \dots, e_m}; \overline{e_1, \dots, e_k})$ 和 $G_v(\overline{e_{k+1}, \dots, e_m}; \overline{e_1, \dots, e_k})$ 里的一个完全树, 其符号为 σ'_0 . 又假定所给网络中的完全树 t_0 符号为 σ_0 . 那么 we 可看出, 用 t'_0 的所有边替换 t_0 的边 e_1, \dots, e_k 得到的完全树 t 的符号 σ_1 是

$$\sigma_1 = \sigma_0 \circ \sigma'_0 \quad (9-3-9)$$

如果我们知道 $\sigma_0 = (-1)^{N_i + N_v}$ 和 $\sigma'_0 = (-1)^{N'_i + N'_v}$, 这个等式是很容易看出的.

从关联矩阵 A_i 和 A_v 求出所有完全树的过程有以下三个步骤:

第 1 步 把 A_i 和 A_v 变成基本形式 $[Q_{i,1}, U]$ 和 $[Q_{v,1}, U]$. 那么我们知道, 完全树 t_0 的符号由单位矩阵 U 所对应的基本 M 数来确定. 设 t_0 为 (e_1, e_2, \dots, e_m) .

第 2 步 计算 $[Q_{i,1}, U] \odot [Q_{v,1}, U]$. 然后求出所有与 t_0 距离为 1 的完全树及其符号.

第 3 步 对于 t_0 中 k 条边 ($k > 1$) 的每一种组合求出关于 t_0 的一类完全树 $T^{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}}$, 其中 $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$. 为了求出每一类

$T^{e_{i_1} \cdots e_{i_k}}$ 中所有的完全树, 我们分别构造 $[Q_{i_1} U]$ 和 $[Q_{e_{i_1}} U]$ 的子矩阵 $Q_i(e_{i_1} \cdots e_{i_k})$ 和 $Q_e(e_{i_1} \cdots e_{i_k})$, 这里 $Q_i(e_{i_1} \cdots e_{i_k})$ 由 $[Q_{i_1} U]$ 中除单位阵 U 外各列和对应 $S_e(t_0)$ 的各行 (即在列 e_{i_p} 处为 1 的行, $p = 1, 2, \cdots, k$) 组成。然后, 我们把 $Q_i(e_{i_1} \cdots e_{i_k})$ 和 $Q_e(e_{i_1} \cdots e_{i_k})$ 看成一对给定的割集矩阵, 并从 $Q_i(e_{i_1} \cdots e_{i_k})$ 和 $Q_e(e_{i_1} \cdots e_{i_k})$ 中求出所有的完全树。为达此目的, 我们把这两个矩阵看作第 1 步中的 A_i 和 A_e , 并反复进行 (如有必要的话) 这三个步骤。对于从 $Q_i(e_{i_1} \cdots e_{i_k})$ 和 $Q_e(e_{i_1} \cdots e_{i_k})$ 中求得的这些完全树, 我们添加上 $t_0 = (e_{i_1}, \cdots, e_{i_k})$ 的所有的边, 这样就构成了 $T^{e_{i_1} \cdots e_{i_k}}$ 中的完全树。注意, 为了得到所有的完全树, 我们是从关联矩阵 A_i 和 A_e 出发的。否则, 第一个完全树 t_0 的符号就必须用类似于符号变换的其他技巧求出。

下面的例子说明求所有完全树的全过程。

例9-3-3 设一个网络的关联矩阵是

$$A_i = \begin{matrix} & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

和

$$A_e = \begin{matrix} & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

那么, 用下面的步骤来生成完全树。

第 1 步 将 A_i 和 A_e 变成基本形式 (基本割集矩阵):

$$Q'_i = \begin{matrix} & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$Q'_s = \begin{matrix} & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ \begin{matrix} 1' \\ 3' \\ 2' \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

由于 $N_i = 1, N_s = 4$, 因此 $t_0 = (y_4, y_5, y_6)^-$.

第2步 算出 $Q'_i \odot Q'_s$:

$$Q'_i \odot Q'_s = \begin{matrix} & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

因此, 所有与 t_0 距离为 1 的完全树为

$$(y_0, y_5, y_6)^+, (y_2, y_5, y_6)^+, (y_1, y_4, y_6)^-, (y_2, y_4, y_6)^-, \\ (y_1, y_4, y_5)^+, (y_2, y_4, y_5)^+$$

第3步 为了求出 $T^{y_4 y_5}$, 我们构成 Q'_i 和 Q'_s 的子矩阵,

$$Q_i(\underline{y_4 y_5}) = \begin{matrix} & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$Q_s(\underline{y_4 y_5}) = \begin{matrix} & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ \begin{matrix} 1' \\ 3' \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

注意, $Q_i(\underline{y_4 y_5})$ 是取 Q'_i 的 y_4, y_5 列为 1 的行 1' 和行 2', 以及除单位矩阵外所有的列而得到的子矩阵。同样, $Q_s(\underline{y_4 y_5})$ 是取 Q'_s 的行 1' 和行 3' 及除单位矩阵外所有的列得到的。

第4步 我们对 $Q_i(\underline{y_4 y_5})$ 和 $Q_s(\underline{y_4 y_5})$ 进行第1步,

$$Q'_i(\underline{y_4 y_5}) = \begin{matrix} & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$Q'_v(\underline{y_4 y_5}) = \begin{matrix} & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ \begin{matrix} 3' \\ 1'' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

从这两个基本形式，我们有 $t_{01} = (y_2 y_3)^-$ 。

第 5 步 从

$$Q'_i(\underline{y_4 y_5}) \odot Q'_v(\underline{y_4 y_5}) = \begin{matrix} & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

我们知道，与 t_{10} 距离为 1 的完全树有两个， $(y_0, y_2)^-$ 和 $(y_1, y_2)^-$ 。

第 6 步 对 $Q'_i(\underline{y_4 y_5})$ 和 $Q'_v(\underline{y_4 y_5})$ 用第 3 步，考虑 $Q'_i(\underline{y_4 y_5})$ 和 $Q'_v(\underline{y_4 y_5})$ 的子矩阵

$$Q_i(\underline{y_4 y_5}, \underline{y_2 y_3}) = \begin{matrix} & y_0 & y_1 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$Q_v(\underline{y_4 y_5}, \underline{y_2 y_3}) = \begin{matrix} & y_0 & y_1 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

我们可以得到与 t_{01} 距离为 2 的完全树。

第 7 步 根据第 1 步，把这两个矩阵变成基本形式：

$$Q'_i(\underline{y_4 y_5}, \underline{y_2 y_3}) = \begin{matrix} & y_0 & y_1 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$Q'_v(\underline{y_4 y_5}, \underline{y_2 y_3}) = \begin{matrix} & y_0 & y_1 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

故 $t_{01} = (y_0, y_1)^-$ 且没有与 t_{02} 距离为 1 的完全树。所以， $(y_0, y_1)^-$

是唯一的与 t_{01} 距离为 2 的完全树。由所给的电流图 G_i 和电压图 G_v 短路 y_6 和删除 y_4, y_5 所得的 $G_i(\overline{y_6}; \overline{y_4 y_5})$ 和 $G_v(\overline{y_6}; \overline{y_4 y_5})$ 的所有完全树为 $t_{01} = (y_2, y_3)^-, (y_0, y_2)^-, (y_1, y_2)^-, (y_0, y_1)^-$ 。用这些完全树，替换 t_0 中的 y_4 和 y_5 并改变它们的符号，得到原电流图和电压图的 $T^{y_4 y_5}$ 中的完全树：

$$T^{y_4 y_5} = [(y_2, y_3, y_6)^+, (y_0, y_2, y_6)^+, (y_1, y_2, y_6)^+, (y_0, y_1, y_6)^+]$$

第 8 步 对于 $T^{y_4 y_5}$ ，我们用 Q'_i 和 Q'_v 的子矩阵，

$$Q'_i(\underline{y_4 y_5}) = \begin{matrix} & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ \begin{matrix} 1' \\ 3' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$Q'_v(\underline{y_4 y_5}) = \begin{matrix} & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

第 9 步 把这两个子矩阵化成基本形式：

$$Q'_i(\underline{y_4 y_5}) = \begin{matrix} & y_3 & y_0 & y_1 & y_2 \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$Q'_v(\underline{y_4 y_5}) = \begin{matrix} & y_3 & y_0 & y_1 & y_2 \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

这样， $t_{03} = (y_1, y_2)^+$ 。

第 10 步 从

$$Q'_i(\underline{y_4 y_5}) \odot Q'_v(\underline{y_4 y_5}) = \begin{matrix} & y_3 & y_0 & y_1 & y_2 \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

我们可以看出， $(y_0, y_1)^+$ 是与 t_{03} 距离为 1 的唯一的完全树。

第11步 为了求出与 t_{03} 距离为 2 的完全树，我们利用

$$Q_i(\underline{y_4 y_0}; \underline{y_1 y_2}) = \begin{matrix} & y_3 & y_0 \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$Q_o(\underline{y_4 y_0}; \underline{y_1 y_2}) = \begin{matrix} & y_3 & y_0 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

因为这两个矩阵都是奇异的，所以在 $G_i(\overline{y_5}; \overline{y_4 y_0})$ 和 $G_o(\overline{y_5}; \overline{y_4 y_0})$ 中没有与 t_{03} 距离为 2 的完全树。这样， $T^{y_4 y_0} = [(y_1, y_2, y_0)^-, (y_0, y_1, y_5)^-]$ 。

第12步 对于 $T^{y_4 y_0}$ ，我们考虑

$$Q_i(\underline{y_5 y_0}) = \begin{matrix} & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ \begin{matrix} 2' \\ 3' \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$Q_o(\underline{y_5 y_0}) = \begin{matrix} & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ \begin{matrix} 3' \\ 2' \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

第13步 将这两个矩阵变成基本形式：

$$Q'_i(\underline{y_5 y_0}) = \begin{matrix} & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$Q'_o(\underline{y_5 y_0}) = \begin{matrix} & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & | & 1 & 0 \\ -1 & 0 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

于是 $t_{04} = (y_2, y_3)^{-*}$ 。

* 原书把 t_{04} 符号误为 “+”，以下均作相应改动。——译注

第14步 算出 $Q'_i(\underline{y_5y_6}) \odot Q'_v(\underline{y_5y_6})$:

$$Q'_i(\underline{y_5y_6}) \odot Q'_v(\underline{y_5y_6}) = \begin{matrix} & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

故 $(y_1, y_3)^-$ 是与 y_{04} 距离为 1 的唯一的完全树。

第15步 为了找出 $G_i(\overline{y_4}, \overline{y_5y_6})$ 和 $G_v(\overline{y_4}, \overline{y_5y_6})$ 中与 t_{04} 距离为 2 的完全树, 我们考虑

$$Q_i(\underline{y_5y_6}, \underline{y_2y_3}) = \begin{matrix} & y_0 & y_1 \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$Q_v(\underline{y_5y_6}, \underline{y_2y_3}) = \begin{matrix} & y_0 & y_1 \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

因为 $Q_i(\underline{y_5y_6}, \underline{y_2y_3})$ 是奇异的, 所以没有与 t_{04} 距离为 2 的完全树。因此, $T^{y_5y_6} = [(y_2, y_3, y_4)^+, (y_1, y_3, y_4)^+]$ 。

第16步 为了得到 $T^{y_4y_5y_6}$, 我们用

$$Q_i(\underline{y_4y_5y_6}) = \begin{matrix} & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3' \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$Q_v(\underline{y_4y_5y_6}) = \begin{matrix} & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ \begin{matrix} 1' \\ 2' \\ 3' \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

第17步 把这两个矩阵变成基本形式:

$$Q'_i(\underline{y_4 y_5 y_6}) = \begin{bmatrix} & y_0 & y_2 & y_1 & y_3 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$Q'_s(\underline{y_4 y_5 y_6}) = \begin{bmatrix} & y_0 & y_2 & y_1 & y_3 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

因此 $t_{05} = (y_1, y_2, y_3)^+$ 。

第18步 算出 $Q'_i(\underline{y_4 y_5 y_6}) \odot Q'_s(\underline{y_4 y_5 y_6})$ ：

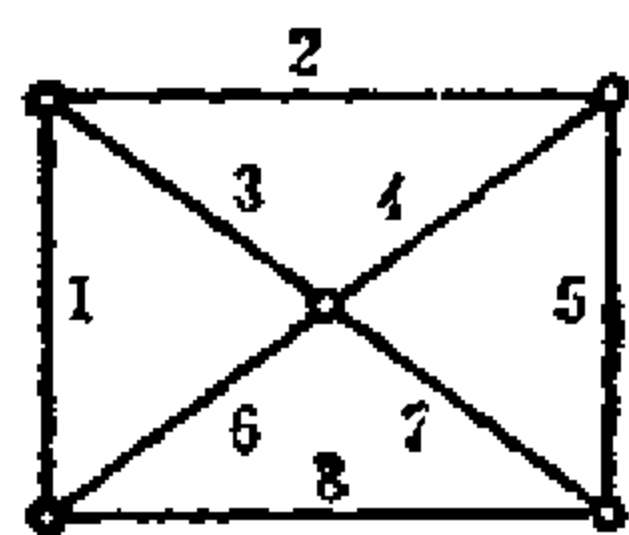
$$Q'_i(\underline{y_4 y_5 y_6}) \odot Q'_s(\underline{y_4 y_5 y_6}) = \begin{bmatrix} & y_0 & y_2 & y_1 & y_3 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

因此没有与 t_{05} 距离为 1 或 1 以上的完全树，且 $T^{y_4 y_5 y_6} = (y_1, y_2, y_3)^-$ 。这样，我们就找出了所有的完全树。

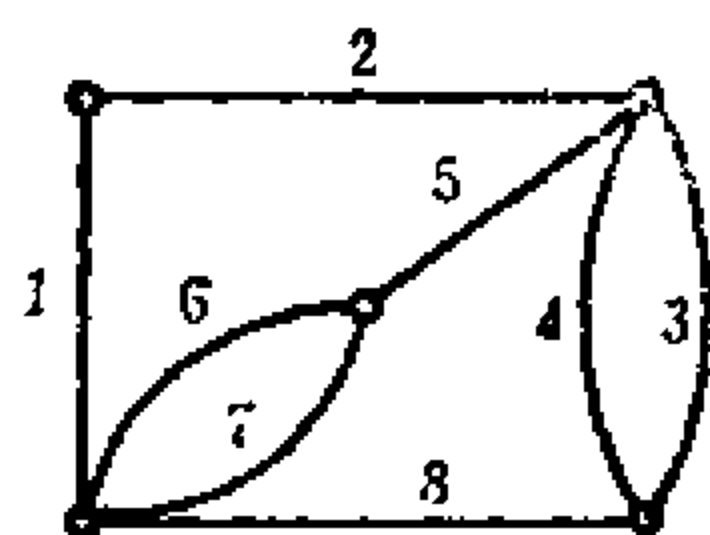
显然，把一个线图 G 作为电压图和电流图， G 的树就变成了完全树。因此，我们可用以上方法求出所有的树。但是，因为在这种情况下 $A_i = A_s$ ，故 $Q'_i = Q'_s$ ，就不需要再计算 $Q'_i \odot Q'_s$ ，而且每一个完全树的符号都是正号。

习 题

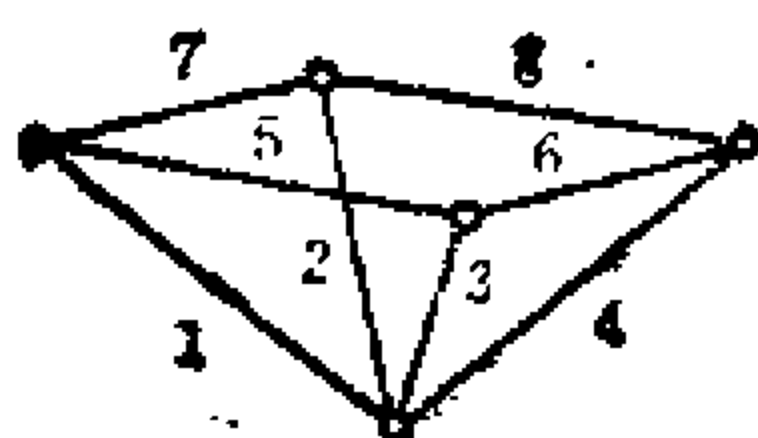
1. 用两种方法生成图 $P-9-1$ 中线图的所有树。(一种方法是 9-2 节给出的，另一种是在 9-3 节中给出的)。



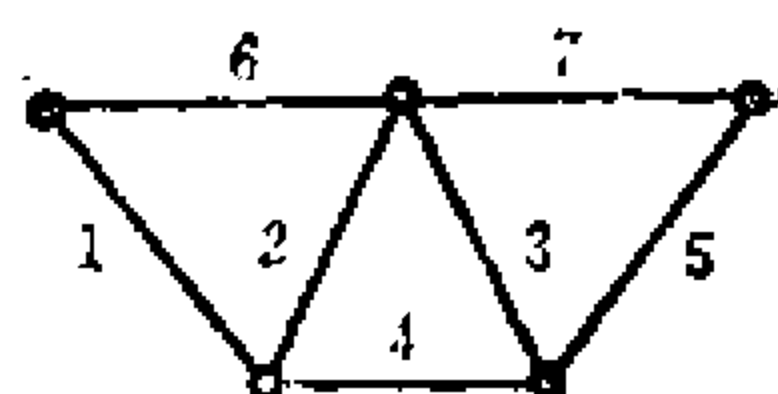
(a)



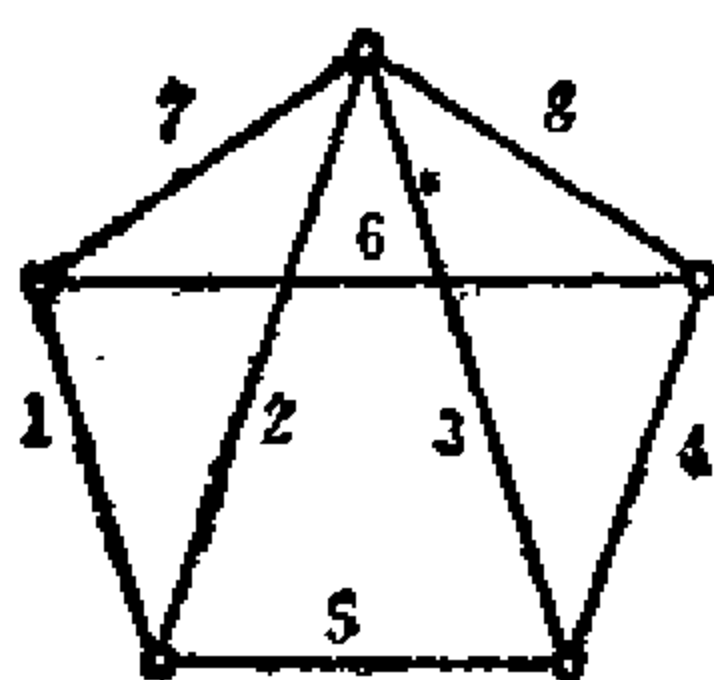
(b)



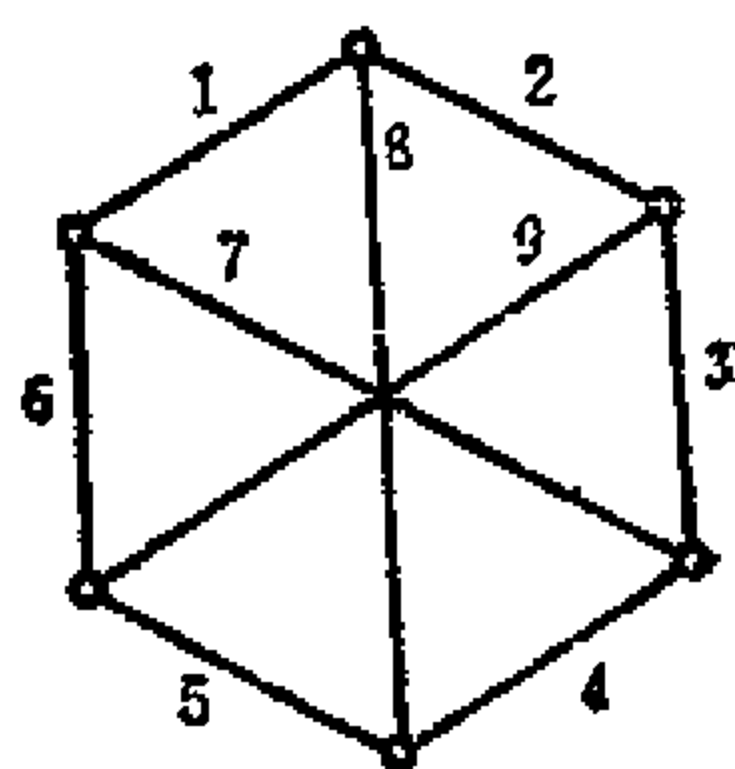
(c)



(d)



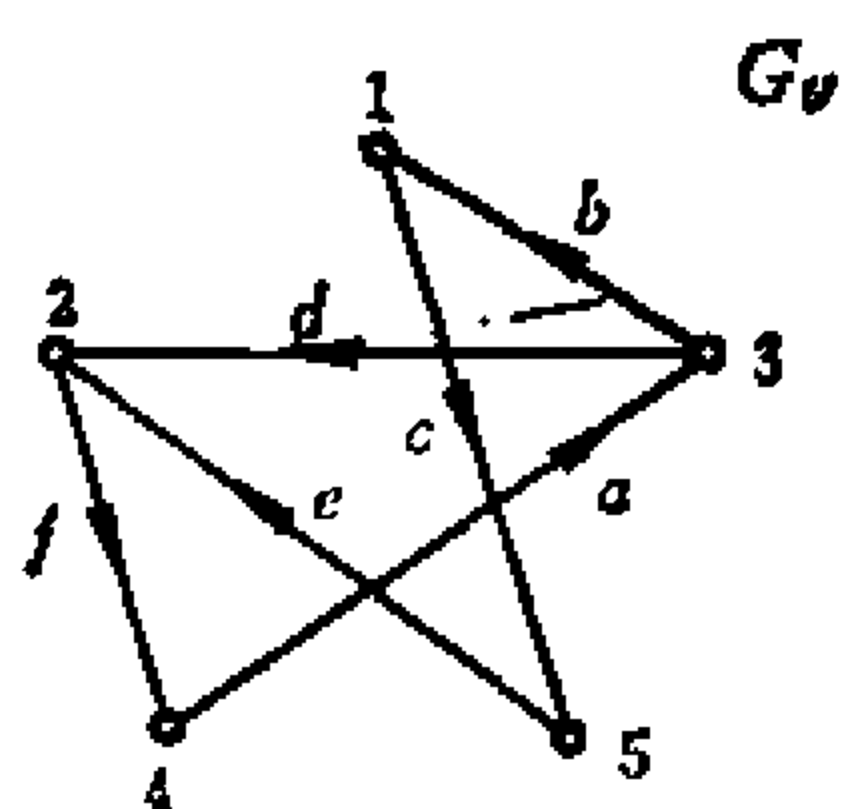
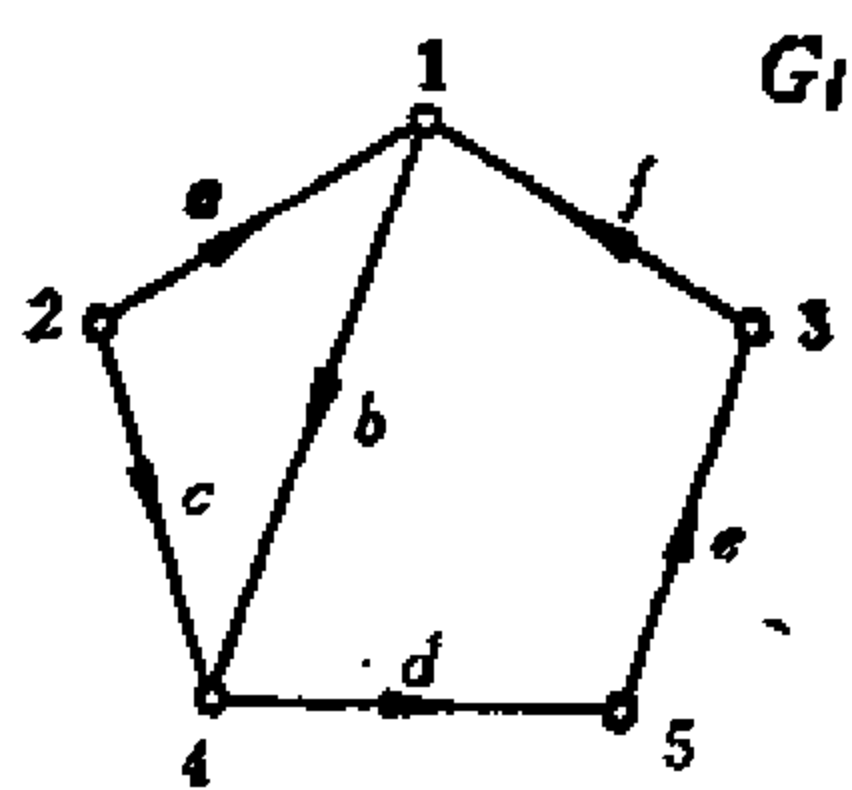
(e)



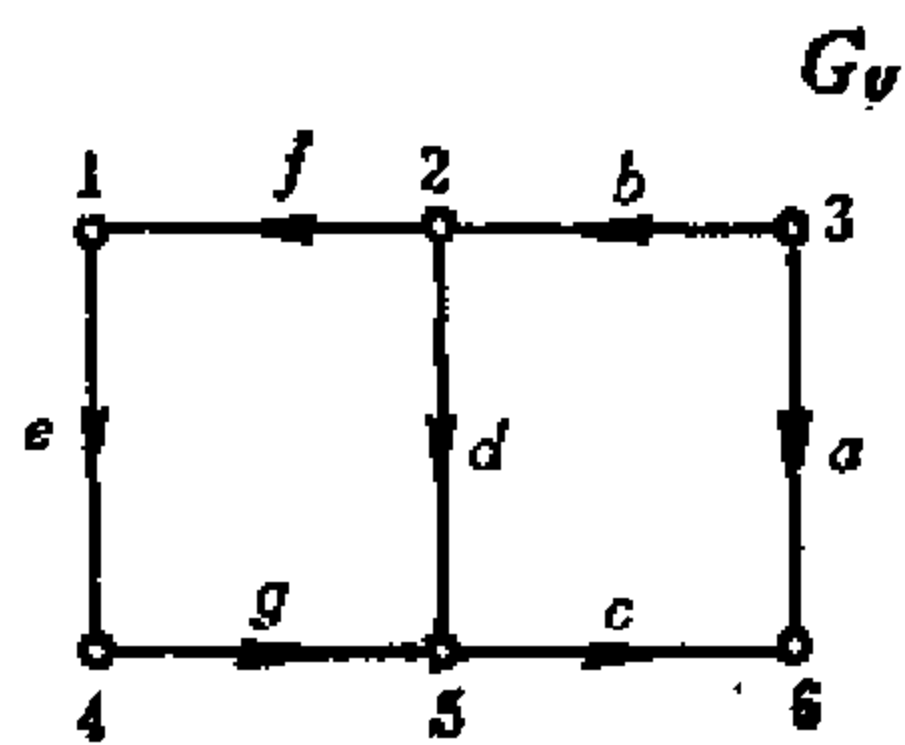
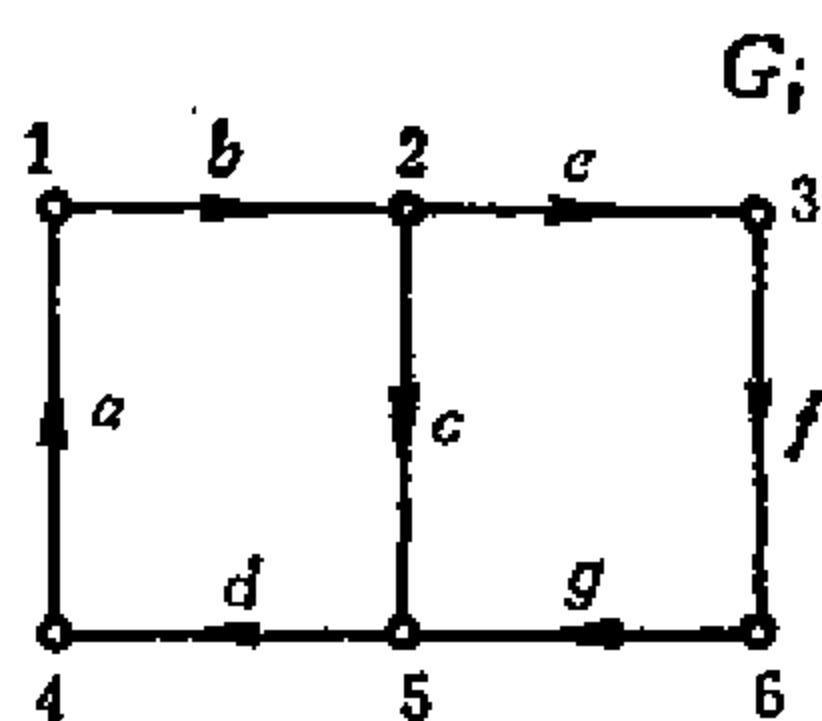
(f)

图 P-9-1

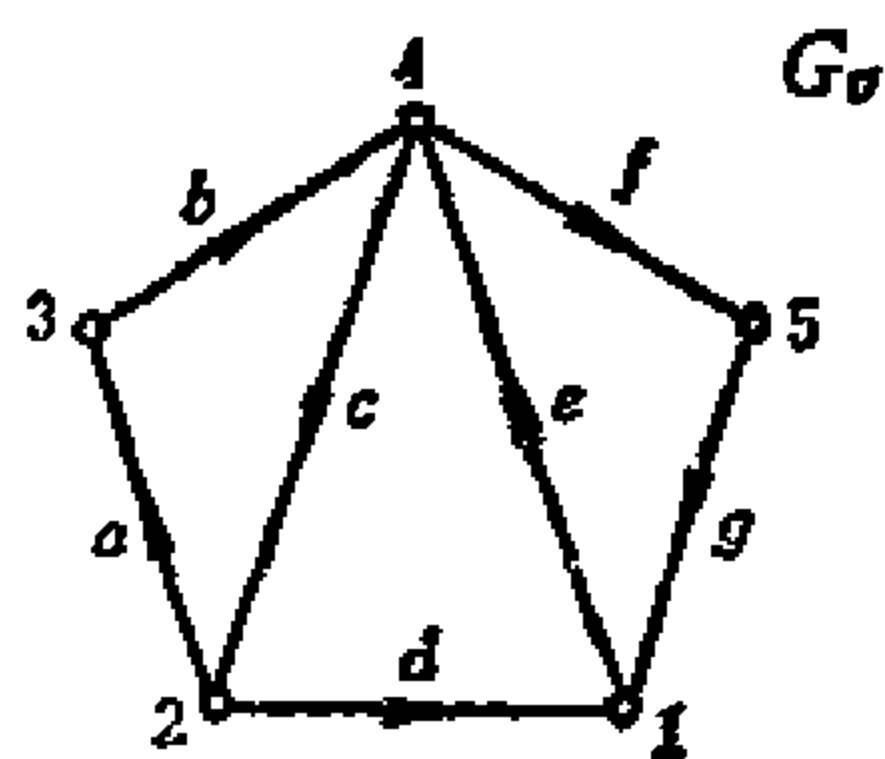
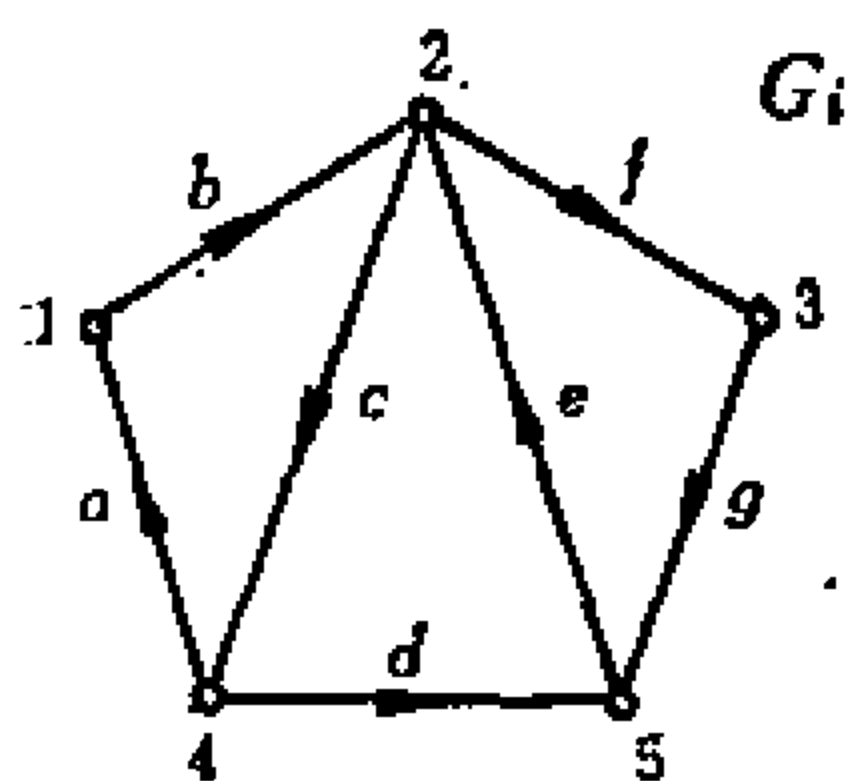
2. 生成图 P-9-2 中各对线图的所有完全树。



(a)



(b)



(c)

图 P-9-2 线图对

(a) G_I 和 G_V ; (b) G_I 和 G_V ; (c) G_I 和 G_V

3. 假定 G_i 和 G_o 是互为2-同构, 那么 G_i 中的哪一种树也是 G_o 中的树?

4. 假定重新命名顶点, G_i 就变得与 G_o 相同, 如图 $P-9-2(c)$ 所示, 那么 G_i 中哪一种树也是 G_o 中的树? 完全树的符号将是什么?

5. 假定 G_i 和 G_o 是不同的, 要使所有的完全树就是 G_i 的所有的树, 要求对 G_i 和 G_o 有什么条件?

第十章 流图和信号流图

10-1 流 图

在第七章里，我们用加权图来表示由似无源元件组成的电网络，并得知导纳矩阵行列式的非零项与树对应。在第八章里，我们用加权图表示似有源网络，并得知导纳矩阵行列式的非零项与（完全）树有关。接着，我们研究了用来表示单向网络的加权图，并且再次看到导纳矩阵行列式的非零项对应于（有向）树。本章将要考查流图和信号流图，它们是另一种形式的加权图。但是，与这两种加权图联系的行列式的非零项却不再与树对应，而是与回路或无重边的回路并集相对应。

定义10-1-1 对于一个方阵 $W = [w_{ij}]$ ，其中 $i, j = 1, 2, \dots, n$ ，流图 G 是满足以下两个条件的加权有向图：，（1） G 由顶点 $1, 2, \dots, n$ 组成；（2）对所有的 $1 \leq i, j \leq n$ ，从顶点 i 到顶点 j 的每一条边（其定向是由 i 到 j ）的权是 w_{ji} 。

为了简便起见，记号 w_{ji} 既表示一条边的权，又表示这条边。根据定义，必须注意，边 w_{ji} 是由 i 连接到 j 而不是由 j 到 i 的。（此处定义的边 w_{ji} 的方向与通常的相反，这样就更容易将流图与下节要研究的信号流图作一比较。）

作为一个例子，假定一个矩阵是

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix}$$

则与此矩阵对应的流图由九条边和三个顶点组成，如图10-1-1所示。注意，在流图中允许有自环。

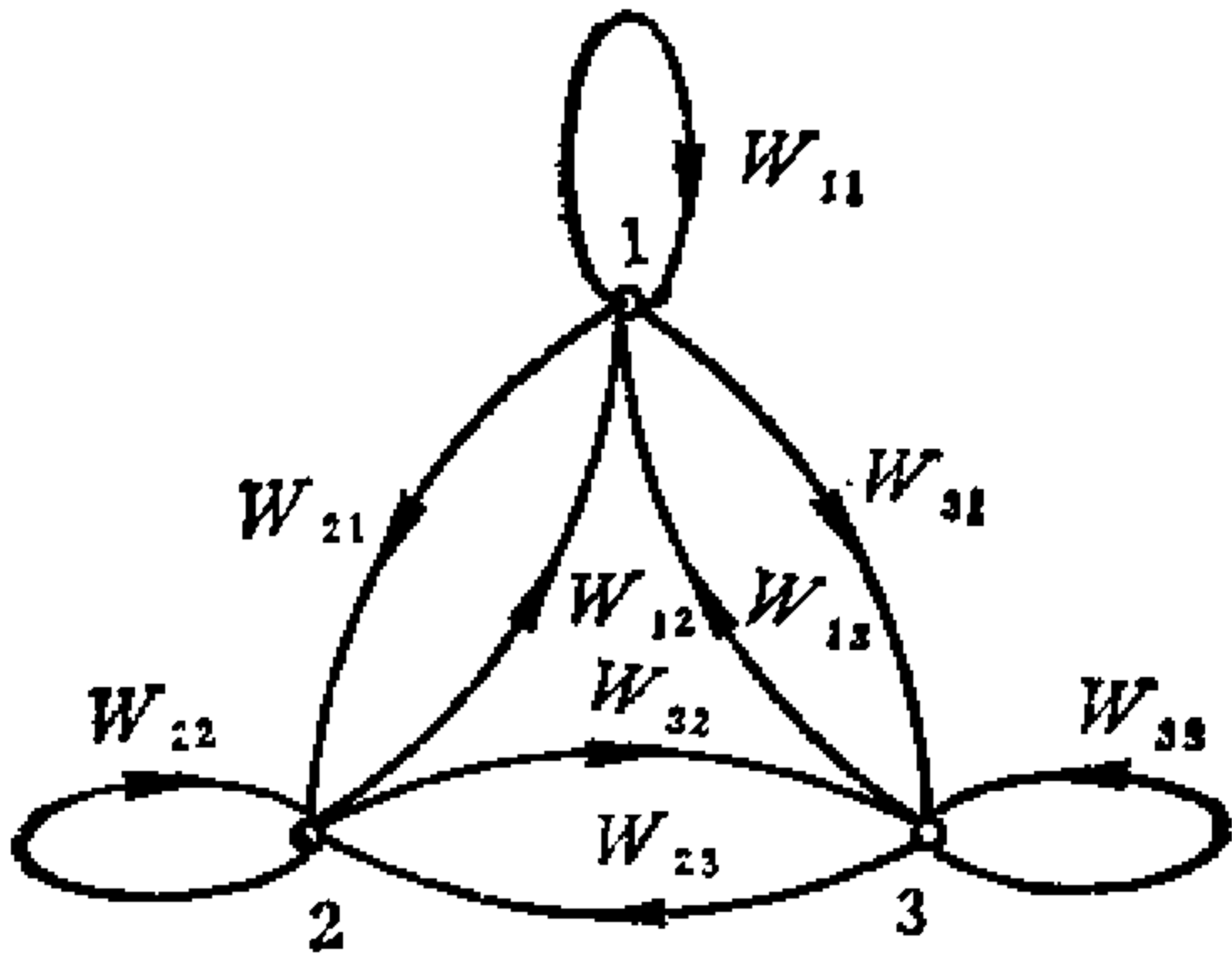


图10-1-1 流图

应用流图的一个课题是要根据与矩阵 W 对应的流图直接求出 W 的行列式。考虑矩阵 W 的行列式，它可以表示为

$$|W| = \sum \delta_{j_1 j_2 \cdots j_n} W_{1j_1} W_{2j_2} \cdots W_{nj_n} \tag{10-1-1}$$

回忆一下：（1）如果

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

不是一个置换，那么 $\delta_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 为零；（2）如果

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

是一个偶置换（即为使第二行变得与第一行一致所需的将第二行各个 j 互换的次数为偶数），那么， $\delta_{j_1 j_2 \cdots j_n} = 1$ ；（3）如果

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

是一个奇置换，那么 $\delta_{j_1 j_2 \cdots j_n} = -1$ 。

设 G 是与矩阵 W 对应的流图，并设 g 是由边 $w_{1j_1}, w_{2j_2}, \cdots,$

w_{ij_k} 组成的子图。注意边 w_{kij_k} 的下标 k 和 j_k 表示边 w_{kij_k} 是从顶点 j_k 连到顶点 k 的。如果与边 $w_{1j_1}, w_{2j_2}, \dots, w_{nj_n}$ 对应的

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

是一个置换，那么 g 的每个顶点在

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

的第一行和第二行中各只出现一次。因此，在 g 中与每个顶点相连接的边正好是两条。并且对于每个顶点 p , $d^+(p) = d^-(p) = 1$ ；换言之，在与一个顶点相连的两条边中，一条的方向离开该顶点，另一条的方向指向该顶点。如果子图 g 是连通的，则 g 是一个有向回路。

定义10-1-2 有向回路是其定向与回路中每条边的方向一致的回路。

假定子图 g 由 k 个最大连通子图组成，那么每个最大连通子图必为一个有向回路，而 g 必为顶点不相接的有向回路并集。

定义10-1-3 顶点不相接的有向回路并集是一个有向回路的集合，其中任两个回路都没有公共顶点。

为了简便起见，我们定义 P -集圈如下。

定义10-1-4 P -集圈是一个子图，它或是一个有向回路，或是顶点不相接的有向回路并集，且包含给定有向图的全部顶点。

因为子图 g 包含流图 G 的全部顶点，我们就可以断言，如果

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

是一个置换，则由边 $w_{1j_1}, w_{2j_2}, \dots, w_{nj_n}$ 所组成的子图是一个 P -集圈。

为了证明这个结论的逆也是正确的, 我们假设子图 g 是一个 P -集圈. 注意 g 必定包含 n 条边. 设 g 的边是 $w_{i_1 i_1}, w_{i_2 i_2}, \dots, w_{i_n i_n}$, 则下标序列 $(i_1 i_2 \dots i_n)$ 必然是 $(12 \dots n)$ 的一种排列, 同样, 下标序列 $(j_1 j_2 \dots j_n)$ 也必然是 $(12 \dots n)$ 的一种排列. 因此

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \dots i_n \\ j_1 & j_2 \dots j_n \end{pmatrix}$$

是一个置换, 乘积 $w_{i_1 i_1} w_{i_2 i_2} \dots w_{i_n i_n}$ 是式 (10-1-1) 中的一项. 换句话说,

$$|W| = \sum e_j \times (P\text{-集圈 } D_j \text{ 乘积}) \quad (10-1-2)$$

其中 e_j 为 $+1$ 或 -1 , 取决于 $\delta_{j_1 i_2 \dots j_n}$.

为了确定 e_j 的符号, 我们假设由边 $w_{i_1 i_1}, w_{i_2 i_2}, \dots, w_{i_n i_n}$ 组成的 P -集圈 D_j 是 k 个顶点不相接的有向回路并集, 当 $k=1$ 时, D_j 是有向回路. 不失一般性, 设

$$(w_{i_{p_1} j_{p_1}} w_{i_{p_1+1} j_{p_1+1}} \dots w_{i_{p_1+r_1} j_{p_1+r_1}})_2 \\ (w_{i_{p_2} j_{p_2}} \dots w_{i_{p_2+r_2} j_{p_2+r_2}})_2 \dots (w_{i_{p_k} j_{p_k}} \dots w_{i_{p_k+r_k} j_{p_k+r_k}})_2$$

是这 k 个有向回路, 则对于 $s=1, 2, \dots, k$,

$$\begin{pmatrix} i_{p_s} & \dots & i_{p_s+r_s} \\ j_{p_s} & \dots & j_{p_s+r_s} \end{pmatrix}$$

必是一个置换, 这是因为 $i_{p_s}, i_{p_s+1}, \dots, i_{p_s+r_s}$ 代表一个有向回路中的所有顶点, 而 $j_{p_s}, j_{p_s+1}, \dots, j_{p_s+r_s}$ 同样如此.

由于总可以调整有向回路的各边, 使序列

$$(w_{i_{p_s} j_{p_s}} \dots w_{i_{p_s+r_s} j_{p_s+r_s}})$$

成为一个方向与有向回路的定向相同的闭边列, 我们有

$$i_{p_s+u-1} = j_{p_s+u} \quad u=1, 2, \dots, r_s \quad (10-1-3)$$

$$\text{和} \quad i_{p_s+r_s} = j_{p_s} \quad (10-1-4)$$

因此

$$\begin{pmatrix} i_{p_1} & \cdots & i_{p_1+r_1} \\ j_{p_1} & \cdots & j_{p_1+r_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{p_1} & i_{p_1+1} & \cdots & i_{p_1+r_1-1} & i_{p_1+r_1} \\ i_{p_1+r_1}i_{p_1} & & \cdots & i_{p_1+r_1-2} & i_{p_1+r_1-1} \end{pmatrix} \quad (10-1-5)$$

对这个置换的第二行元素作 r_1-1 次对换，就足以使第二行与第一次相同。

根据假设，

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{p_1} & \cdots & i_{p_1+r_1} \\ j_{p_1} & \cdots & j_{p_1+r_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{p_2} & \cdots & i_{p_2+r_2} \\ j_{p_2} & \cdots & j_{p_2+r_2} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} i_{p_k} & \cdots & i_{p_k+r_k} \\ j_{p_k} & \cdots & j_{p_k+r_k} \end{pmatrix} \quad (10-1-6)$$

并且我们已经知道，由于对

$$\begin{pmatrix} i_{p_1} & \cdots & i_{p_1+r_1} \\ j_{p_1} & \cdots & j_{p_1+r_1} \end{pmatrix}$$

的第二行的元素作 r_1-1 次对换就足以使第二行与第一行相同
故对

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

的第二行元素作 $(r_1-1) + (r_2-1) + \cdots + (r_k-1)$ 次对换就足以使第二行与第一行相同。注意 r_i 是与

$$\begin{pmatrix} i_{p_1} & \cdots & i_{p_1+r_1} \\ j_{p_1} & \cdots & j_{p_1+r_1} \end{pmatrix}$$

对应的有向回路的边数。因此

$$\begin{aligned} (r_1-1) + (r_2-1) + \cdots + (r_k-1) &= r_1 + r_2 + \cdots + r_k - k \\ &= n - k \end{aligned} \quad (10-1-7)$$

或者说作 $n-k$ 次对换就足以使

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

的第二行与第一行相同。于是式(10-1-2)中 a_j 的符号为

$$a_j = (-1)^{n+k} \quad (10-1-8)$$

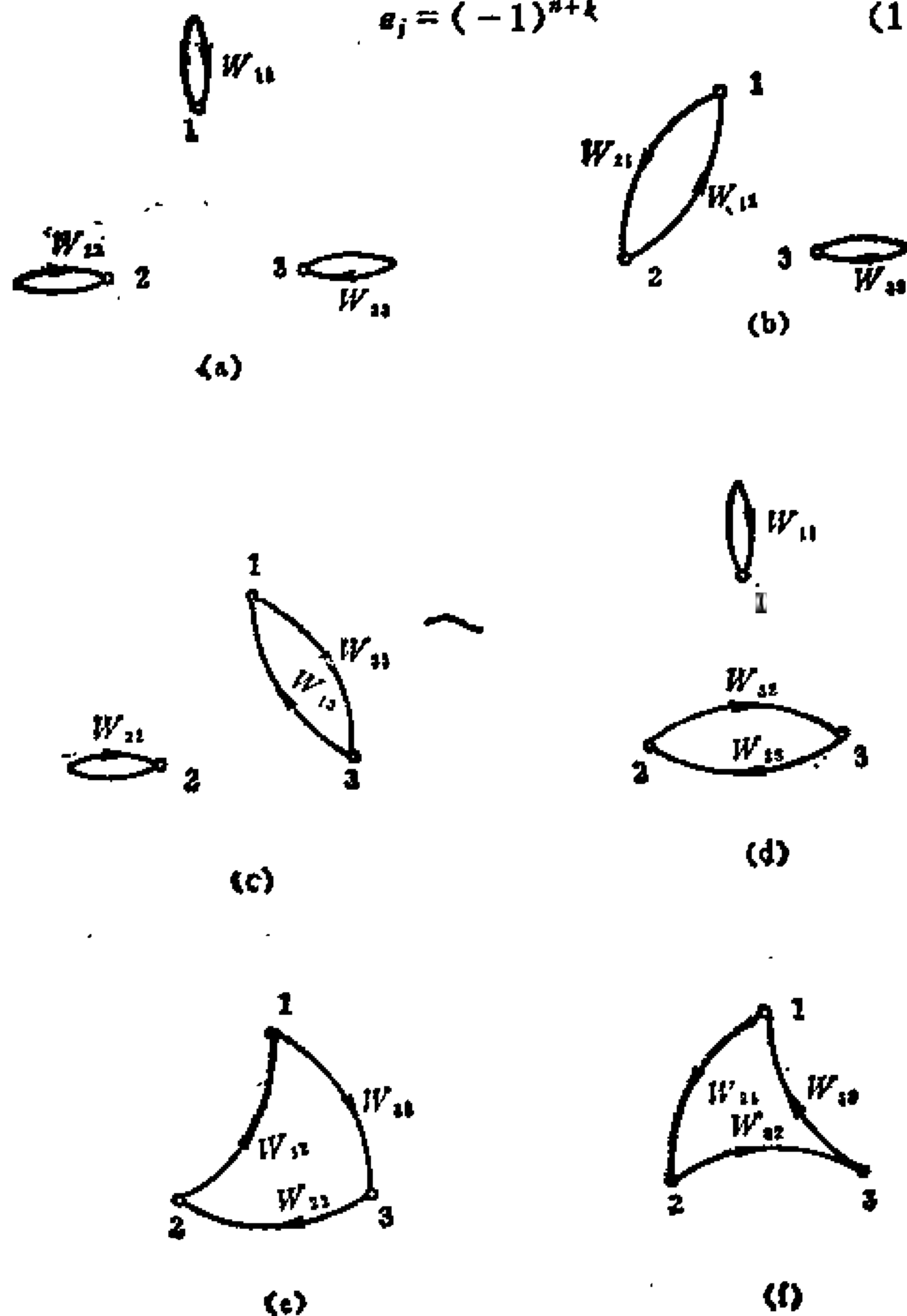


图10-1-2 P-集图

(a) $D_1 = (w_{11}, w_{22}, w_{33})$; (b) $D_2 = (w_{12}, w_{21}, w_{33})$; (c) $D_3 = (w_{12}, w_{21}, w_{33})$; (d) $D_4 = (w_{23}, w_{32}, w_{11})$; (e) $D_5 = (w_{12}, w_{21}, w_{33})$; (f) $D_6 = (w_{13}, w_{32}, w_{21})$

或者

$$|W| = (-1)^n \sum_{(j)} (-1)^{k_j} (P\text{-集圈 } D_j \text{ 乘积}) \quad (10-1-9)$$

其中 k_j 是 P -集圈 D_j 中有向回路数目。

例10-1-1 考虑图10-1-1中的流图，与它对应的矩阵是

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix}$$

据式(10-1-9)， W 的行列式是

$$\begin{aligned} |W| = & (-1)^3 [(-1)^3 w_{11} w_{22} w_{33} + (-1)^2 w_{12} w_{21} w_{33} \\ & + (-1)^2 w_{13} w_{31} w_{22} + (-1)^2 w_{23} w_{32} w_{11} \\ & + (-1) w_{12} w_{23} w_{31} + (-1) w_{13} w_{32} w_{21}] \end{aligned}$$

对应的子图如图10-1-2所示。

10-2 信 号 流 图

信号流图是一种边和顶点都带有权的加权有向图。为了简便起见，用符号 (i, j) 表示从顶点 i 连接到顶点 j 的一条有向边。

定义10-2-1 方程

$$x_r = \sum_{p=0}^n m_{rp} x_p \quad (0 \leq r \leq n) \quad (10-2-1)$$

可用一个有向图 G 来表示，其中

1. 顶点 x_p 的权是 x_p ;
2. 对于 $m_{ru} \neq 0 (0 \leq u \leq n)$ ，存在一条权为 m_{ru} 的边 (x_u, x_r) ;
3. 与顶点 r 相连且指向顶点 r 的边就是带权 m_{ru} 的边。

这样一个有向图 G (见图10-2-1) 称为代表方程(10-2-1)的信号流图。式(10-2-1)称为信号流图 G 在顶点 x_r 的方程。注意当 $m_{ru} = 0$ 时，或者有一条权为 0 的边 (x_u, x_r) ，或者没有权为 m_{ru} 的边。

现在考虑以下联立方程：

$$\left. \begin{aligned}
 x_1 &= m_{11}x_1 + m_{12}x_2 + \cdots + m_{1n}x_n \\
 x_2 &= m_{21}x_1 + m_{22}x_2 + \cdots + m_{2n}x_n \\
 &\vdots \\
 x_{n-1} &= m_{n-11}x_1 + m_{n-12}x_2 + \cdots + m_{n-1n}x_n \\
 x_0 &= m_{01}x_1 + m_{02}x_2 + \cdots + m_{0n}x_n
 \end{aligned} \right\} \quad (10-2-2)$$

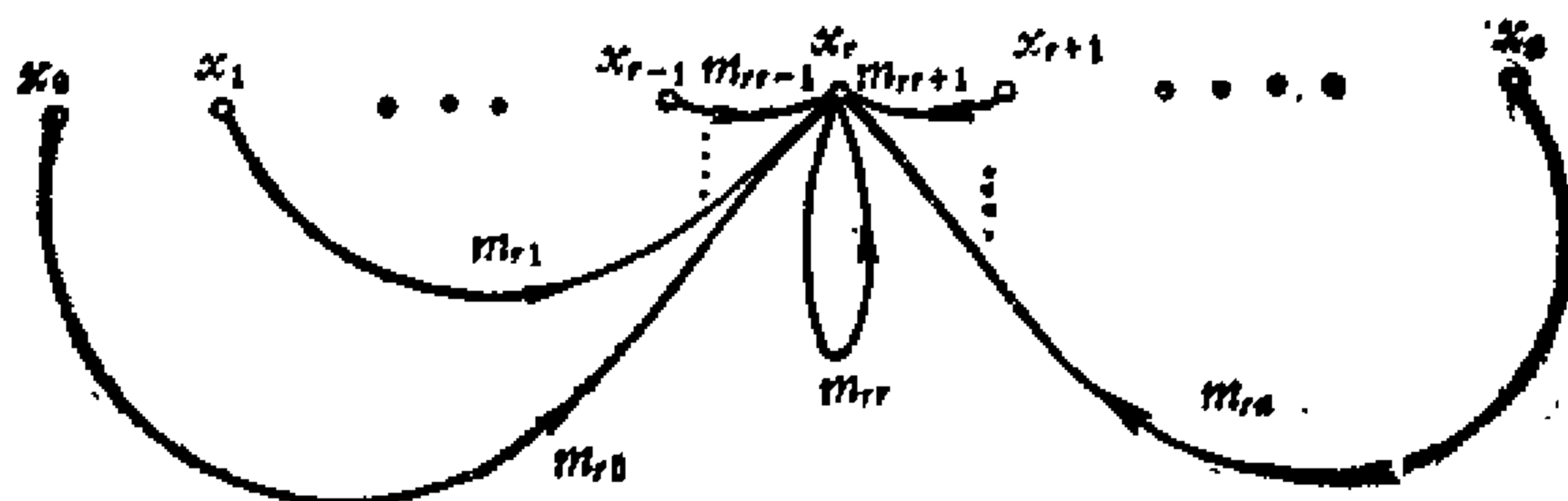


图10-2-1 信号流图

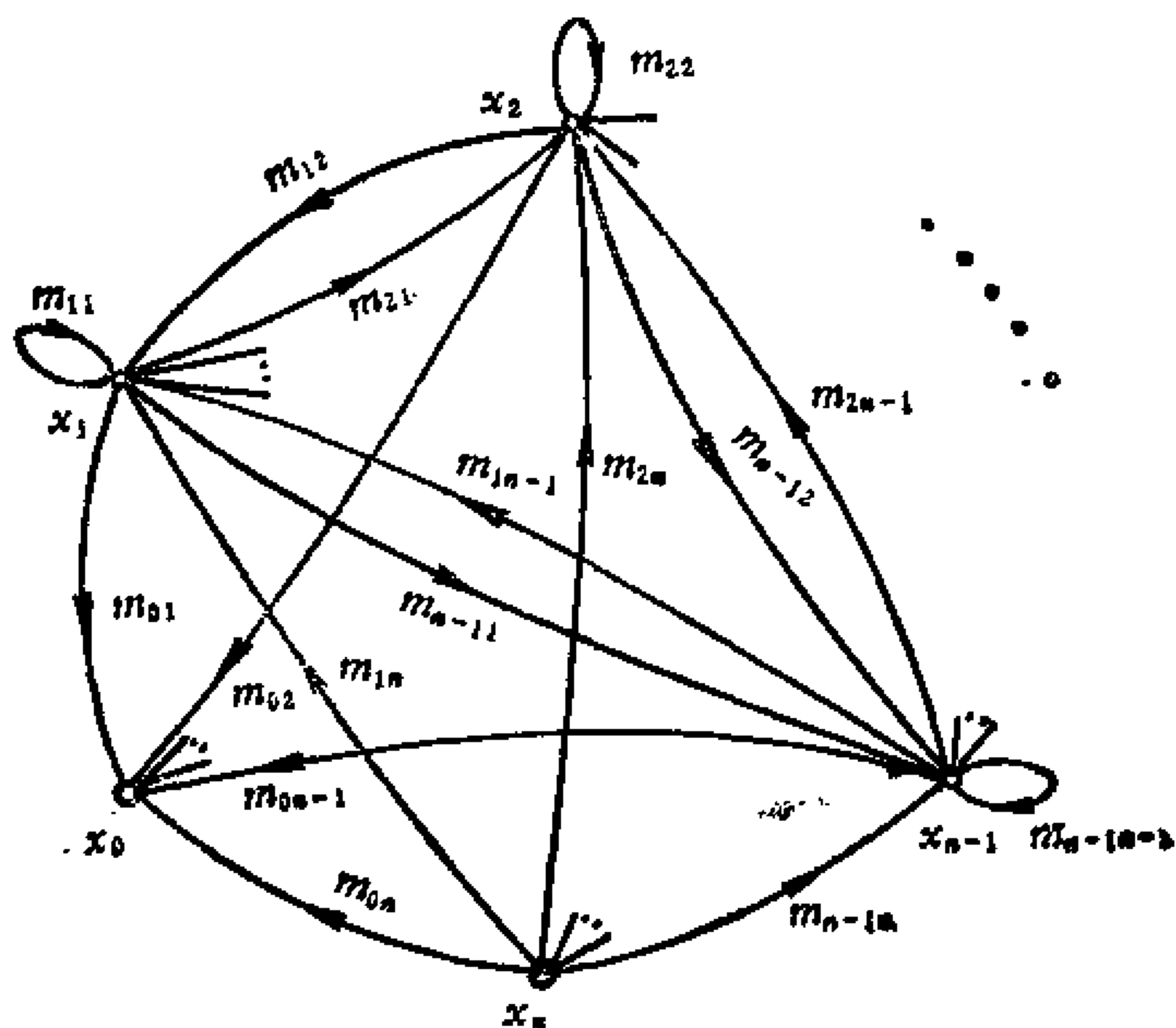


图10-2-2 信号流图

对应的信号流图由 $n+1$ 个顶点组成, 如图10-2-2所示。注意在式(10-2-2)中, x_n 不出现在任何一个方程的左边, x_0 不出现在任何一个方程的右边。顶点 x_n 称为源点, 顶点 x_0 称为汇点。

下面是三条常用的简化信号流图的规则:

1. 假定信号流图 G 具有如图10-2-3(a)所示的并联边, 则在顶点 x_q 的方程是

$$x_q = \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq p}}^n m_{qr} x_r + m_{qp} x_p + m'_{qp} x_p = \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq p}}^n m_{qr} x_r + (m_{qp} + m'_{qp}) x_p \quad (10-2-3)$$

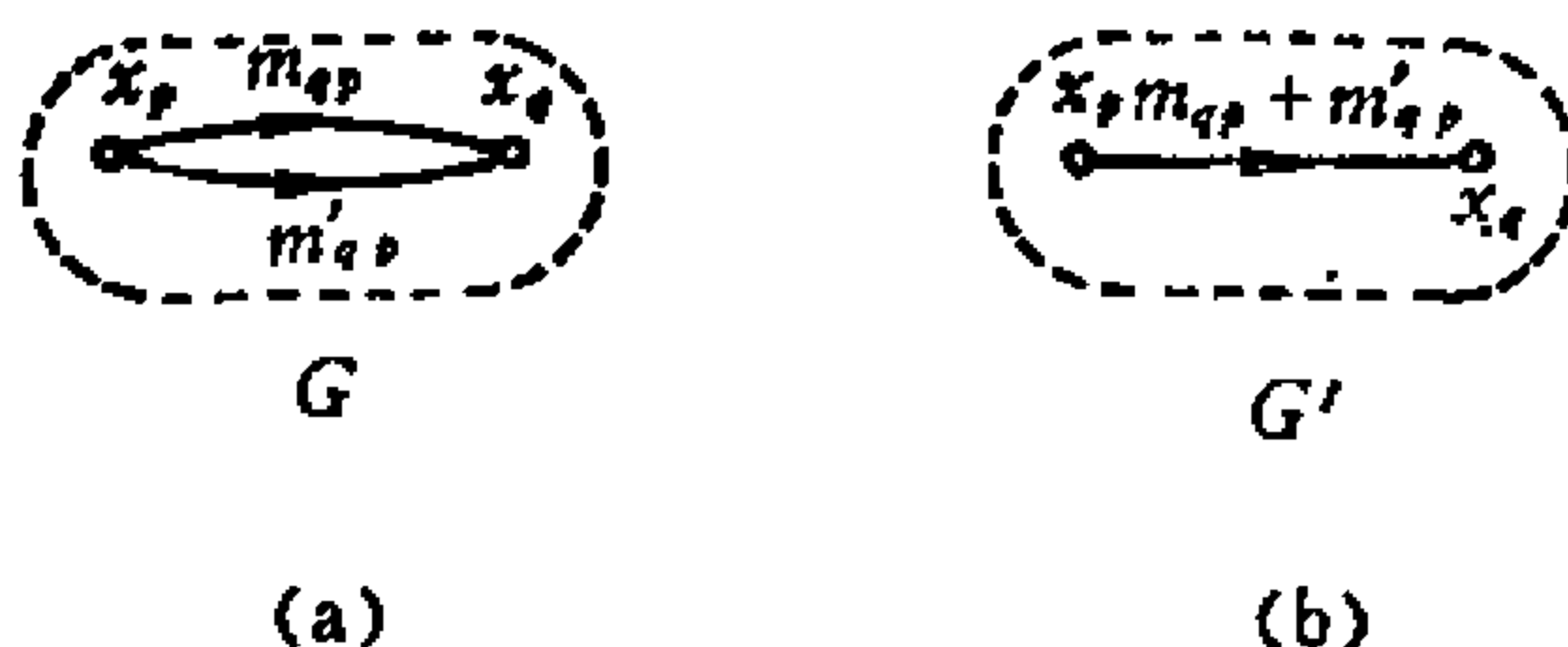


图10-2-3

(a) 信号流图 G ; (b) 信号流图 G'

图10-2-3(b)中的信号流图 G' 是用一条权为 $m_{qp} + m'_{qp}$ 的边替换 G 中两条并联边得到的。显然, G 和 G' 在每个顶点的方程都是相同的。因此, 方向相同的并联边可以用一条边代替, 其权为这些并联边的权的和。

2. 考虑图10-2-4(a)中的信号流图 G , 其中顶点 x_p 有一个自环。顶点 x_p 的方程为

$$x_p = m_{pp} x_p + \sum_{\substack{r=1 \\ i_r \neq p}}^k m_{pi_r} x_{i_r} \quad (10-2-4)$$

此式可变成

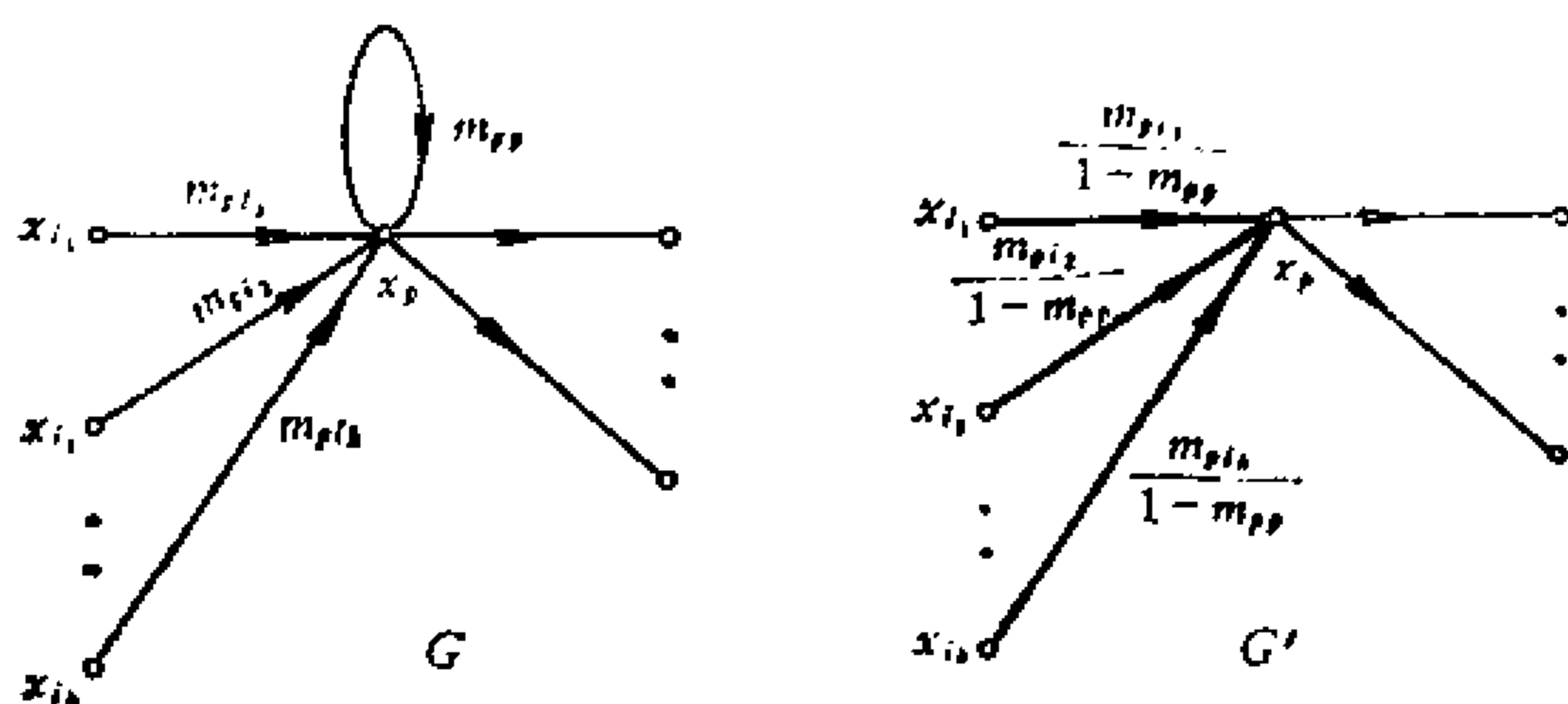


图10-2-4

(a) 信号流图 G ; (b) 信号流图 G'

$$(1 - m_{pp}) x_p = \sum_{\substack{r=1 \\ i_r \neq p}}^k m_{pi_r} x_{i_r} \quad (10-2-5)$$

或在 $m_{pp} \neq 1$ 的条件下变成

$$x_p = \sum_{\substack{r=1 \\ i_r \neq p}}^k \frac{m_{pi_r}}{1 - m_{pp}} x_{i_r} \quad (10-2-6)$$

设图10-2-4(b)中的 G' 是由 G 删除自环 (x_p, x_p) 并将边 (x_{i_r}, x_p) 的权从 m_{pi_r} 变成 $m_{pi_r}/(1 - m_{pp})$, $(r = 1, 2, \dots, k)$ 得到的。则式 (10-2-6) 就是 G' 在顶点 x_p 的方程。而且 G' 和 G 在其他任一顶点的方程都相同。因此，我们可以说，在顶点 x_p 的自环可以移去，只须在 $m_{pp} \neq 1$ 的条件下用 $(1 - m_{pp})$ 去除每条指向顶点 x_p 的边的权。

3. 考虑图10-2-5(a)中的信号流图 G ，其中在顶点 x_p 没有自环。在顶点 x_p 的方程是

$$x_p = \sum_{\substack{r=1 \\ i_r \neq p}}^k m_{pi_r} x_{i_r} \quad (10-2-7)$$

顶点 x_{j_0} 的方程可写为

$$x_{j_0} = m_{j_0 p} x_p + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq p}}^n m_{j_0 i} x_{i_0} \tag{10-2-8}$$

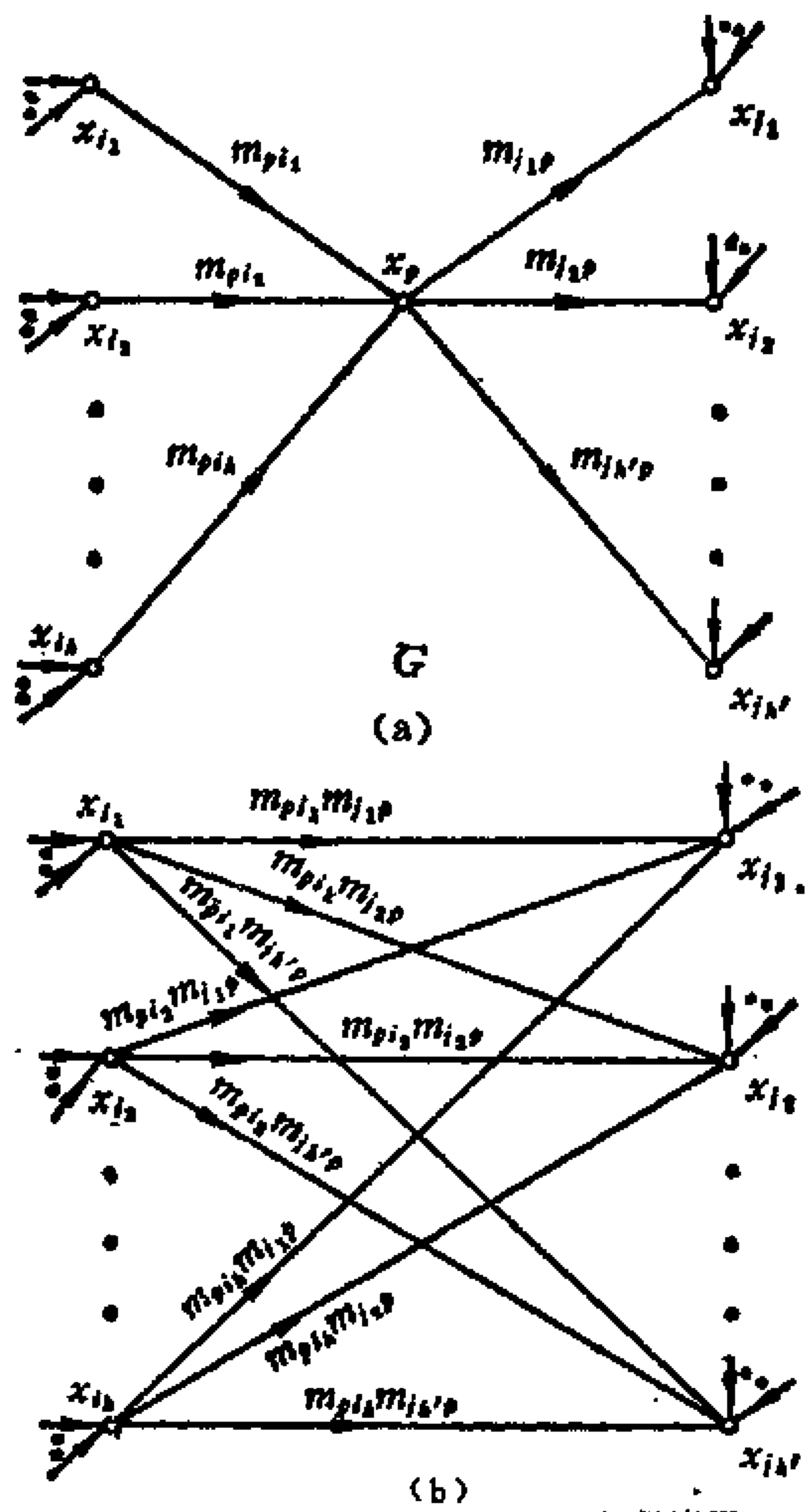


图10-2-5 消去了一个顶点的信号流图
 (a)信号流图G; (b)消去顶点 x_p 得到的信号流图

其中 $u = 1, 2, \dots, k'$ 。将式(10-2-7)代入式(10-2-8)，我们有

$$x_{j_u} = \sum_{\substack{r=1 \\ i_r \neq p}}^k (m_{j_u p} m_{p i_r}) x_{i_r} + \sum_{\substack{s=0 \\ i_s \neq p}}^n m_{j_u i_s} x_{i_s} \quad (10-2-9)$$

这个等式表明，我们要消去顶点 x_p 而不改变其余顶点处的方程，只要用从 x_{i_r} 到 x_{j_u} 的一条权为 $(m_{p i_r} m_{j_u p})$ 边来取代由 $m_{p i_r}$ 和 $m_{j_u p}$ 这两条边组成的有向路径就行了，如图10-2-5(b)所示，($1 \leq r \leq k, 1 \leq s \leq k'$)。顶点 x_{i_r} 和 x_{j_u} 可以是相同的。然而，若它们相同， $m_{p i_r}$ 和 $m_{j_u p}$ 将是一个有向回路，而不是一个有向路径(这是有专门名词的好处)。

应用信号流图的一个目的是寻求源点 x_n 和汇点 x_0 之间的关系。如果逐次运用上述规则，而得到一个只含两个顶点 x_n 和 x_0 和由 x_n 到 x_0 的一条边的信号流图，那么这条边的权就给出了待求的关系。可以看出，逐次运用这些规则来得到所求关系的过程也正是代入并化简联立方程的过程。使用信号流图的一个重要优点就是可以用拓扑方法得到所求的关系。这一点我们紧接着就讨论。

方程(10-2-2)可以表示为：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n-11} & \cdots & \cdots & m_{n-1n} \\ m_{n1} & \cdots & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \quad (10-2-10)$$

在 $x_n = K x_0$ (10-2-11)

时，式(10-2-10)又可以写为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & & m_{1n} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & & m_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ m_{n-11} & m_{n-12} & & m_{n-1n} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & K \\ \hline m_{01} & m_{02} & & m_{0n} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \\ x_0 \end{bmatrix} \quad (10-2-12)$$

或者

$$\begin{bmatrix} (m_{11} - 1) & m_{12} & \cdots & m_{1n} & 0 \\ m_{21} & (m_{22} - 1) & \cdots & m_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ m_{n-11} & m_{n-12} & \cdots & m_{n-1n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & K \\ m_{01} & m_{02} & \cdots & m_{0n} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \\ x_0 \end{bmatrix} = 0 \quad (10-2-13)$$

为简化起见，将式(10-2-13)表示为

$$(M - U)X = 0 \quad (10-2-14)$$

现在，比较一下图10-2-6所示的矩阵 $(M - U)$ 的流图和图10-2-2所示的信号流图，可以看出，这两个线图几乎是一样的。事实上，图10-2-2中的信号流图是图10-2-6中流图的子图，换句话说，我们在图10-2-2的信号流图中，给每个顶点都加上权为 (-1) 的自环，并加上一条从顶点 x_0 到顶点 x_n 的 K 边，就可以得到图10-2-6的流图。为简便起见，称图10-2-2中的信号流图为图10-2-6中流图的对应信号流图。

由式(10-1-9)， $(M - U)$ 的行列式是

$$|M - U| = (-1)^{n+1} \sum (-1)^{k_i} (P\text{-集圈 } D_i \text{ 乘积}) \quad (10-2-15)$$

设 $D_i(\bar{K})$ 是一个不含边 K 的 P -集圈，又设 $D_i(K)$ 是一个包

含边 K 的 P -集圈，则式(10-2-15)变成

$$|M - U| = (-1)^{n+1} [C + KP] \quad (10-2-16)$$

其中

$$C = \sum (-1)^{k_i} (P\text{-集圈 } D_i(\bar{K}) \text{ 乘积}) \quad (10-2-17)$$

$$KP = \sum (-1)^{k_q} (P\text{-集圈 } D_q(K) \text{ 乘积}) \quad (10-2-18)$$

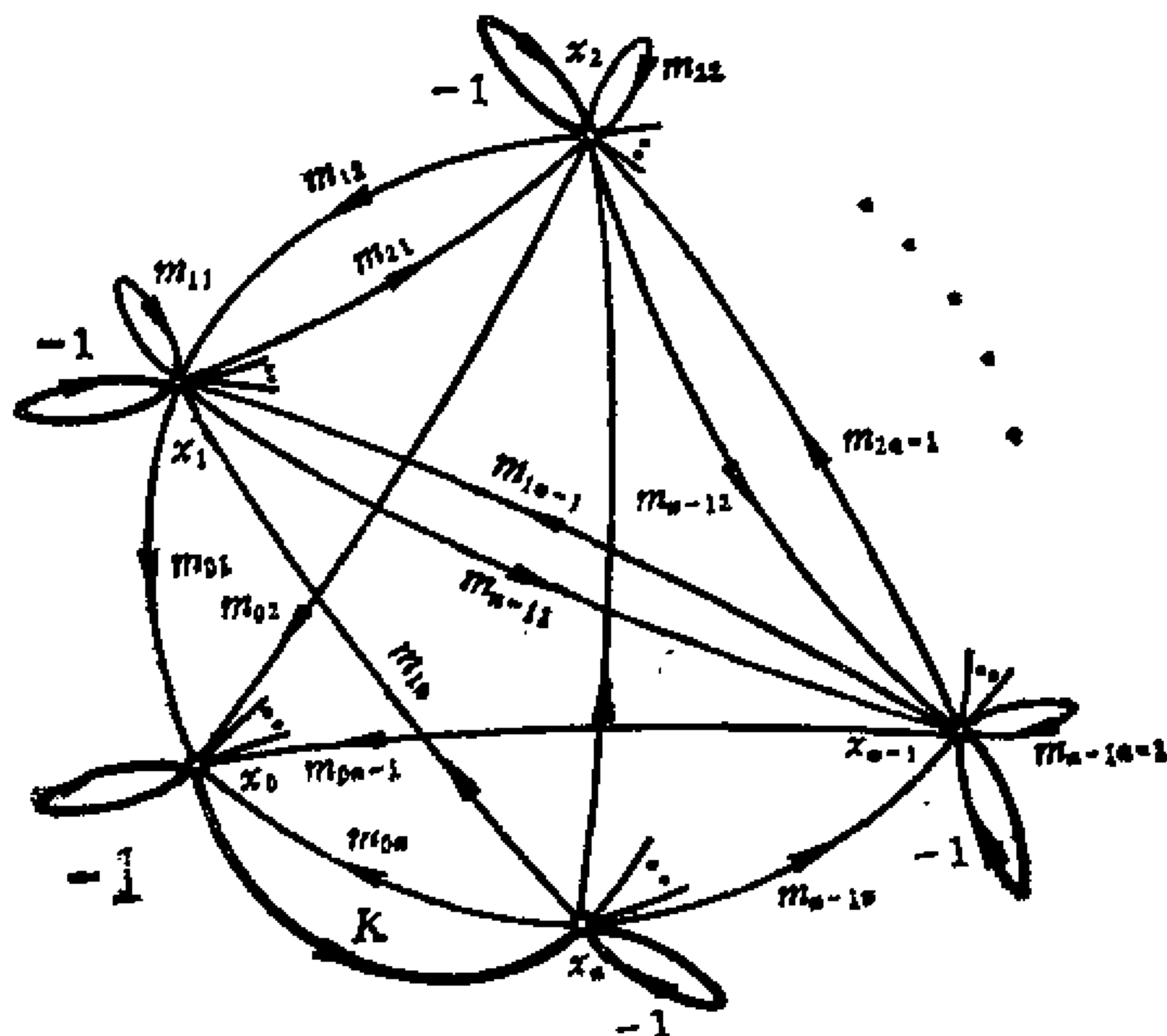


图10-2-6 $(M-U)$ 的流图

为了得到式(10-2-14)的非平凡解， $(M-U)$ 的行列式必须为零，或者说

$$(-1)^{n+1} [C + KP] = 0 \quad (10-2-19)$$

因此，由式(10-2-11)和式(10-2-19)就有，

$$\frac{x_0}{x_n} = \frac{1}{K} = \frac{-P}{C} \quad (10-2-20)$$

既然 C 是 $\sum (-1)^{k_i} (P\text{-集圈 } D_i(\bar{K}) \text{ 乘积})$ ，那么每个 $P\text{-集圈 } D_i(\bar{K})$ 就可以看作是有向回路的两个集合 $D_i(0)$ 和 $D_i(-1)$ 的并集，其中 $D_i(0)$ 是由对应信号流图的边组成的有向回路的集合，而 $D_i(-1)$ 是不属于对应信号流图的 (-1) 自环的集合。假定在 $D_i(-1)$ 中有 u 个自环，则

$$D_i(-1) \text{ 乘积} = (-1)^u \quad (10-2-21)$$

而

$$\begin{aligned} (-1)^{k_i} (D_i(\bar{K}) \text{ 乘积}) &= (-1)^{k_i} [D_i(0) \text{ 乘积}] \\ &\cdot [D_i(-1) \text{ 乘积}] = (-1)^{k_i-u} (-1)^u [D_i(0) \text{ 乘积}] (-1)^u \\ &= (-1)^{k'_i} (D_i(0) \text{ 乘积}) \end{aligned} \quad (10-2-22)$$

其中 $k'_i = k_i - u$ 是 $D_i(0)$ 中有向回路的数目。如果 $D_i(0)$ 是空集，则式(10-2-22)变为

$$(-1)^{k_i} D_i(\bar{K}) \text{ 乘积} = 1 \quad (10-2-23)$$

注意， $D_i(0)$ 是对应信号流图中顶点不相接的有向回路并集，它不一定包含信号流图的所有顶点。

定义10-2-2 设 C_r 定义为

$$C_r = \sum (\text{集合 } D_i(0) \text{ 的 } D_i(0) \text{ 乘积}) \quad (10-2-24)$$

它恰由 r 个有向回路组成。

于是，式(10-2-17)中的 C 等于

$$C = 1 - C_1 + C_2 - C_3 + \dots \quad (10-2-25)$$

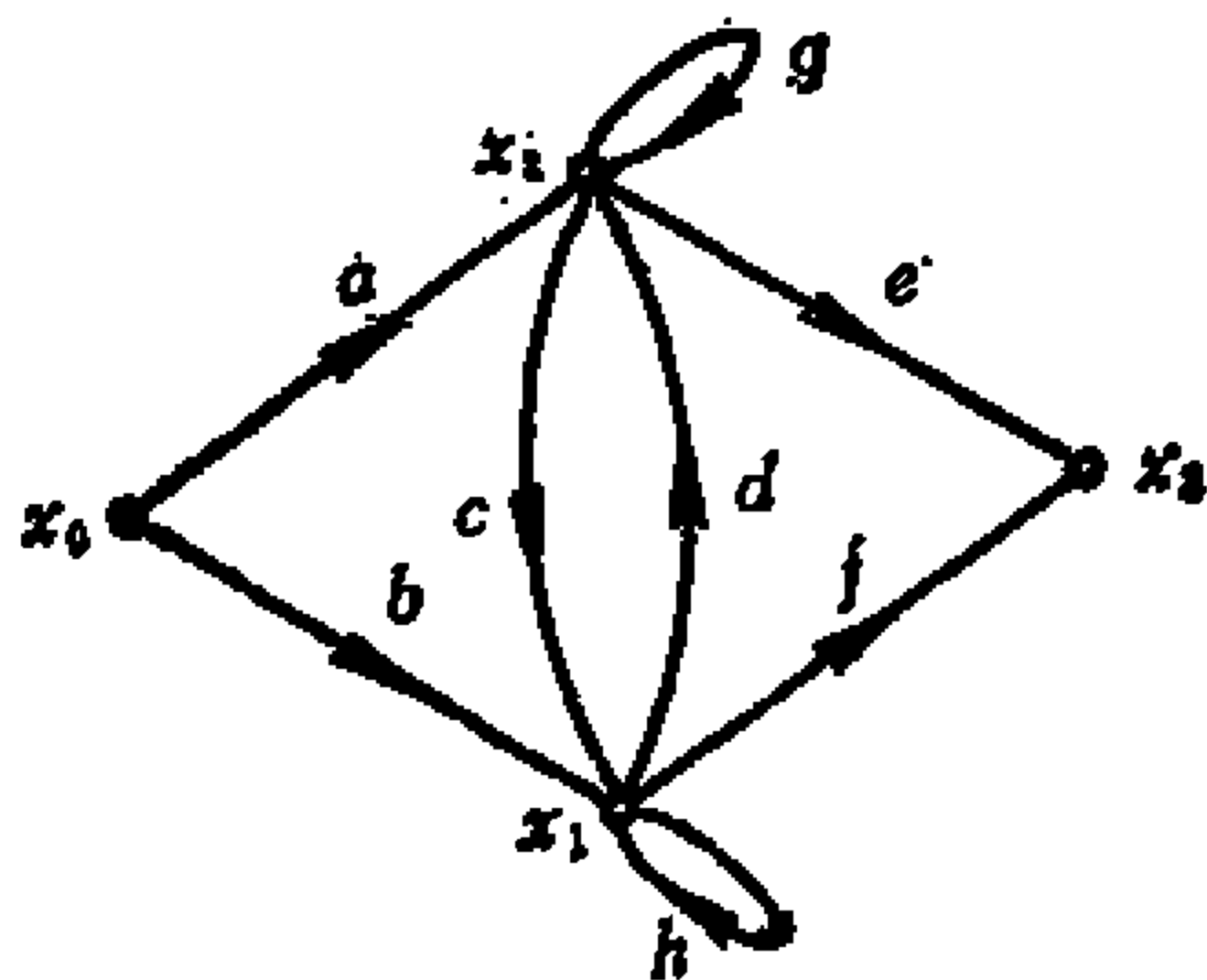


图10-2-7 信号流图

例如，图10-2-7中信号流图的 C 可以用拓扑方法得到，取 C_1 ， C_2 ，…为：

$$\begin{aligned} C_1 &= g + h + cd \\ C_2 &= gh \\ C_u &= 0 \quad (\text{对 } u \geq 3) \end{aligned}$$

因此

$$C = 1 - g - h - cd + gh$$

回忆一下，一条从顶点 v_0 到 v_n 的有向路径是从 v_0 到 v_n 的那样一条路径：若我们给定此路径的方向为从 v_0 到 v_n ，则路径中每条边的方向将与路径的方向一致（见定义6-6-7）。例如，图10-2-7中的 (a, e) 是从顶点 x_0 到顶点 x_3 的一条有向路径。

因为流图 G_F 的 KP 等于 $\sum (-1)^k [P\text{-集圈 } D_q(K) \text{ 乘积}]$ ，并且每个 $P\text{-集圈 } D_q(K)$ 必包含边 K 因此从 $D_q(K)$ 中删去边 K 后就是由一条有向路径 P （从顶点 x_n 到顶点 x_0 ）以及一些有向回路组成的顶点不相交的并集。现在定义符号 P_i 和 $G_F(\overline{\Omega(P_i)} \bar{K})$ 是有用的。

定义10-2-3 符号 P_i 表示在流图 G_F （见图10-2-6）中从顶

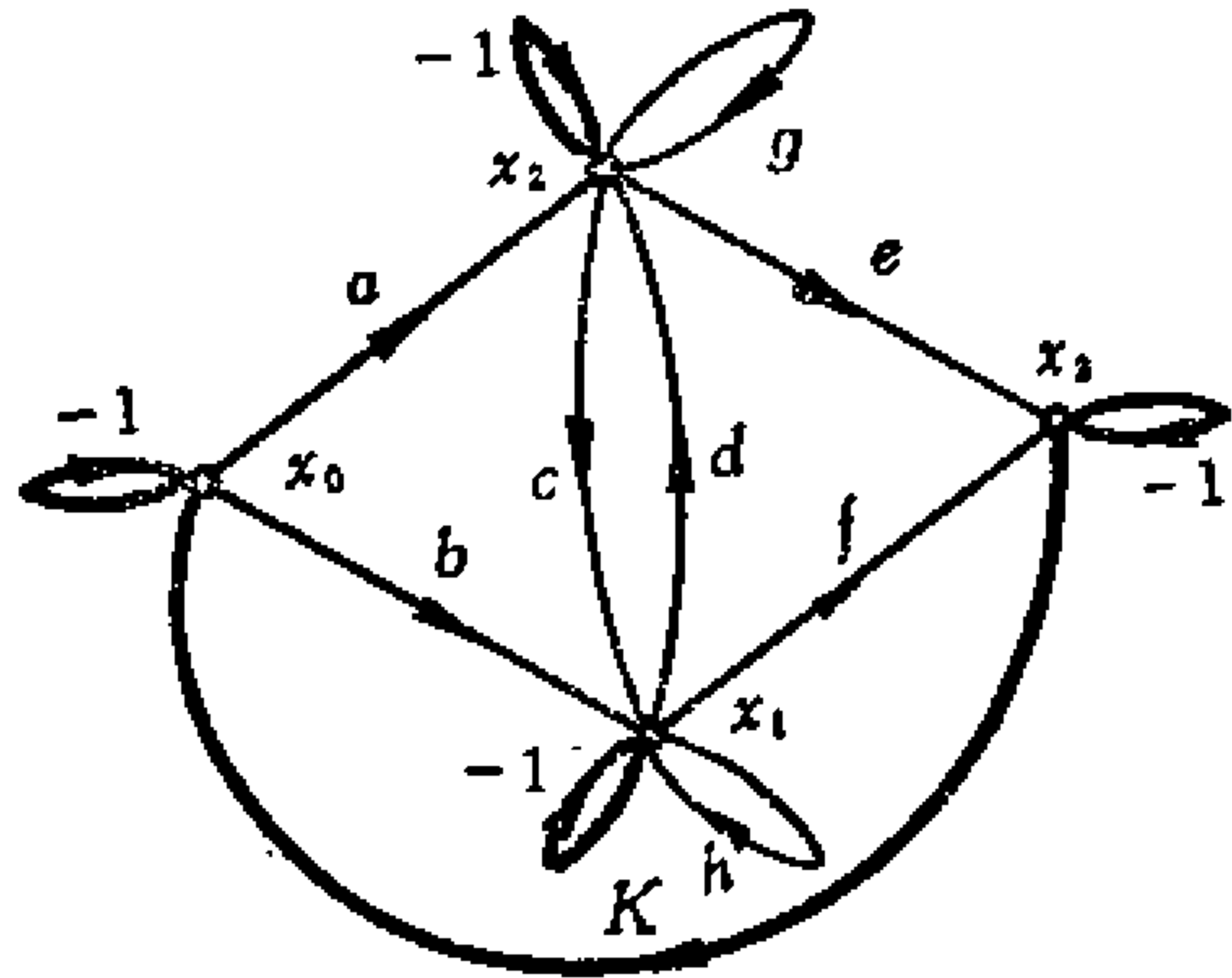


图10-2-8 流图 G_F

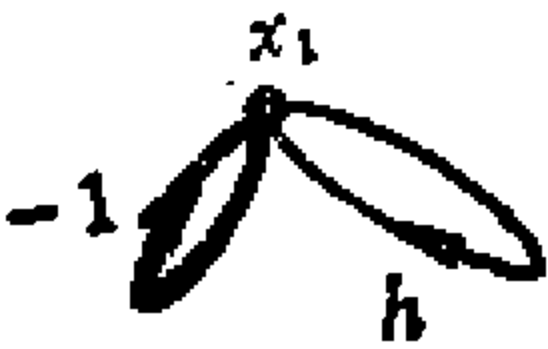


图10-2-9 G_F 的子图 $G_F(\overline{\Omega(P_i)} \bar{K})$ ，
此处 $P_i = (a, e)$

点 x_0 到顶点 x_n 的一条有向路径。符号 $G_F(\overline{\Omega(P_i)}\bar{K})$ 表示 G_F 的一个子图，它是由删除 P_i 的所有顶点，并删除与这些顶点相连的所有边以及边 K 而得到的。

$G_F(\overline{\Omega(P_i)}\bar{K})$ 的一个例子如图10-2-9所示，此时 G_F 如图10-2-8所示，而 $P_i = (a, e)$ 。

按照这个定义，包含路径 P_i 而不含边 K 的 $D_q(K)$ 可以看作由 $G_F(\overline{\Omega(P_i)}\bar{K})$ 中顶点不相接的各有向回路并集以及 P_i 所组成的集合。如果我们取流图 G_F 中的全部 $D_q(K)$ ，它们都包含有向路径 P_i ，则

$$\sum_{\{D_q(K); P_i \in D_q(K)\}} (-1)^{k_q} D_q(K) \text{乘积} = -K \sum_{(i)} (P_i \text{乘积}) \times$$

$$[\sum (-1)^{k_q-1} (G_F(\overline{\Omega(P_i)}\bar{K}) P\text{-集圈乘积})] \quad (10-2-26)$$

其中 $\sum_{\{D_q(K); P_i \in D_q(K)\}}$ 表示“对所有包含 P_i 的 $D_q(K)$ 求和”。

因为 $k_q - 1$ 是 P -集圈 $D_q(K)$ 中有向回路的数目而不计其边 K ，所以 $k_q - 1$ 是 $G_F(\overline{\Omega(P_i)}\bar{K})$ 中 P -集圈 D'_q 的有向回路数。于是据式(10-2-25)，

$$\sum (-1)^{k_q-1} [G_F(\overline{\Omega(P_i)}\bar{K}) \text{的 } P\text{-集圈乘积}]$$

$$= G(\overline{\Omega(P_i)}) \text{的 } (1 - C_1 + C_2 - C_3 + \cdots) \quad (10-2-27)$$

其中 $G(\overline{\Omega(P_i)})$ 是对应信号流图 G 的一个子图，它是把有向路径 P_i 中所有的顶点、与这些顶点相连接的所有边删去而得到的。

为了避免混淆，我们用记号 $C(\bar{P}_i)$ 来表示

$$C(\bar{P}_i) = G(\overline{\Omega(P_i)}) \text{的 } (1 - C_1 + C_2 - C_3 + \cdots) \quad (10-2-28)$$

则据式(10-2-26)，我们有

$$\sum_{\{D_q(K); P_i \in D_q(K)\}} (-1)^{k_q} D_q(K) \text{乘积} = -K (P_i \text{乘积}) \cdot C(\bar{P}_i) \quad (10-2-29)$$

因此，式(10-2-20)右边的分子是

$$-P = \sum_{i=1}^{(i)} (P_i \text{ 乘积}) \cdot C(\bar{P}_i) \quad (10-2-30)$$

于是，由式(10-2-11)和(10-2-20)，源点与汇点之比为：

$$\frac{x_0}{x_n} = \frac{\sum_{i=1}^{(i)} (P_i \text{ 乘积}) \cdot C(\bar{P}_i)}{1 - C_1 + C_2 - C_3 + \dots} \quad (10-2-31)$$

这个方程通称为梅森(Mason)公式，作为一个例子，考虑图 10-2-7的信号流图，我们可以得到从 x_0 到 x_3 的 $\sum_{i=1}^{(i)} (P_i \text{ 乘积}) \cdot C(\bar{P}_i)$ 为：

$$\sum_{i=1}^{(i)} (P_i \text{ 乘积}) \cdot C(\bar{P}_i) = ae(1-h) + bf(1-g) + acf + bde$$

因此

$$\frac{x_0}{x_3} = \frac{ae(1-h) + bf(1-g) + acf + bde}{1 - g - h - cd + gh}$$

10-3 信号流图的等效变换

在上节的开头，我们讨论了把一个信号流图变成较简单结构的规则。这里，我们不采用这些规则，而可以一步就将信号流图的一部分简化。为了研究这种方法，我们来考虑由两个子图 G_M 和 G_R 组成的信号流图 G ，如图10-3-1所示，这两个子图是由顶点 x_1, x_2, \dots, x_n 结合在一起的。与这个信号流图对应的方程组为

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 \\ M_{21} & M_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_M \\ X_I \\ X_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_M \\ X_I \\ X_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_M \\ X_I \\ X_R \end{bmatrix} \quad (10-3-1)$$

其中，矩阵 M 来自子图 G_M ：

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \tag{10-3-2}$$

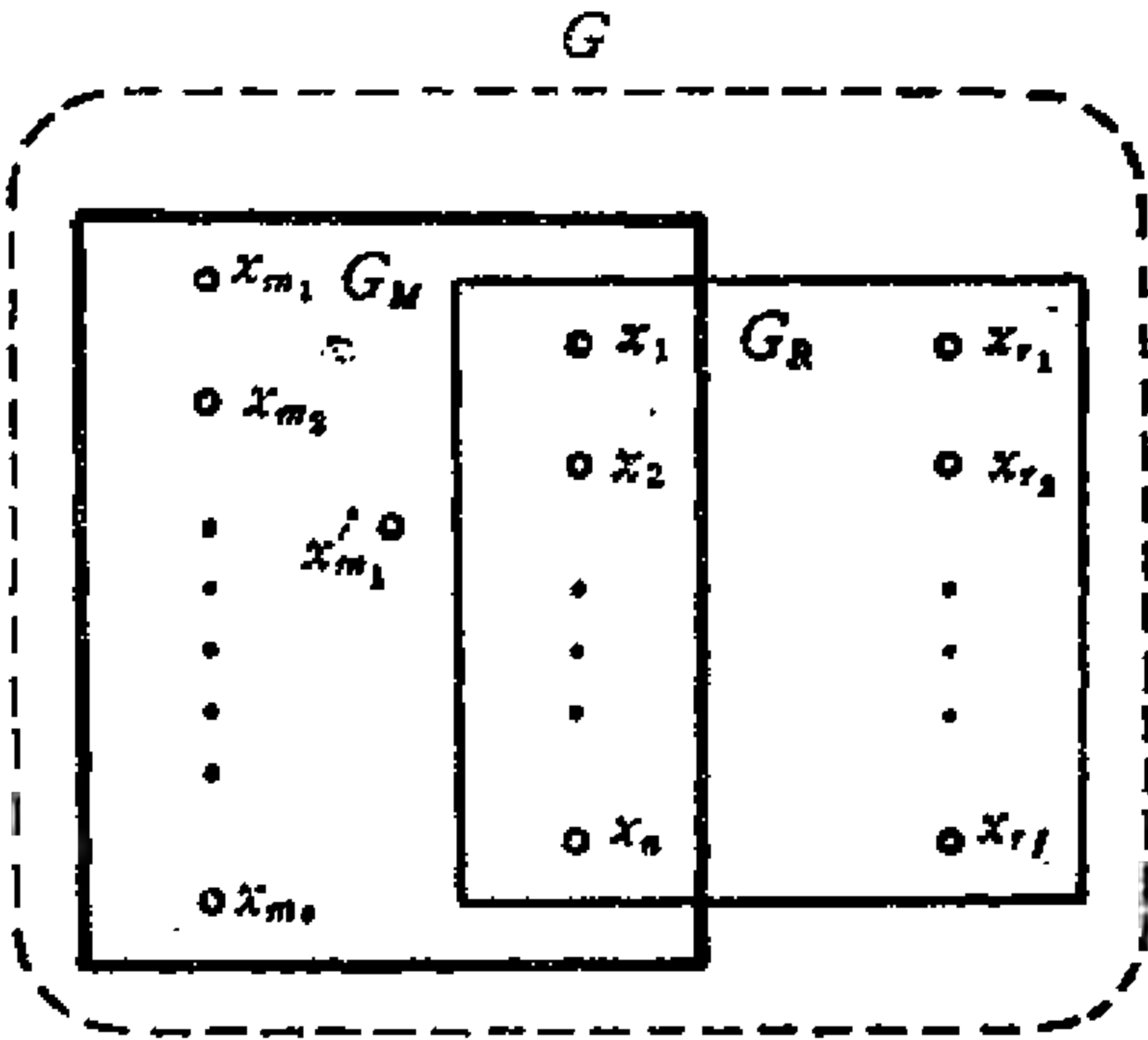


图10-3-1 由子图 G_M 和 G_R 组成的信号流图 G

而矩阵 R 来自子图 G_R ：

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \tag{10-3-3}$$

向量 X_M , $X_{\tilde{M}}$, X_I 和 X_R 是：

$$X_M = \begin{bmatrix} x_{m1} \\ x_{m2} \\ \vdots \\ x_{mr} \end{bmatrix}, \quad X_{\tilde{M}} = \begin{bmatrix} x'_{m1} \\ x_{m2} \\ \vdots \\ x_{mr} \end{bmatrix}, \quad X_I = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad X_R = \begin{bmatrix} x_{r1} \\ x_{r2} \\ \vdots \\ x_{rl} \end{bmatrix} \tag{10-3-4}$$

此处 x_m 是源点， x'_m 是汇点。

方程(10-3-1)可以分成两个方程组，即，

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_M \\ X_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{11} & R_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_M \\ X_I \\ X_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_M \\ \tilde{X}_M \\ X_I \end{bmatrix} \quad (10-3-5)$$

和,

$$[R_{21} \quad R_{22}] \begin{bmatrix} X_I \\ X_R \end{bmatrix} = X_R \quad (10-3-6)$$

式(10-3-6)又可以写为

$$[R_{21} \quad (R_{22} - U)] \begin{bmatrix} X_I \\ X_R \end{bmatrix} = 0 \quad (10-3-7)$$

假定 $(R_{22} - U)$ 是非奇异的, 此方程就能解出 X_R

$$X_R = -[R_{22} - U]^{-1} R_{21} X_I \quad (10-3-8)$$

将此式代入式(10-3-5)得

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_M \\ X_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_{21} - R_{12}[R_{22} - U]^{-1}R_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_M \\ X_I \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} X_M \\ \tilde{X}_M \\ X_I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10-3-9)$$

由式(10-3-1)得到的汇点和源点之比 (x'_m/x_m) 正好与由式(10-3-9)得到的相同。因此在图10-3-1中, 消去子图 G_R 的所有顶点 $x_{r_1}, x_{r_2}, \dots, x_{r_f}$ 之后, 必然得到式(10-3-9)所表示的图。换句话说, 可以用一个由顶点 x_1, x_2, \dots, x_n 构成的新图来代替子图 G_R , 前者由下式给出:

$$[R_{11} - R_{12}(R_{22} - U)^{-1}R_{21}]X_I = X_I \quad (10-3-10)$$

因此, 要从所给的子图 G_R 得到新子图 G_I , 只需知道 $[R_{11} - R_{12}(R_{22} - U)^{-1}R_{21}]$ 的每个元素即可。

为了简便, 首先定义以下符号。

定义10-3-1 对于给定的矩阵 R , 符号

$$R\left(\frac{t_1 t_2 \cdots t_v}{u_1 u_2 \cdots u_v}\right) \text{ 或 } R\left(\frac{\bar{t}_q}{\bar{u}_q}; q=1, 2, \cdots, v\right)$$

表示从 R 删去行 t_1, t_2, \cdots, t_v 和列 u_1, u_2, \cdots, u_v 后得到的子矩阵, 符号 $G_R(\overline{u_1 u_2 \cdots u_v})$ 或 $G_R(\bar{u}_q; q=1, 2, \cdots, v)$ 用以表示从线图 G_R 中删去顶点 u_1, u_2, \cdots, u_v 及连接到这些顶点上的所有边而得到的线图。

设

$$[R_{22} - U]^{-1} = \begin{bmatrix} \Delta_{h_1 h_1} & \Delta_{h_2 h_1} & \cdots & \Delta_{h_f h_1} \\ \Delta_{h_1 h_2} & \Delta_{h_2 h_2} & \cdots & \Delta_{h_f h_2} \\ & & \cdots & \\ \Delta_{h_1 h_f} & \Delta_{h_2 h_f} & \cdots & \Delta_{h_f h_f} \end{bmatrix} \quad (10-3-11)$$

和

$$R_{11} - R_{12}[R_{22} - U]^{-1}R_{21} = [C_{tu}] \quad (10-3-12)$$

又设 R 的行和列顺次为 $1, 2, \cdots, n, h_1, h_2, \cdots, h_f$ 。于是从式 (10-3-12), 就有

$$C_{tu} = r_{tu} - \frac{1}{\Delta} [r_{th_1} \ r_{th_2} \ \cdots \ r_{th_f}] \begin{bmatrix} \Delta_{h_1 h_1} & \cdots & \Delta_{h_f h_1} \\ \Delta_{h_1 h_2} & \cdots & \Delta_{h_f h_2} \\ & & \cdots \\ \Delta_{h_1 h_f} & \cdots & \Delta_{h_f h_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{h_1 u} \\ r_{h_2 u} \\ \vdots \\ r_{h_f u} \end{bmatrix} \quad (10-3-13)$$

或

$$C_{tu} = \frac{1}{\Delta} \left(r_{tu} \Delta - \sum_{p, q=1}^f r_{th_p} \Delta_{h_p h_q} r_{h_q u} \right) \quad (10-3-14)$$

式 (10-3-14) 右端的分子恰为以下矩阵的行列展开式:

$$\begin{bmatrix} r_{tu} & r_{th_1} & \cdots & r_{th_f} \\ \hline r_{h_1 u} & & & \\ r_{h_2 u} & & & \\ \vdots & & & \\ r_{h_f u} & & & \end{bmatrix} = [R - U] \begin{pmatrix} \bar{q}; q=1, 2, \cdots, n, q \neq t \\ \bar{q}'; q'=1, 2, \cdots, n, q' \neq u \end{pmatrix} \quad (10-3-15)$$

因为

$$[R_{22} - U] = [R - U] \begin{pmatrix} \bar{q}: \\ \bar{q}: \end{pmatrix} q = 1, 2, \dots, n \quad (10-3-16)$$

所以，我们有：

$$C_{i_u} = \frac{\left| [R - U] \begin{pmatrix} \bar{q}: \\ \bar{q}: \end{pmatrix} q = 1, 2, \dots, n, q \neq t \right|}{\left| [R - U] \begin{pmatrix} \bar{w}: \\ \bar{w}: \end{pmatrix} w = 1, 2, \dots, n \right|} \quad (10-3-17)$$

对应于

$$R \begin{pmatrix} \bar{w}: \\ \bar{w}: \end{pmatrix} w = 1, 2, \dots, n$$

的信号流图是 $G_R(\bar{x}_w; w = 1, 2, \dots, n)$ ，因为删去行 i_u 和列 i_u 等价于删去 G_R 的顶点 x_{i_u} 以及所有与该点相连的边。于是，据式(10-1-9)：

$$\begin{aligned} & \left| [R - U] \begin{pmatrix} \bar{w}: \\ \bar{w}: \end{pmatrix} w = 1, 2, \dots, n \right| \\ &= (-1)^\alpha \sum (-1)^{k_i} (\bar{G}_R(\bar{x}_w; w = 1, 2, \dots, n) \text{ 的 } P\text{-集圈} \\ & \quad D_i \text{ 乘积}) \end{aligned} \quad (10-3-18)$$

其中， $\bar{G}_R(\bar{x}_w; w = 1, 2, \dots, n)$ 是在 $G_R(\bar{x}_w; w = 1, 2, \dots, n)$ 的每个顶点上加入 (-1) 自环而得到的流图， k_i 是 P -集圈 D_i 中有向回路的数目。因此，据式(10-2-26)：

$$\begin{aligned} & \left| [R - U] \begin{pmatrix} \bar{w}: \\ \bar{w}: \end{pmatrix} w = 1, 2, \dots, n \right| \\ &= (-1)^\alpha [\text{信号流图 } G_R(\bar{x}_w; w = 1, 2, \dots, n) \text{ 的} \\ & \quad (1 - C_1 + C_2 - C_3 + \dots)] \end{aligned} \quad (10-3-19)$$

注意， α 是 $G_R(\bar{x}_w; w = 1, 2, \dots, n)$ 的顶点数。

由

$$\left| [R - U] \begin{pmatrix} \bar{q}: q = 1, 2, \dots, n, q \neq t \\ \bar{q}': q' = 1, 2, \dots, n, q' \neq u \end{pmatrix} \right|$$

来考虑流图 $\bar{G}_F(K, \bar{x}_w: w = 1, 2, \dots, n, w \neq t, u)$, 我们给信号流图 $G_R(\bar{x}_w: w = 1, 2, \dots, n, w \neq t, u)$ 的每个顶点加一个 (-1) 自环, 并加一条从 x_t 到 x_u 的边 K 就可以得到它. 考虑矩阵 F , 它的行 u 和列 t 除元素 (u, t) 是 K 之外, 其余元素都是零, 并且它还有如下性质, 删除行 u 和列 t 之后, 所得的矩阵是

$$[R - U] \begin{pmatrix} \bar{q}: q = 1, 2, \dots, n, q \neq t \\ \bar{q}': q' = 1, 2, \dots, n, q' \neq u \end{pmatrix}$$

即 F 是

$$F = \begin{matrix} & \begin{matrix} t & u & & r_1 & & r_f \end{matrix} \\ \begin{matrix} t \\ u \\ r_1 \\ \vdots \\ r_f \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccc} 0 & & & & & \\ K & 0 & & & & 0 \\ 0 & & [R - U] \begin{pmatrix} \bar{q}: q = 1, 2, \dots, n, q \neq t \\ \bar{q}': q' = 1, 2, \dots, n, q' \neq u \end{pmatrix} & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{array} \right] \end{matrix} \quad (10-3-20)$$

于是 F 的行列式为

$$|F| = (-1)^{t+u} K \left| [R - U] \begin{pmatrix} \bar{q}: q = 1, 2, \dots, n, q \neq t \\ \bar{q}': q' = 1, 2, \dots, n, q' \neq u \end{pmatrix} \right| \quad (10-3-21)$$

因为 F 是一个方阵, 于是对于它的所有行和列, 列 r 和行 r 表示同一个顶点 x_r , 所以, 存在着一个与 F 对应的流图 G'_F , 使得

$$|F| = (-1)^{\sigma'} \sum (-1)^k (G'_F \text{ 的 } P\text{-集圈 } D_r \text{ 乘积}) \quad (10-3-22)$$

我们还可以看出, 流图 G'_F 除了没有从 x_t 到 x_u 的边之外, 其余

部分与 $\bar{G}_R(K, \bar{x}_w; w=1, 2, \dots, n, w \neq t, u)$ 相同。

因此

$$\begin{aligned} & (-1)^{\alpha'} \sum (-1)^{k'} (G'_F \text{ 的 } P\text{-集圈 } D_r \text{ 乘积} \\ & = (-1)^{\alpha'} \sum (-1)^{k'} [\bar{G}_F(K, \bar{x}_w; w=1, 2, \dots, n, w \neq t, u) \\ & \text{的 } P\text{-集圈 } D_r(K) \text{ 乘积}] \end{aligned} \quad (10-3-23)$$

其中 $D_r(K)$ 代表一个包含边 K 的 P -集圈。因此，据式(10-3-21)我们有

$$\begin{aligned} & \left| [R - U] \begin{pmatrix} \bar{q}; q=1, 2, \dots, n, q \neq t \\ \bar{q}'; q'=1, 2, \dots, n, q' \neq u \end{pmatrix} \right| \\ & = \frac{-1}{K} (-1)^{\alpha'} \sum (-1)^{k'} [\bar{G}_F(K, \bar{x}_w; w=1, 2, \dots, n, \\ & w \neq t, u) \text{ 的 } P\text{-集圈 } D_r(K) \text{ 乘积}] \end{aligned} \quad (10-3-24)$$

设 $\bar{G}_F(K, \bar{x}_w; w=1, 2, \dots, n, w \neq t, u)$ 的一个有向回路是 (K, P_i) ，其中 P_i 是从 x_u 到 x_t 的一条有向路径。于是

$$\sum_{\{D_i(K); P_i \in D_i(K)\}} (-1)^{k_i} [\bar{G}_F(K, \bar{x}_w; w=1, 2, \dots, n, w \neq t, u)$$

的 $D_i(K)$ 乘积]正好与式(10-2-26)的左边相同。因此我们有

$$\begin{aligned} & \left| [R - U] \begin{pmatrix} \bar{q}; q=1, 2, \dots, n, q \neq t \\ \bar{q}'; q'=1, 2, \dots, n, q' \neq u \end{pmatrix} \right| \\ & = (-1)^{\alpha'} \sum_{(i)} G_R(\bar{x}_w; w=1, 2, \dots, n, w \neq t, u) \text{ 的 } P_i \text{ 乘积} \\ & \quad \cdot C(\bar{P}_i) \end{aligned}$$

注意， $G_R(\bar{x}_w; w=1, 2, \dots, n, w \neq t, u)$ 是由 G_R 删去除顶点 x_t 和 x_u 之外的其余顶点 $x_w (w=1, 2, \dots, n)$ 而得的信号流图。由于 $\alpha' = \alpha + 2$ ，根据式(10-3-19)和式(10-3-25)，式(10-3-17)中的 C_{in} 为

$$C_{tu} = \frac{\sum_{(i)} G_R(\bar{x}_w; w=1, 2, \dots, n, w \neq t, u) \text{ 的 } (P_i \text{ 乘积}) \cdot C(\bar{P}_i)}{G_R(\bar{x}_w; w=1, 2, \dots, n) \text{ 的 } (1 - C_1 + C_2 - C_3 + \dots)} \quad (10-3-26)$$

如果我们把 x_t 和 x_u 分别看作 $G_R(\bar{x}_w; w=1, 2, \dots, n, w \neq t, u)$ 的源点和汇点, 则此式与梅森公式(10-2-31)相同。

当 $t=u$ 时, 式(10-3-14)变成

$$C_{tt} = \frac{1}{\Delta} \left(r_{tt} \Delta - \sum_{p, q=1} r_{thp} \Delta_{hphq} r_{hqt} \right) \quad (10-3-27)$$

因此

$$C_{tt} = \frac{\begin{vmatrix} r_{tt} & r_{th_1} & r_{th_2} & \cdots & r_{th_f} \\ r_{h_1t} & & & & \\ r_{h_2t} & & R_{22} - U & & \\ \vdots & & & & \\ r_{h_ft} & & & & \end{vmatrix}}{|R_{22} - U|} \quad (10-3-28)$$

若要改进这个等式, 令

$$C_{tt} = C_{tt} - 1 + 1 \quad (10-3-29)$$

就得到

$$C_{tt} = \frac{\begin{vmatrix} r_{tt} & r_{th_1} & \cdots & r_{th_f} \\ r_{h_1t} & & & \\ r_{h_2t} & & R_{22} - U & \\ \vdots & & & \\ r_{h_ft} & & & \end{vmatrix} - |R_{22} - U|}{|R_{22} - U|} + 1$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\begin{vmatrix} r_{11}-1 & r_{1h_1} & \cdots & r_{1h_f} \\ r_{h_1t} & & & \\ r_{h_2t} & & & \\ \vdots & & & \\ r_{h_ft} & & & \end{vmatrix}}{|R_{22}-U|} + 1 \\
&= \frac{\left| [R-U] \left(\begin{smallmatrix} \bar{q} \\ \bar{q} \end{smallmatrix}; q=1,2,\cdots,n, q \neq t \right) \right|}{\left| [R-U] \left(\begin{smallmatrix} \bar{w} \\ \bar{w} \end{smallmatrix}; w=1,2,\cdots,n \right) \right|} + 1 \quad (10-3-30)
\end{aligned}$$

因为此式的分母与式(10-3-17)的分母相同, 所以我们只需要研究分子就可以了。注意:

$$\left| [R-U] \left(\begin{smallmatrix} \bar{w} \\ \bar{w} \end{smallmatrix}; w=1,2,\cdots,n, w \neq t \right) \right|$$

的表达式与式(10-3-18)相同, 只是这里所考虑的流图是 $\bar{G}_R(\bar{x}_w; w=1,2,\cdots,n, w \neq t)$, 或者说

$$\begin{aligned}
&\left| [R-U] \left(\begin{smallmatrix} \bar{w} \\ \bar{w} \end{smallmatrix}; w=1,2,\cdots,n, w \neq t \right) \right| \\
&= (-1)^{a+1} \sum_{(j)} (-1)^{k_j} [\bar{G}_R(\bar{x}_w; w=1,2,\cdots,n, w \neq t) \text{ 的} \\
&\quad P\text{-集圈 } D_j \text{ 乘积}] \quad (10-3-31)
\end{aligned}$$

假定我们把式(10-3-31)右端分成两部分:

$$\left| [R-U] \left(\begin{smallmatrix} \bar{w} \\ \bar{w} \end{smallmatrix}; w=1,2,\cdots,n, w \neq t \right) \right| = (-1)^{a+1} (F_1 + F_2) \quad (10-3-32)$$

其中 F_1 是这样一些项的集体, 它们是与在顶点 x_t 上有 (-1) 自环的所有可能的 P -集圈相对应的各项; 而 F_2 是其余项的集体,

F_1 还可以表达为

$$F_1 = (-1) \sum_{(t)} (-1)^{k_t} (\bar{G}_R(\bar{x}_w; w=1, 2, \dots, n) P\text{-的集} \\ \text{圈 } D_t \text{ 乘积}) \quad (10-3-33)$$

这是因为每个 $D_t(x_t)$ 都包含了在顶点 x_t 上的 (-1) 自环。余下的集合没有这种自环，就是 $\bar{G}_R(\bar{x}_w; w=1, 2, \dots, n)$ 的 P -集圈 D_t 。因此式(10-3-32)变为

$$\left| [R - U] \begin{pmatrix} \bar{w}: \\ \bar{w}: \end{pmatrix} w=1, 2, \dots, n, w \neq t \right| \\ = (-1)^{q+2} G_R(\bar{x}_w; w=1, 2, \dots, n, w \neq t) \text{ 的 } \{(-1)[G_R(\bar{x}_w; \\ w=1, 2, \dots, n) \text{ 的 } (1 - C_1 + C_2 - C_3 + \dots)] \\ + \sum_{(t)} [d_t(x_t) \text{ 乘积}] \cdot C(\bar{d}_t)\} \quad (10-3-34)$$

其中 $d_t(x_t)$ 是信号流图 $G_R(\bar{x}_w; w=1, 2, \dots, n, w \neq t)$ 的一个有向回路，它包含顶点 x_t 。此外， $C(\bar{d}_t)$ 是子图 $G''(\bar{d}_t)$ 的 $(1 - C_1 + C_2 - C_3 + \dots)$ ，该子图是从 $G_R(\bar{x}_w; w=1, 2, \dots, n, w \neq t)$ 删去有向回路 d_t 的所有顶点和与这些顶点相连的边而得到的。

由式(10-3-19)和式(10-3-34)，式(10-3-30)变为

$$C_{tt} = \frac{\sum_{(t)} G_R(\bar{x}_w; w=1, 2, \dots, n, w \neq t) \text{ 的 } [d_t(x_t) \text{ 乘积}] \cdot C(\bar{d}_t)}{G_R(\bar{x}_w; w=1, 2, \dots, n) \text{ 的 } (1 - C_1 + C_2 - C_3 + \dots)} \quad (10-3-35)$$

注意，用于等效变换的两个等式，式(10-3-26)和式(10-3-35)是非常相似的，这两式之间唯一的差别是一个有 $[d_t(x_t) \text{ 乘积}]$ 。由于 P_t 是从顶点 x_w 到顶点 x_t 的有向路径，因此，若合并顶点 x_w 和 x_t ，则该有向路径就变成包含顶点 x_t 的有向回路 $d_t(x_t)$ 。注意，式(10-3-26)和式(10-3-35)是在假设矩阵 $[R_{22} - U]$ 非奇异的情况下得到的。但是，也可以不要这个假设而得到这两个等式，我

们将这一点留给读者证明。

例10-3-1 假定我们有一个信号流图如图10-3-2所示，其中源点和汇点都在 G_M 内，于是可以用下面的步骤消去子图 G_R 。因为式(10-3-26)和式(10-3-35)的分母 D 是相同的，所以，

$$D = G_R(\bar{x}_w; w=1,2,3) \text{ 的 } (1 - C_1 + C_2 - C_3 + \dots) \quad (10-3-36)$$

其中 $G_R(\bar{x}_w; w=1,2,3)$ 由图10-3-3给出， D 可简单地写为

$$D = 1 - g - h - def + gh$$

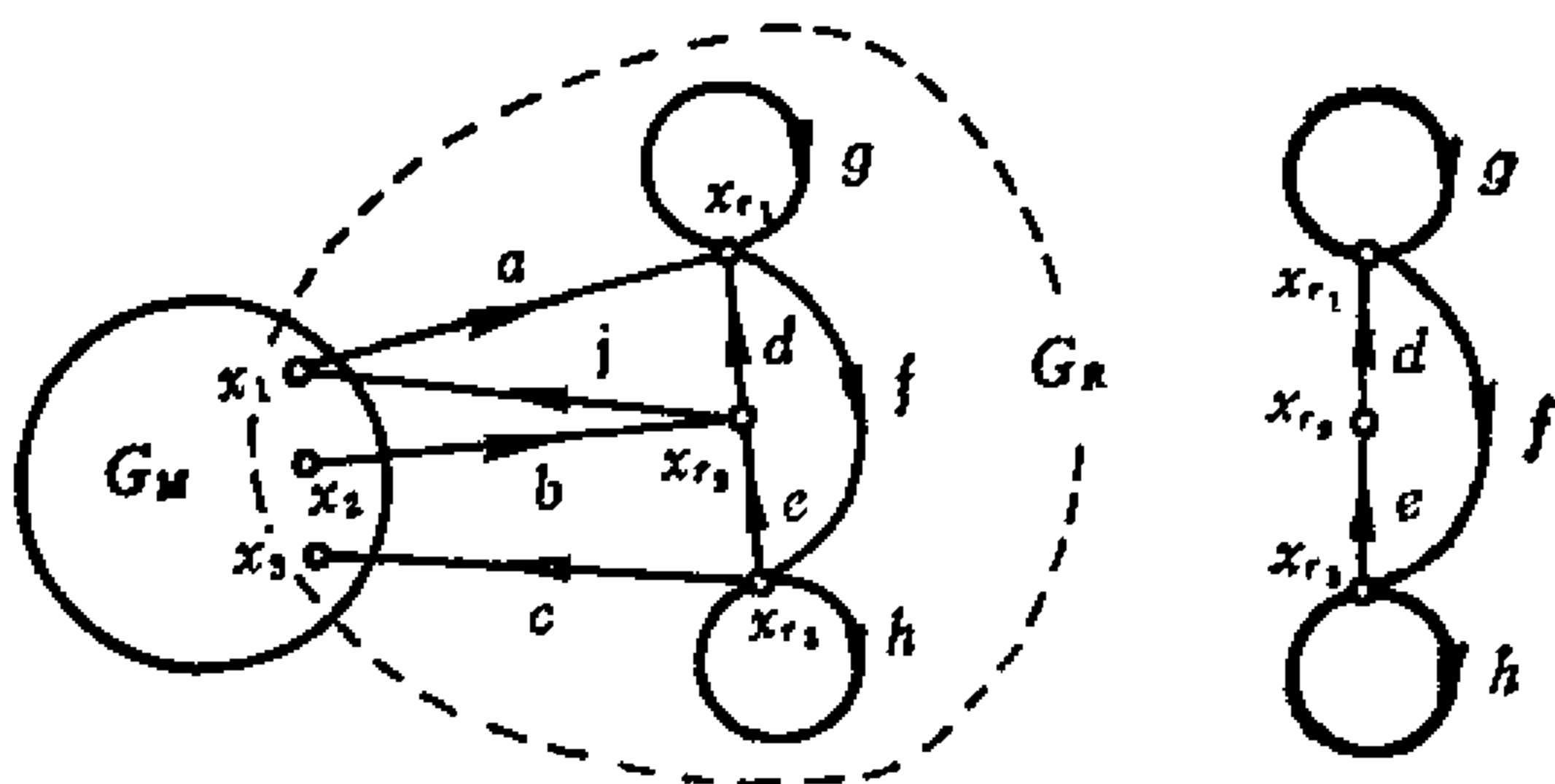


图10-3-2 由两个子图 G_M 和 G_R 所组成的信号流图 G 图10-3-3 子图 $G_R(\bar{x}_w; w=1,2,3)$

对于 k_{11} ，式(10-3-35)的分子 N_{11} 是

$$N_{11} = \sum_{(j)} G_R(\bar{x}_w; w=2,3) \text{ 的 } [d_j(x_1) \text{ 乘积}] \cdot C(\bar{d}_j)$$

其中 $G_R(\bar{x}_w; w=2,3)$ 如图10-3-4所示。因此，

$$N_{11} = aefj$$

于是

$$K_{11} = \frac{aefj}{1 - g - h - def + gh}$$

对于 k_{31} , 式(10-3-26)的分子 N_{31} 是

$$N_{31} = \sum_{(i)} G_R(\bar{x}_2) \text{ 的 } (P_i \text{ 乘积}) \cdot C(\bar{P}_i)$$

其中 $G_R(\bar{x}_2)$ 如图10-3-5所示, 因此,

$$N_{31} = acf$$

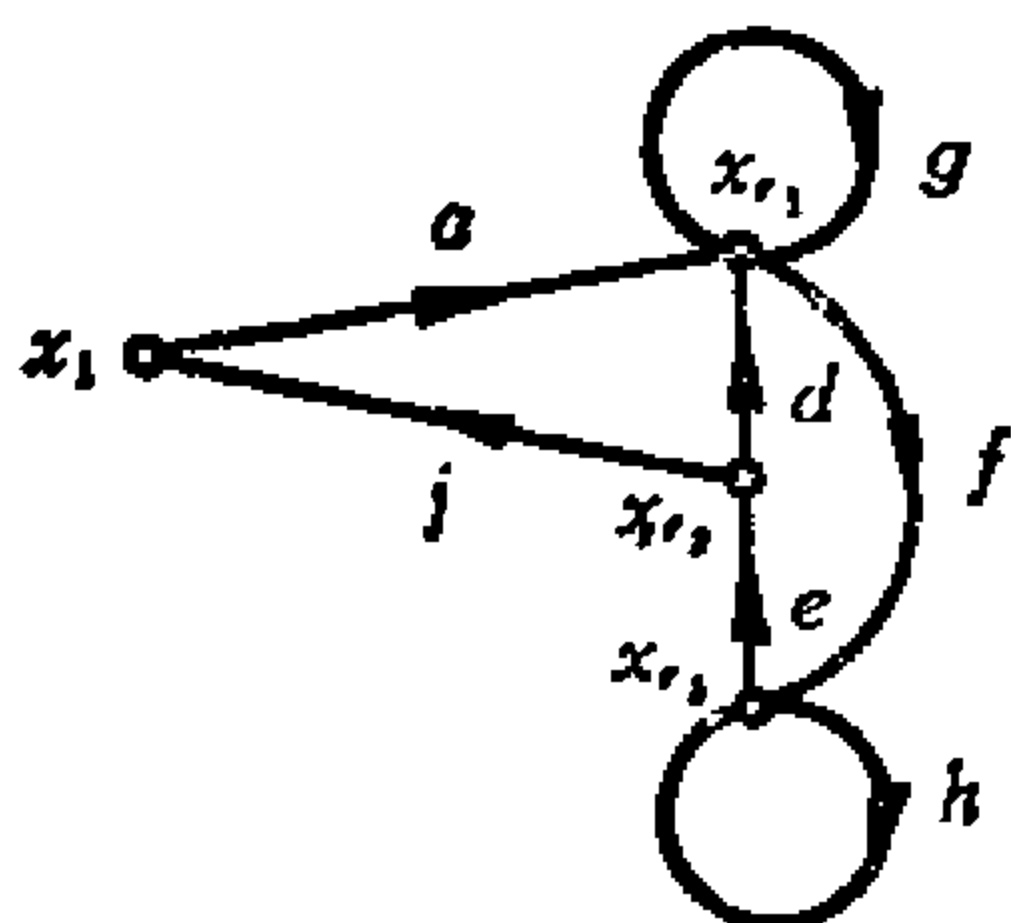


图10-3-4 子图 $G_R(\bar{x}_w; w=2, 3)$

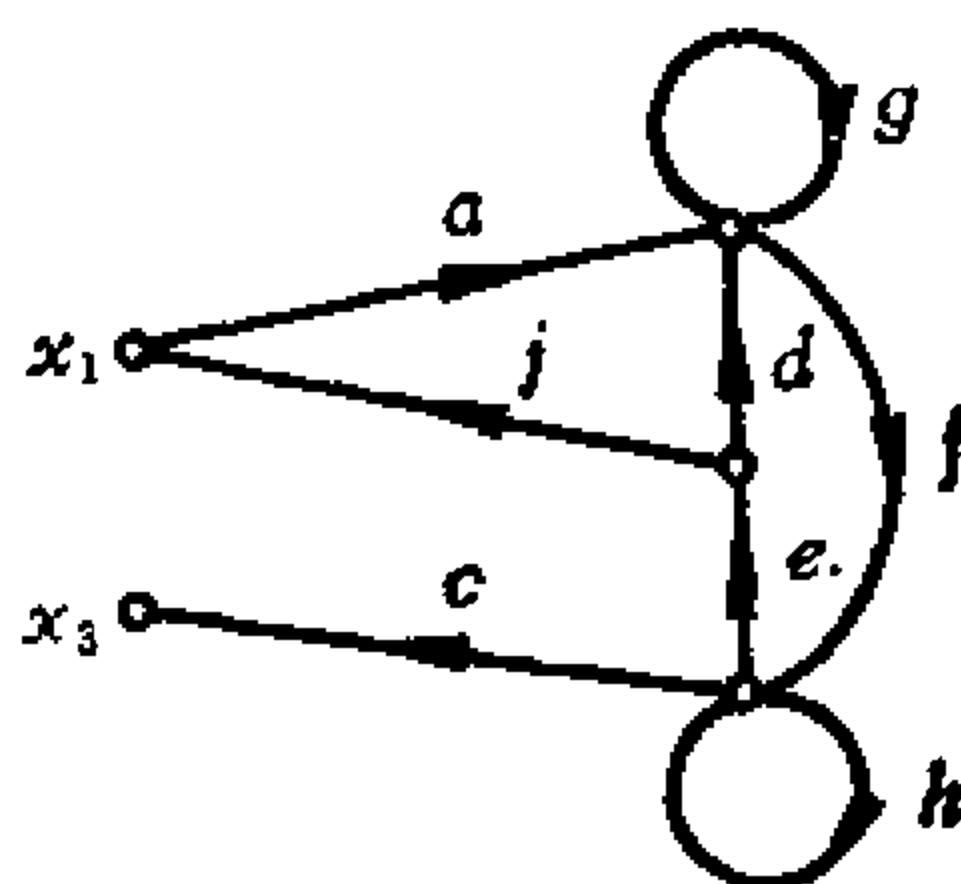


图10-3-5 $G_R(\bar{x}_2)$

现在就有

$$k_{31} = \frac{acf}{1 - g - h - def + gh}$$

类似地

$$k_{12} = \frac{bcd f}{1 - g - h - def + gh}$$

以及

$$k_{12} = \frac{bj(1 - g - h + gh)}{1 - g - h - def + gh}$$

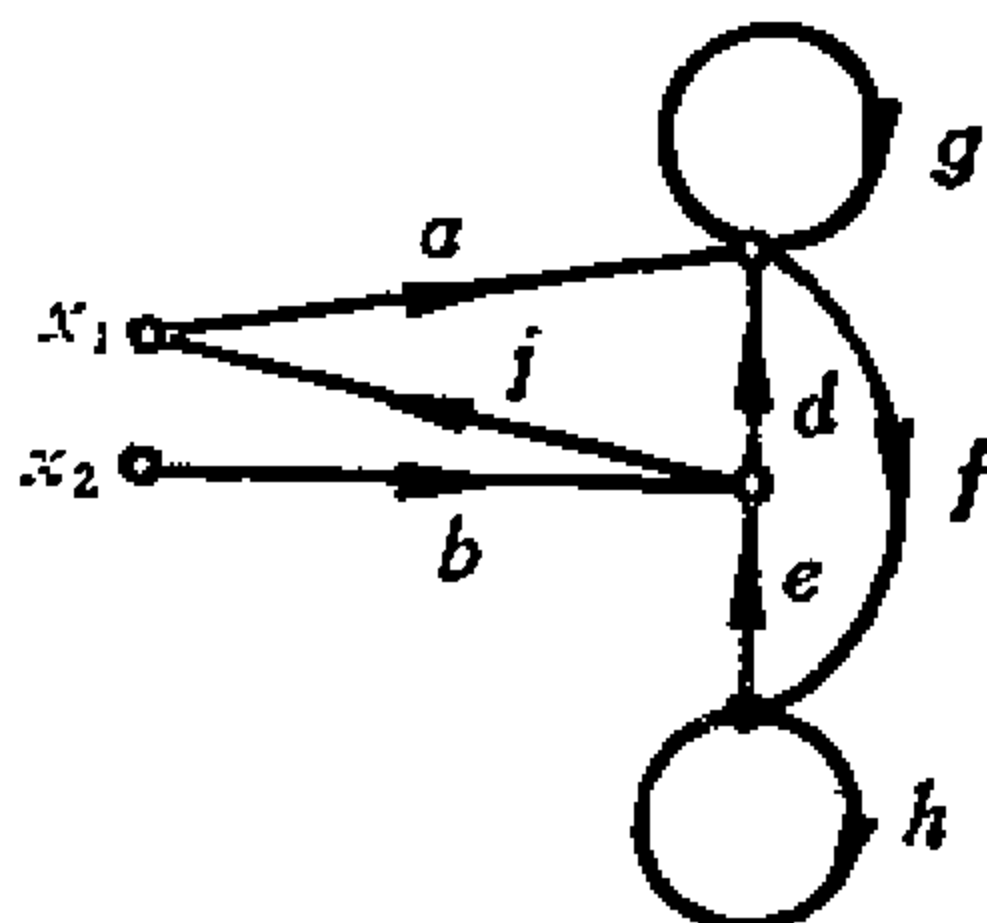


图10-3-6 $G_R(\bar{x}_3)$

其中 $G_R(\bar{x}_3)$ 如图10-3-6所示, k_{12} 的分子是从它得到的. 容易看出, 其他如 k_{21} , k_{22} , ... 都为零. 删除顶点 x_{r1} , x_{r2} 和 x_{r3} 之后所得的信号流图如图10-3-7所示.

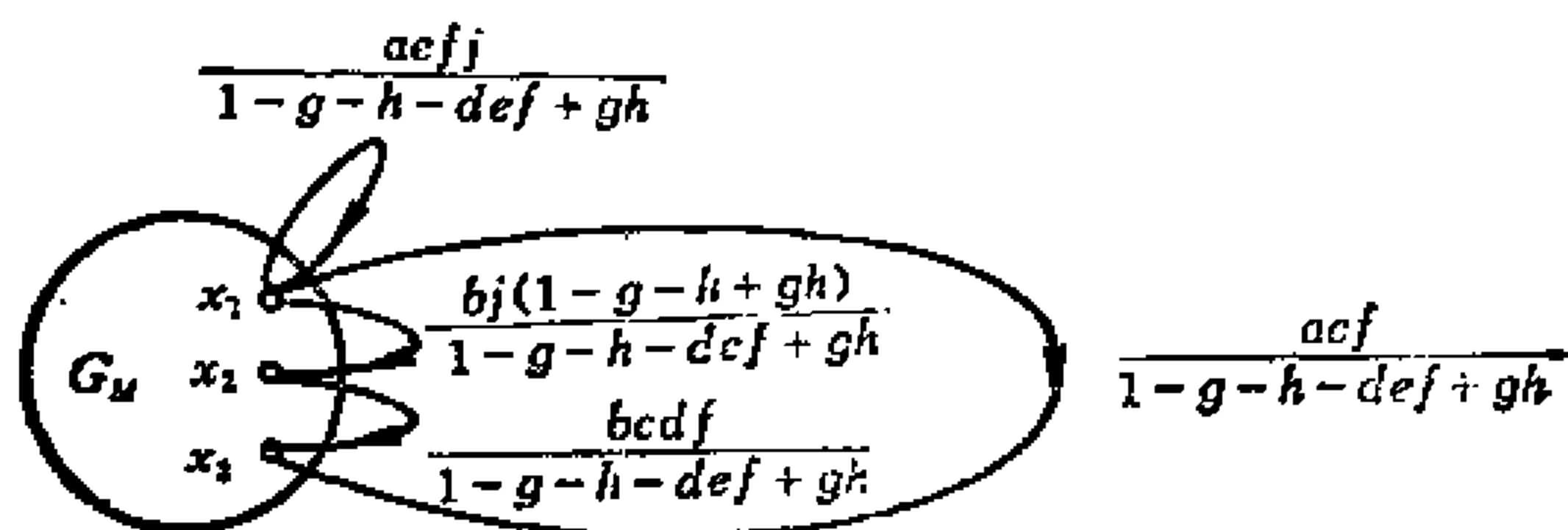
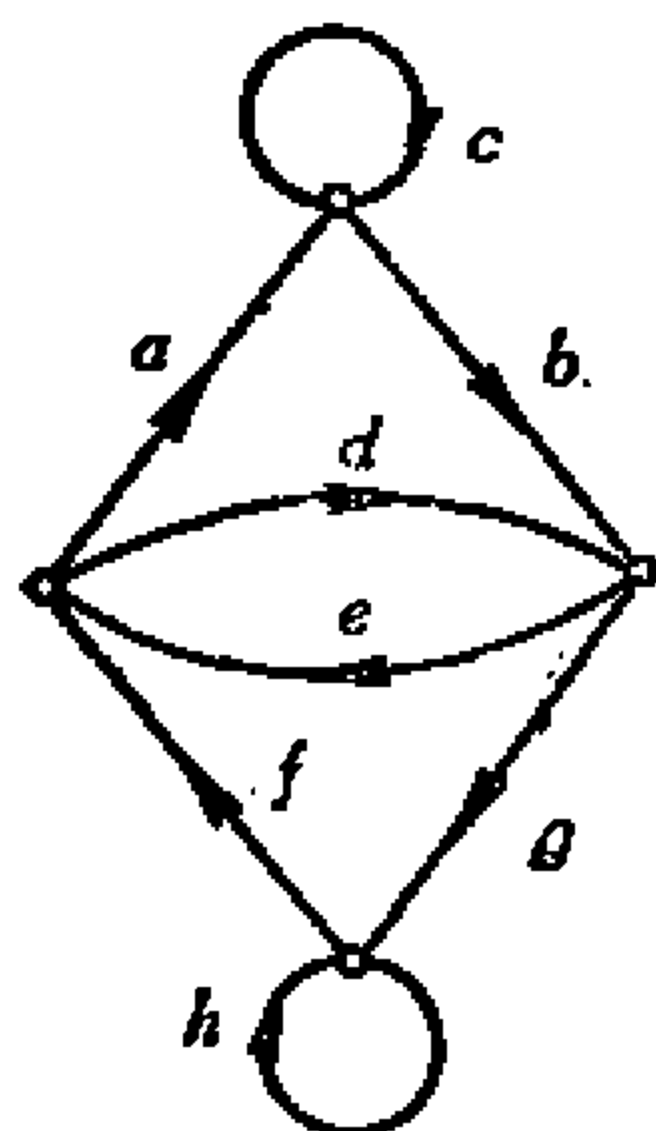


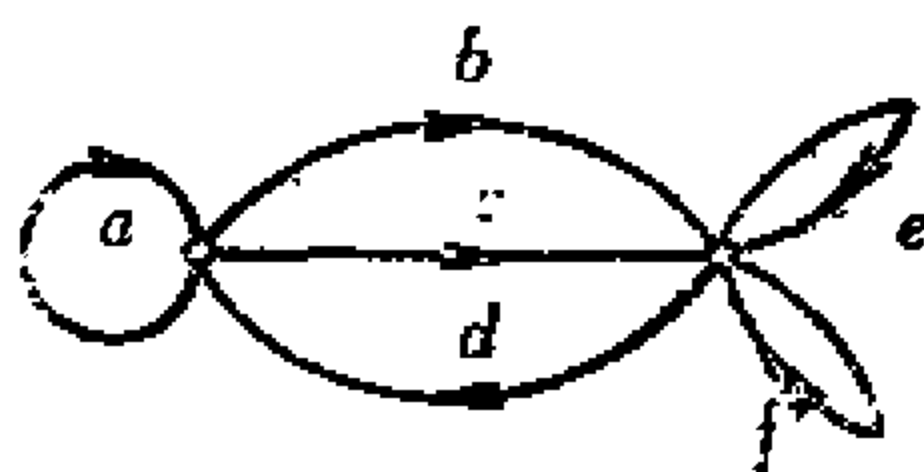
图10-3-7 消去 G_R 之后所得信号流图

习 题

1. 求出图P-10-1中流图的矩阵 M 的行列式。



(a)



(b)

图P-10-1

2. 先画出对应流图，然后利用式(10-1-9)求矩阵 M 的行列式。

$$(a) M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (b) M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

3. 运用流图证明, 矩阵 M 的行列式和 M' (M 的转置) 的行列式是相同的。

4. 设 G 是矩阵 M 的流图。直接从 G 求出矩阵 $[M - U]$ 的行列式的拓扑公式, 其中 U 是单位矩阵。

5. 设 G 是矩阵 M 的流图。直接从 G 求出矩阵 M 的特征多项式 (即矩阵 $[M - \lambda U]$ 的行列式) 的拓扑公式。

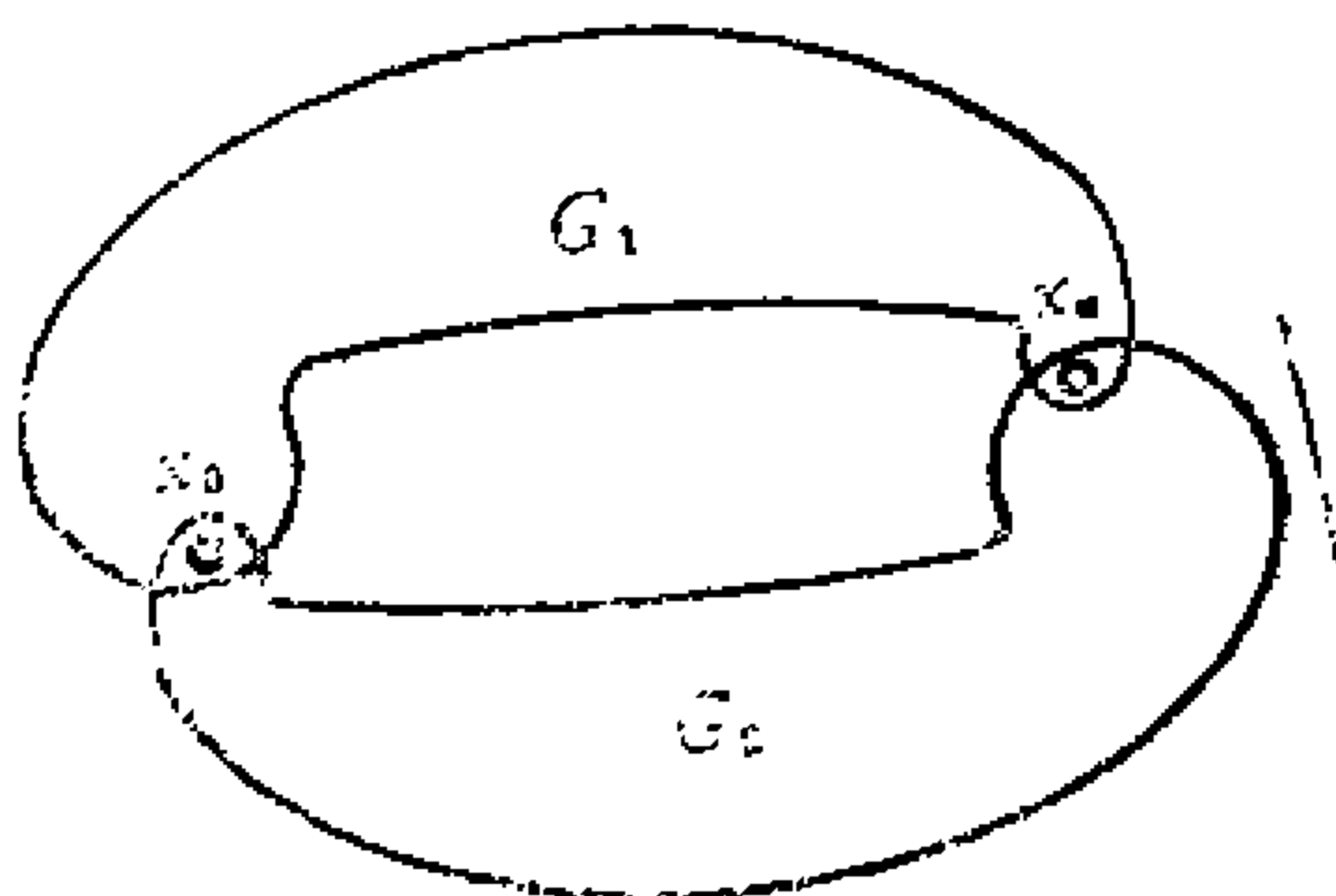


图 P-10-6

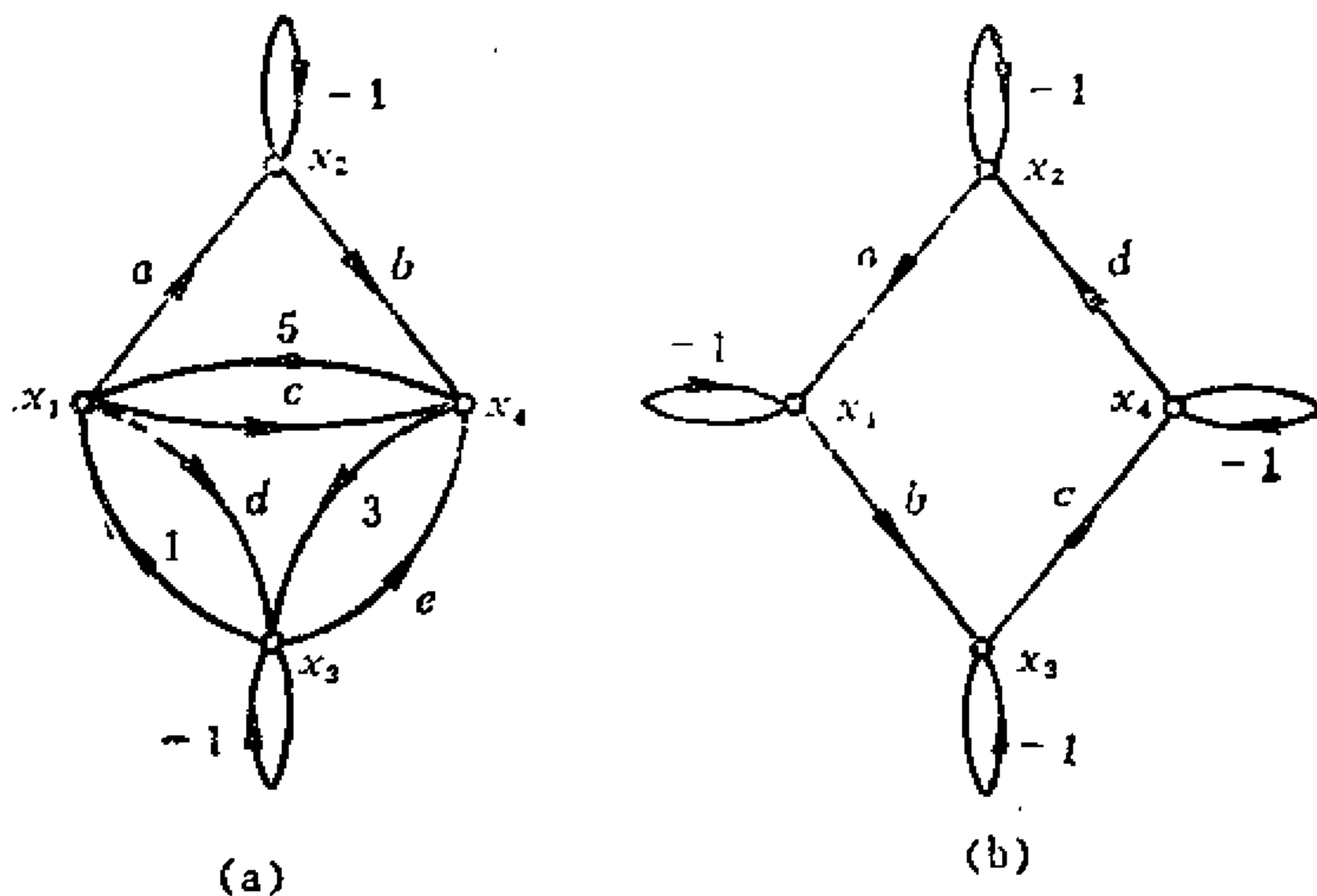


图 P-10-7

(a) 信号流图 G , (b) 信号流图 G'

6. 假定信号流图 G 是由两个子图 G_1 和 G_2 组成的, 它们仅有两个公共点 x_0 和 x_n , 如图 $P-10-6$ 所示. 假如只考查 G_1 , 则 $x_0/x_n = R_1$, 假如只考查 G_2 , 则 $x_0/x_n = R_2$. G 的 x_0/x_n 等于什么?

7. 用梅森公式[式 (10-2-31)]求出图 $P-10-7$ 中信号流图的 x_4/x_1 .

8. 从图 $P-10-8$ 的图求出只包含顶点 x_1, x_2, x_3 的等效信号流图.

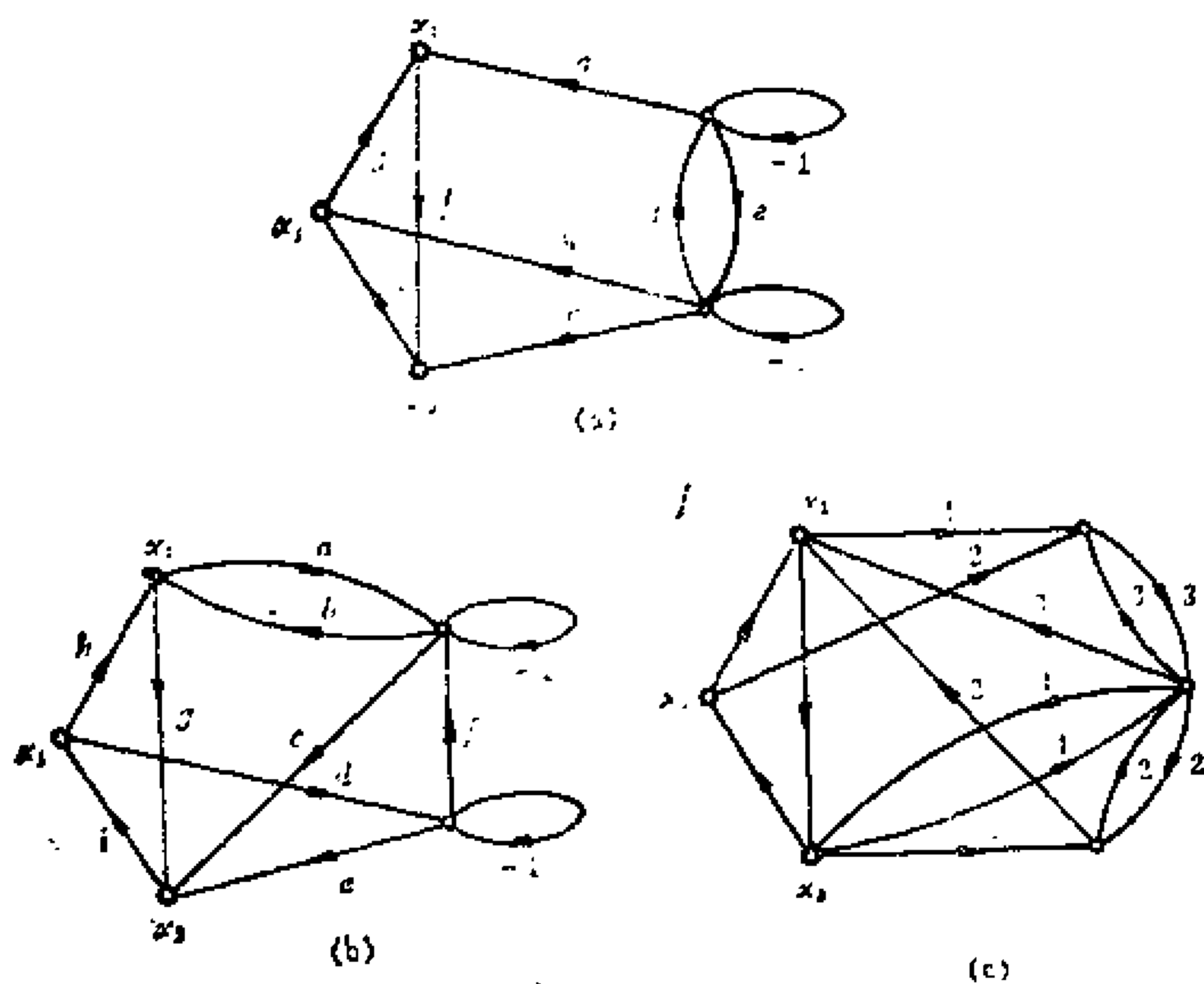


图 $P-10-8$

(a) 信号流图 G_1 ; (b) 信号流图 G_2 ; (c) 信号流图 G_3

第十一章 开关理论

11-1 连接矩阵

若把一个开关网络看成一个加权线图，我们就可以得到开关网络的若干有趣的拓扑性质。利用这些性质，可以导出开关网络的拓扑分析方法和综合方法。首先，我们来研究两种分析开关网络的方法，即所谓连接矩阵和应用第一章中研究过的路径集的方法。

开关网络的结构可以用一种称为连接矩阵的方阵来表示。该方阵的定义如下。

定义11-1-1 设 G 是由 n 个顶点组成且不含同方向并联边的有向线图。一个 $n \times n$ 阶连接矩阵 $C = [c_{ij}]$ 定义为

$$c_{ij} = \begin{cases} e & \text{如边 } e \text{ 是从顶点 } i \text{ 到顶点 } j \text{ 的边} \\ 0 & \text{如边 } e \text{ 不是从顶点 } i \text{ 到顶点 } j \text{ 的边} \end{cases}$$

注意，我们允许这个图具有自环。图11-1-1中线图的连接矩阵 C 是

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

从这个例子可以看出，连接矩阵表示出一个有向图中每一条边的位置。

为了写出包含并联边的有向图的连接矩阵，我们对定义加以改进。

定义11-1-2 设 e_1, e_2, \dots, e_k 是所有在顶点 i 和 j 之间的边，且它们的方向都是从 i 到 j ，则连接矩阵的元素

$$c_{ij} \text{ 是 } \sum_{r=1}^k e_r.$$

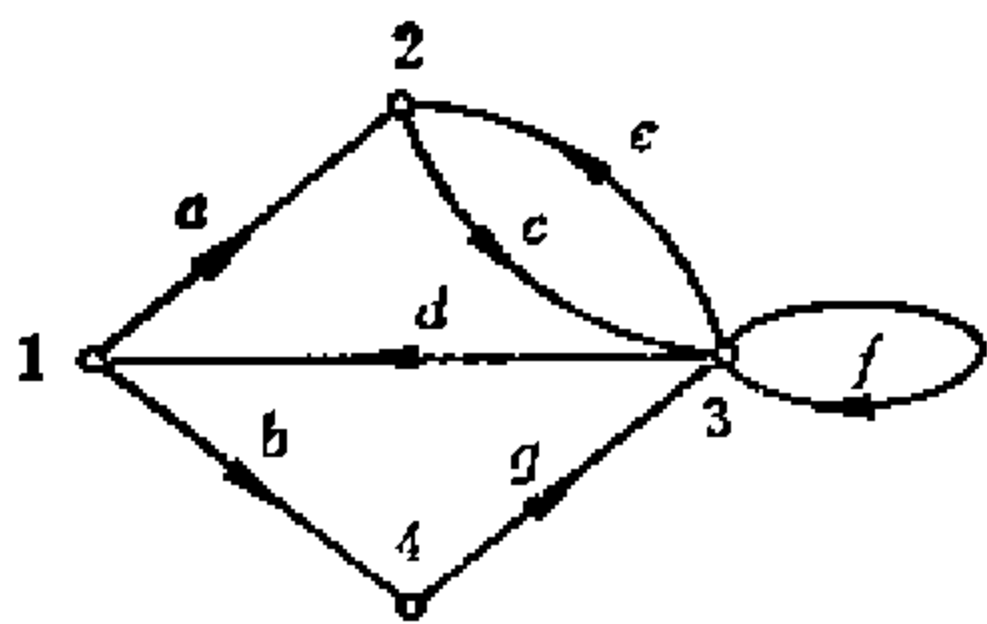


图11-1-1 有向图

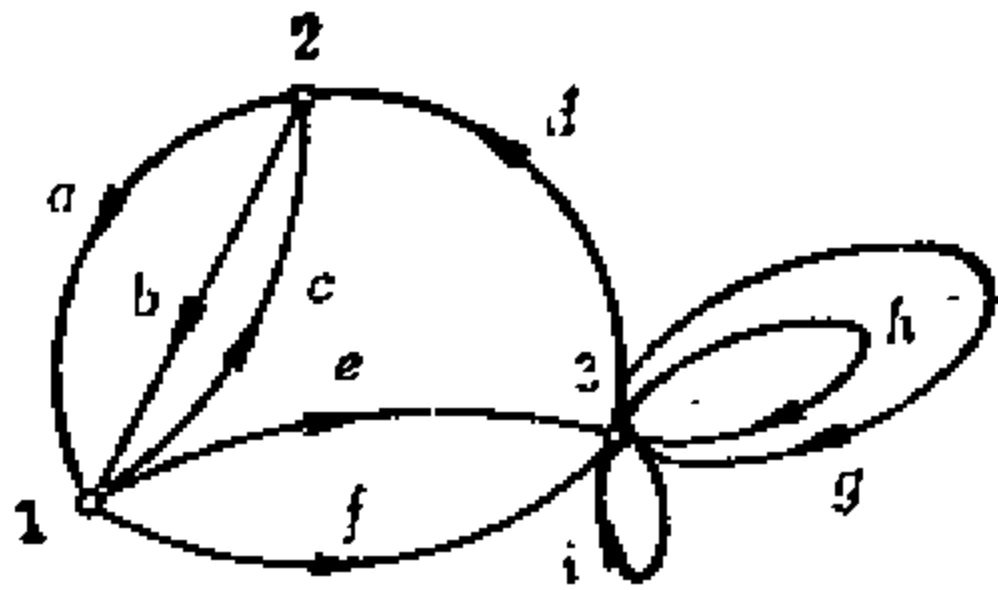


图11-1-2 有向图

例如，图11-1-2中有向图的连接矩阵 C 是

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & c & e+f \\ a+b & 0 & 0 \\ 0 & d & g+h+i \end{bmatrix} \end{matrix}$$

我们将要说明，一个连接矩阵和对应于流图的矩阵 W 是非常相似的。回忆在一个给定矩阵 $W = [w_{ij}]$ 的流图中， w_{ij} 是加在从 j 到 i 的边上的权（见第十章）。设 G 是矩阵 $W = [w_{ij}]$ 的流图。

设 W' 是从 W 用 $\sum_{r=1}^k w_{r,p_q}$ 替换 $w_{p,q}$ 得到的矩阵。设 G' 是从 G (见图

11-1-3) 用并联边 w_{r,p_q} ($r=1, 2, \dots, k$) 替换边 $w_{p,q}$ 得到的。这些并联边的方向都与 $w_{p,q}$ 的方向相同，如图11-1-4所示。

矩阵 W' 的行列式可以写成：

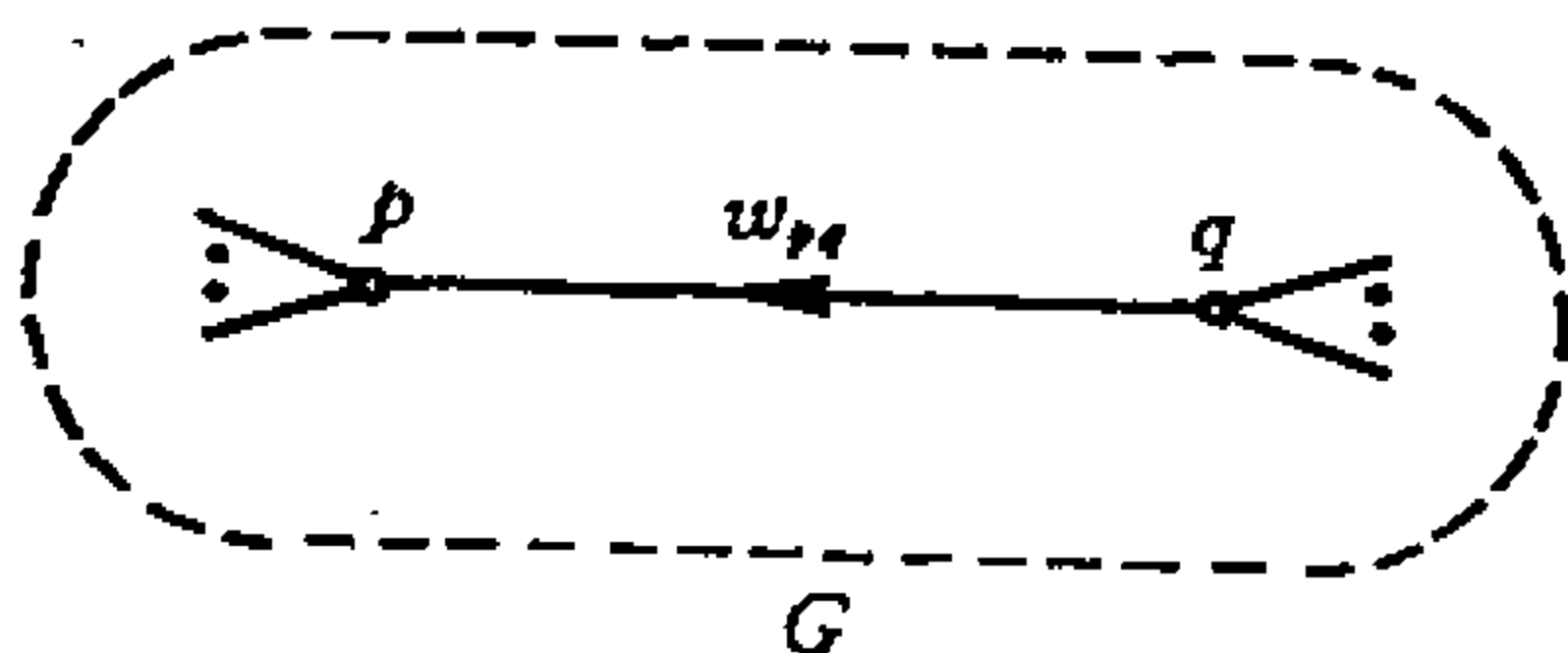


图11-1-3 流图 G

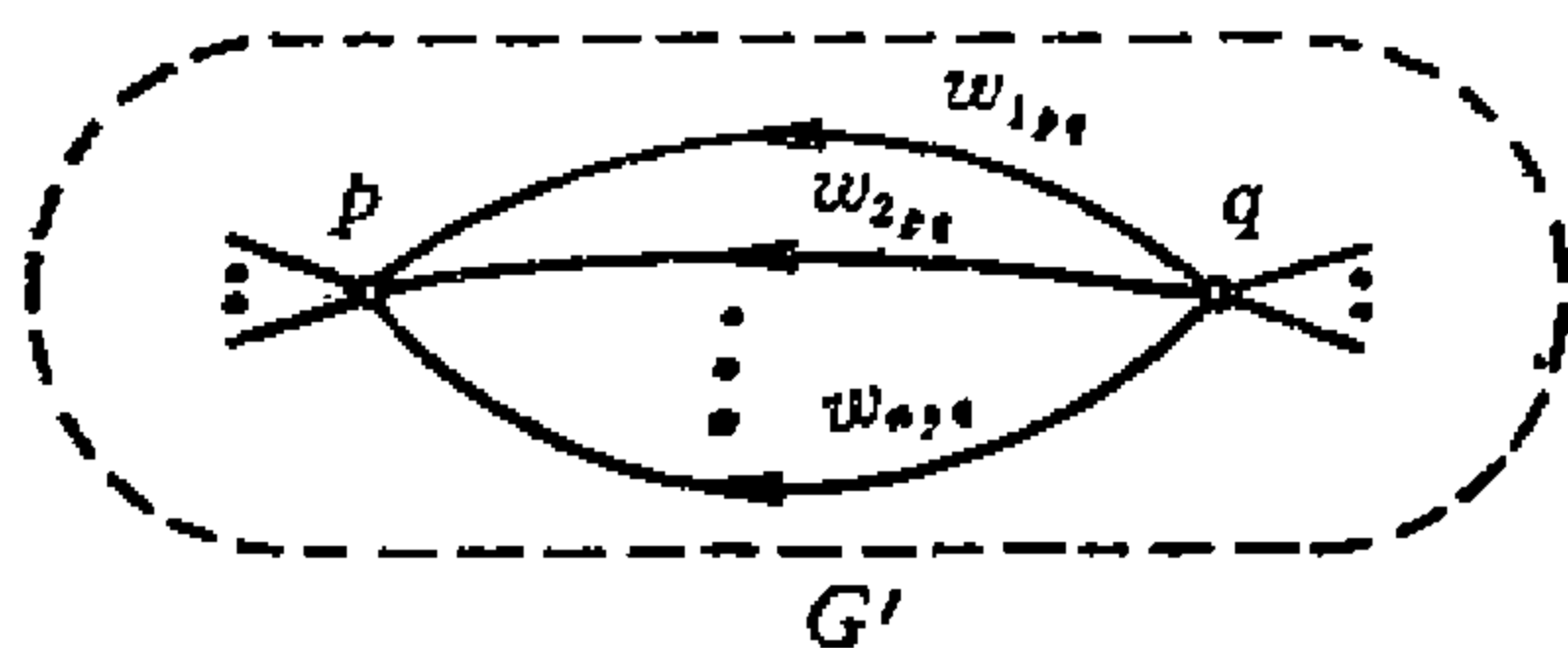


图11-1-4 流图 G'

$$\begin{aligned}
 |W'| &= \sum_{i_p \neq q} \delta_{i_1 i_2 \dots i_n} w_{1i_1} w_{2i_2} \dots w_{ni_n} + \sum_{i_p = q} \delta_{i_1 i_2 \dots q \dots i_n} w_{1i_1} w_{2i_2} \dots \\
 &\quad \dots w_{pq} \dots w_{ni_n} \\
 &= \sum_{i_p \neq q} \delta_{i_1 i_2 \dots i_n} w_{1i_1} w_{1i_n} \dots w_{ni_n} \\
 &\quad + \sum_{i_p = q} \delta_{i_1 i_2 \dots q \dots i_n} w_{1i_1} w_{2i_2} \dots \left(\sum_{r=1}^k w_{rpq} \right) \dots w_{ni_n}
 \end{aligned}
 \tag{11-1-2}$$

因为若 $\delta_{i_1 i_2 \dots q \dots i_n}$ 非零，则每一个 $w_{1i_1} w_{1i_2} w_{rpq} \dots w_{ni_n}$ 就是一个 P -集圈，所以

$$|W'| = (-1)^n \sum (-1)^{k'} (G' \text{ 的 } P\text{-集圈 } D'_i \text{ 乘积}) \tag{11-1-3}$$

显然，这个等式在有几条边并联时也成立。这就说明，我们可以改进流图的定义，使得可以有并联边存在。换句话说，我们可以

根据以下定义得到与流图 G 对应的矩阵 W ：

w_{ij} = 从顶点 j 连接到顶点 i 的边权的和（当有这样的边存在时），

以及

$w_{ij} = 0$ （当从 j 连接到 i 的边不存在时）。

另一方面，一个流图 G （把流图看成加权有向图）的连接矩阵 $C = [c_{ji}]$ 的元素 c_{ji} 是

c_{ji} = 从顶点 j 连接到顶点 i 的边权的和（当有这样的边存在时）

以及

$c_{ji} = 0$ ，（当从顶点 j 连接到顶点 i 的边不存在时）

因此，我们可以很容易地看出

$$C = W' \tag{11-1-4}$$

换句话说，如果 C 是有向图 G 的连接矩阵，那么 G 可以看作矩阵 C' 的流图。因此据式(10-1-9)我们有

$$|C| = (-1)^n \sum (-1)^{k_j} (G \text{ 的 } P\text{-集圈 } D_j \text{ 乘积}) \tag{11-1-5}$$

遗憾的是，许多有向图没有 P -集圈。例如，图11-1-1中的有向图就没有 P -集圈，于是 $|C| = 0$ ，这不是一个令人满意的结果。

若对连接矩阵作一些限制，则可获得下述重要结果。

定理11-1-1 设一个有向图 G 中所有边的权是布尔变量，设 C 是 G 的连接矩阵，则 Δ_{sr} 是从顶点 r 到顶点 s 的开关函数，其中 Δ_{sr} 是矩阵 $[C + U]$ 在 (s, r) 位置上的余子式，所用的运算是布尔和与布尔积。

例11-1-1 考虑图11-1-5中的有向图 G 。连接矩阵 C 是

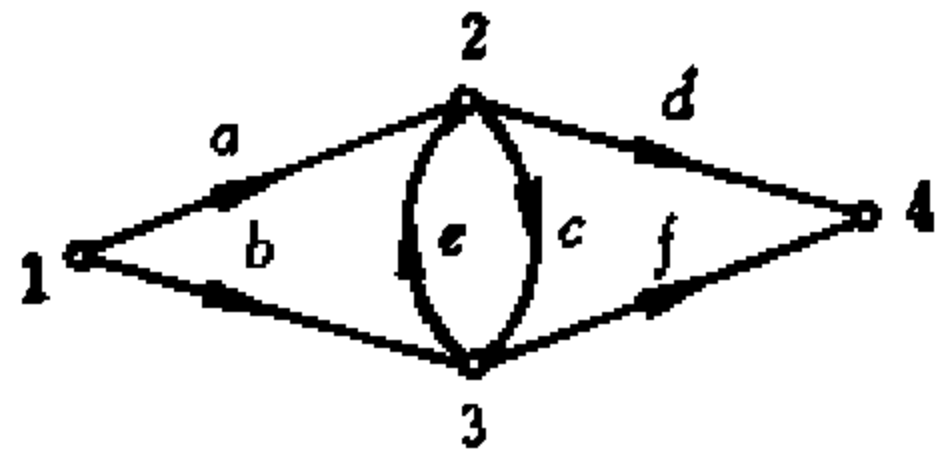


图11-1-5 有向图 G

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & a & b & 0 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 0 & 0 & c & d \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 0 & e & 0 & f \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \end{array}$$

那么 $[C + U]$ 是

$$[C + U] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & a & b & 0 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 0 & 1 & c & d \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 0 & e & 1 & f \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \end{array}$$

$[C + U]$ 的余子式 Δ_{41} 是

$$\Delta_{41} = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 1 & c & d \\ e & 1 & f \end{vmatrix} = acf + ad + bf + bed$$

这就是从顶点1到顶点4的开关函数。

定理11-1-1的证明 回忆10-1节，我们有

$$|W| = (-1)^n \sum \sum (-1)^{kj} (P\text{-集圈 } D_j \text{ 乘积}) \quad (11-1-6)$$

由行列式的定义

$$|W| = \sum \sum \delta_{i_1 i_2 \dots i_n} w_{1i_1} w_{2i_2} \dots w_{ni_n} \quad (11-1-7)$$

这是因为当 $\delta_{i_1 i_2 \dots i_n}$ 非零时，每一项 $\delta_{i_1 i_2 \dots i_n} w_{1i_1} w_{2i_2} \dots w_{ni_n}$ 是一个 P -集圈乘积。由于在式(11-1-6)的一个 P -集圈乘积和式(11-1-7)的一个非零项之间存在1:1对应，因此式(11-1-6)去掉符号就适用于布尔变量矩阵，即

$$|C'| = \sum (P\text{-集圈 } D_j \text{ 乘积}) \quad (11-1-8)$$

假设把变元 Y 加到 C 的 (s, r) 元上，并设所得的矩阵是 $C(Y)$ 。

由式(11-1-8), 矩阵 $[C(Y) + U]$ 的行列式可写作

$$|C(Y) + U| = \sum (G'_Y \text{ 的 } P\text{-集圈 } D_i \text{ 乘积}) \quad (11-1-9)$$

其中 G'_Y 是将给定的图 G , 嵌入从顶点 s 到顶点 r 的边 Y , 并在 G 的每个顶点上加入权为1的自环而得到的线图。

存在一个不包含边 Y 的 P -集圈 D_i , 假定用 $D_i(0)$ 来表示它。又设包含 Y 的 P -集圈表示为 $Y P_i(0)$, 那么式(11-1-9)可表为

$$|C(Y) + U| = G'_Y \text{ 的 } \sum (D_i(0) \text{ 乘积}) + \sum (Y P_i(0) \text{ 乘积}) \quad (11-1-10)$$

显然

$$|C + U| = \sum D_i(0) \text{ 乘积} \quad (11-1-11)$$

并且

$$\Delta_{sr} = \sum P_i(0) \text{ 乘积} \quad (11-1-12)$$

因为 $Y P_i(0)$ 是 G'_Y 中的一个 P -集圈, 所以 $P_i(0)$ 必然包含一条从顶点 r 到顶点 s 的有向路径, 使得它同边 Y 一起构成一个有向回路。设这条有向路径是 P_i 。又设 $G'_Y(\overline{\Omega(P_i)})$ 是从 G'_Y 中删去 P_i 的所有顶点和与这些顶点连接的所有边得到的有向图。那么 $G'_Y(\overline{\Omega(P_i)})$ 中任何一个 P -集圈(连同有向回路 $(Y) \cup P_i$ 一起)就是 G'_Y 中的一个 P -集圈。并且, G'_Y 中(包含有向回路 $(Y) \cup P_i$)任何一个 P -集圈, 当我们从中移去 $(Y) \cup P_i$ 时, 就变成了 $G'_Y(\overline{\Omega(P_i)})$ 中的 P -集圈。于是

$$\sum P_i(0) \text{ 乘积} = \sum_{(i)} P_i \text{ 乘积} \left[\sum G'_Y(\overline{\Omega(P_i)}) \text{ 的 } P\text{-集圈 } D_i \text{ 乘积} \right] \quad (11-1-13)$$

其中 $\sum_{(i)}$ 的意思是对 G_Y 中所有从顶点 r 到顶点 s 的有向路径求和。

对于非空的 $G_Y(\overline{\Omega(P_i)})$ ，存在一类仅由权为 1 的自环组成的 P -集圈。因此，

$$G_Y(\Omega(P_i)) \text{ 的 } P\text{-集圈 } D_i \text{ 乘积} = 1 + \dots \quad (11-1-14)$$

该式右端的 1 是由于布尔代数运算的结果。当 $G_Y(\overline{\Omega(P_i)})$ 是空集时， $P_i(0)$ 乘积就是 P_i 乘积，因此，式(11-1-13)就变为

$$\sum (G_Y \text{ 的 } P_i(0) \text{ 乘积}) = \sum_{(i)} (G_Y \text{ 的 } P_i \text{ 乘积}) \quad (11-1-15)$$

因为除了 Y 本身以外， G_Y 中从顶点 r 到顶点 s 的有向路径同时也在 G 中，反之亦然。所以我们有

$$\Delta_{r,s} = \sum_{(i)} G \text{ 的 } P_i \text{ 乘积} \quad (11-1-16)$$

这就是从顶点 r 到顶点 s 的开关函数。（证毕）

为了分析无向开关网络，首先我们应注意到，在定理11-1-1的有向图中，可以将许多边赋以相同的权。如果我们用两条并联有向边来替换一条无向边，二边的方向相反但赋以与无向边相同的权，如图11-1-6所示。这样就可得到一个与无向图 G 对应的有向图 G' ，它具有以下性质：

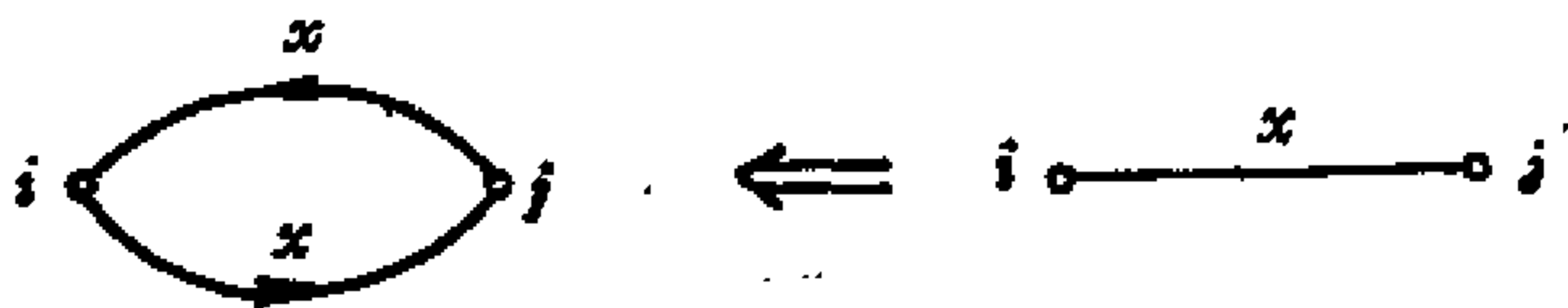


图11-1-6 有向边与无向边之间的对应

1. 对于 G 中两个顶点 r 和 s 之间的任一条路径 P ，在 G' 中就有两条有向路径 P' 和 P'' ， P' 从 r 到 s ， P'' 从 s 到 r ，并且

$$P' \text{ 乘积} = P'' \text{ 乘积} = P \text{ 乘积}$$

2. 对于 G' 中从 r 到 s 的任一条有向路径 P' ，存在 G 中 r 和

s 之间的一条路径 P ，使得

$$P' \text{ 乘积} = P \text{ 乘积}$$

因此对于开关网络来说， G 和 G' 是相同的。于是定理 11-1-1 可以改进以适用于无向图。

定理11-1-2 设无向图 G 中所有边的权是布尔变量。设 C 是 G 的连接矩阵。则 $[C + U]$ 的余子式 $\Delta_{rs} (= \Delta_{sr})$ 是 G 中顶点 r 和 s 之间的开关函数。

例11-1-2 图11-1-7中开关网络的连接矩阵 C 是

$$C = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & a & b \\ 2 & 0 & 0 & c & d \\ 3 & a & c & 0 & e \\ 4 & b & d & e & 0 \end{bmatrix}$$

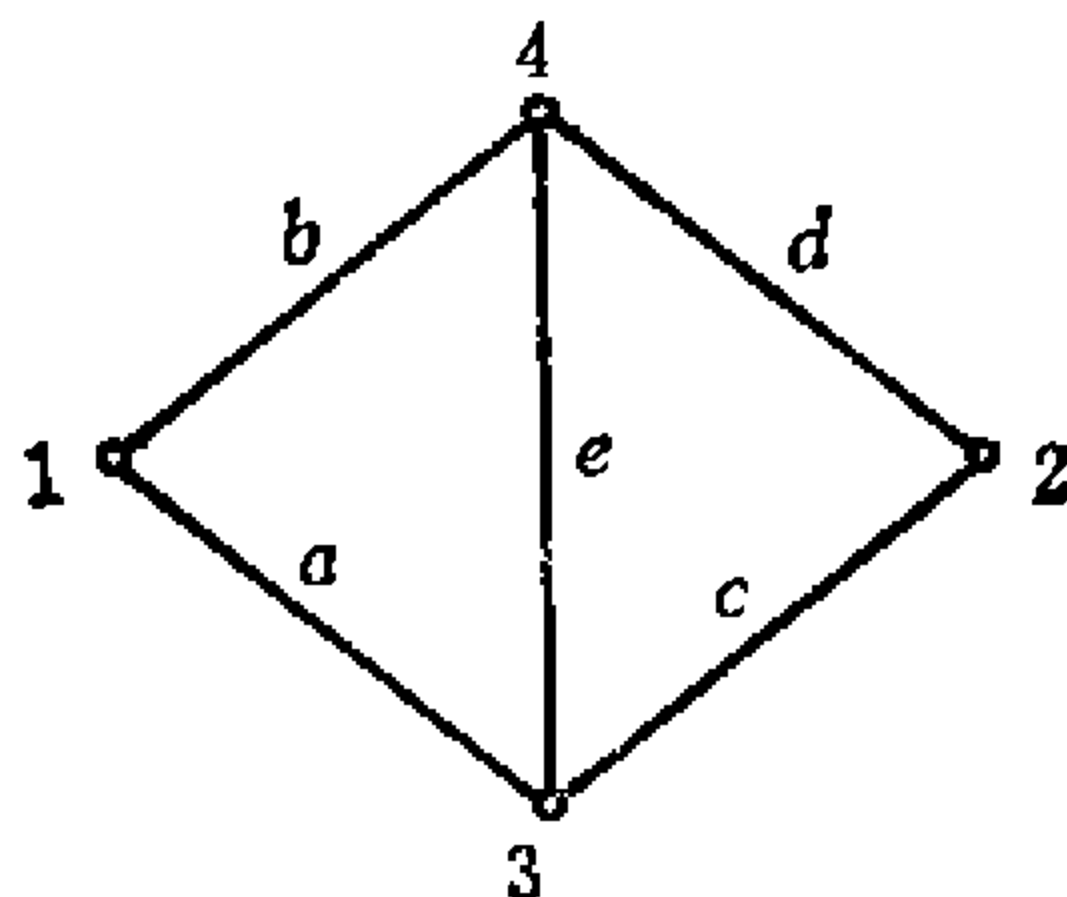


图11-1-7 开关网络 G

则 $[C + U]$ 的 Δ_{12} 是

$$\begin{vmatrix} 0 & c & d \\ a & 1 & e \\ b & e & 1 \end{vmatrix} = ac + ade + bce + bd$$

这就是顶点 1 和 2 之间的开关函数。

11-2 开关网络的分析

我们已经研究了一种求两顶点间的开关函数的方法，即应用定理11-1-2，这种方法是利用连接矩阵来进行的。这里，我们要考虑分析开关网络的另一种方法，它利用的是1-2节和1-6节中介绍的所有可能路径的集合的性质。

设 $\{E\}$ 是线图 G 的欧拉图的集合，而 $\{P_{ij}\}$ 是 G 的顶点 i 和 j 之间所有可能路径的集合。那么，从定理1-6-12我们知道

$$\{P_{ij}\} = \min \{P \oplus E; E \in \{E\}\} \quad (11-2-1)$$

其中 $P \in \{P_{ij}\}$ ，也就是说，如果我们知道了两个顶点间的一条路径 P ，那么这两个顶点之间的所有可能的路径都可以由 G 的欧拉图和 P 的环和得到。从定理1-5-3我们还知道，如果线图 G 是不可分的，那么 $\{E\}$ 可以由 $\{C\}$ 来代替，其中 $\{C\}$ 是 G 中所有可能的回路的集合。也就是说，对于一个不可分图 G

$$\{P_{ij}\} = \min \{P \oplus C; C \in \{C\}\} \quad (11-2-2)$$

假定 G 是如图11-2-1所示的可分图，其中 G_1 和 G_2 都是不可分的。那么我们容易看出， $\{P_{ij}\}$ 可表示为

$$\{P_{ij}\} = \{P_{ik}\} \otimes \{P_{kj}\} \quad (11-2-3)$$

其中 $i \in G_1, j \in G_2$ ，而

$$\{P_{ik}\} = \min \{P_1 \oplus C_1; C_1 \in \{C_1\}\} \quad (11-2-4)$$

$$\{P_{kj}\} = \min \{P_2 \oplus C_2; C_2 \in \{C_2\}\} \quad (11-2-5)$$

$P_1 \in \{P_{ik}\}, P_2 \in \{P_{kj}\}, \{C_1\}$ 是 G_1 中所有可能回路的集合， $\{C_2\}$ 是 G_2 中所有可能回路的集合。

一般地，我们可以叙述为以下定理。

定理11-2-1 假定把一个可分线图 G 从割点 $v_2, v_3, \dots, v_{k'}$ 处割开，从而可分成 k 个不可分子图 $G_1, G_2, \dots, G_k (k' \leq k)$ ，(图11-2-2给出了 $k=6$ 的一例)。

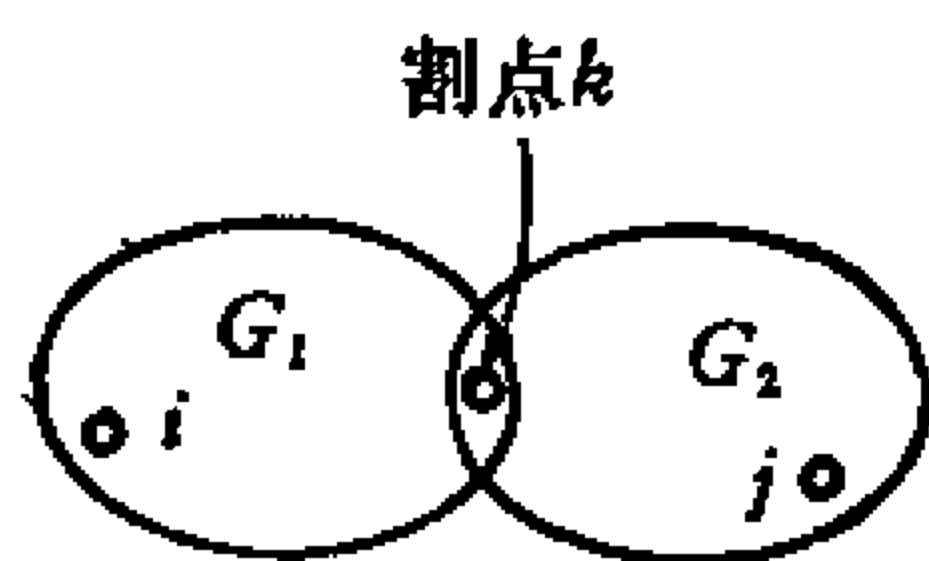


图11-2-1 可分图 G

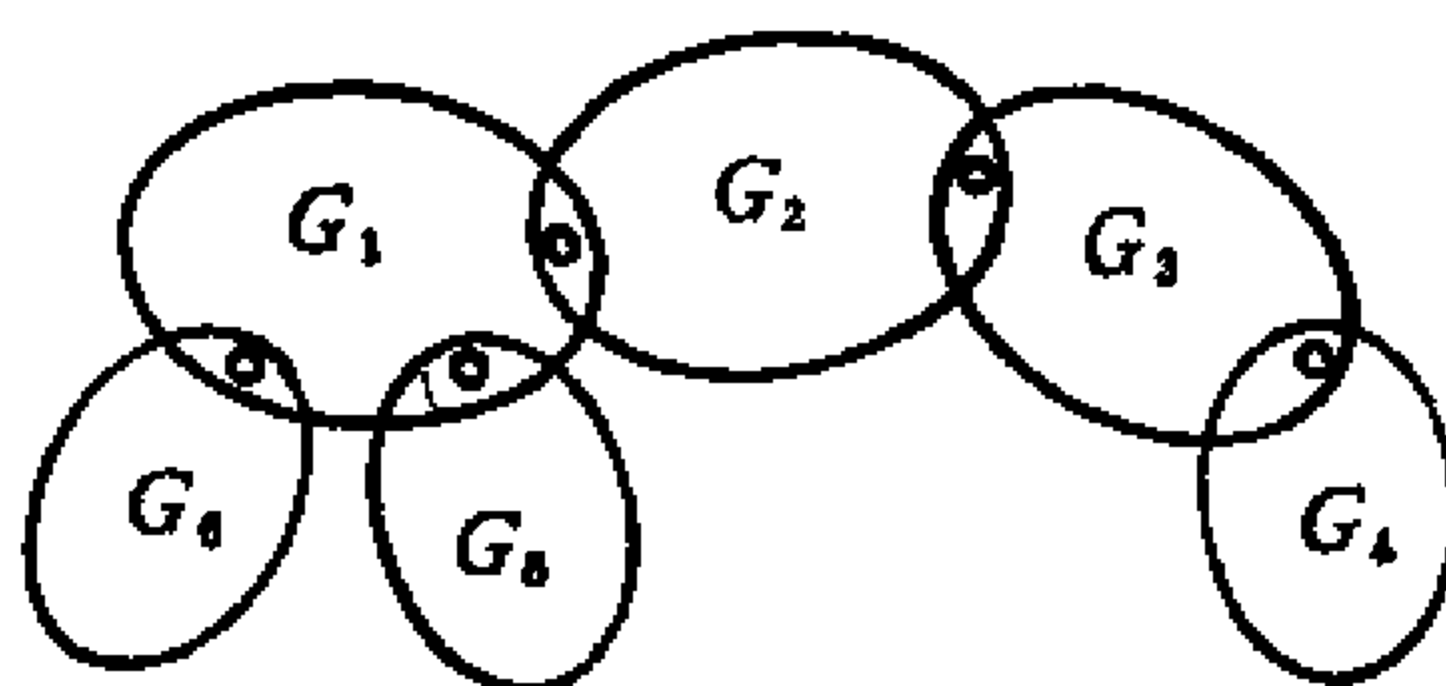


图11-2-2 可分图 G

又假定顶点 i 和 j 之间的一条路径 P_{ij} 通过割点 v_2, v_3, \dots, v_m ($m \leq k'$)。设 $i \in G_1$, G_1 和 G_2 有公共割点 v_2 , G_2 和 G_3 有公共割点 v_3 , \dots, G_{m-1} 和 G_m 有公共割点 v_m , 而 $j \in G_m$, 那么

$$\{p_{ij}\} = \{p_{iv_2}\} \otimes \{p_{v_2v_3}\} \otimes \dots \otimes \{p_{v_mi}\} \quad (11-2-6)$$

其中

$$\{P_{iv_2}\} = \min \{P_1 \oplus C_1; C_1 \in \{C_1\}\} \quad (11-2-7)$$

$$\{P_{v_rv_{r+1}}\} = \min \{P_r \oplus C_r; C_r \in \{C_r\}\} \quad (11-2-8)$$

$$\{P_{v_mi}\} = \min \{P_m \oplus C_m; C_m \in \{C_m\}\} \quad (11-2-9)$$

$P_1 \in \{P_{iv_2}\}$, $P_r \in \{P_{v_rv_{r+1}}\}$, $P_m \in \{P_{v_mi}\}$, $r = 2, 3, \dots, m-1$, 而 $\{C_u\}$ 是 G_u 中所有可能回路和空集的集合, $u = 1, 2, \dots, m$. 并且, 开关函数 F_{ij} 可以表达为

$$F_{ij} = F_{iv_2} \cdot F_{v_2v_3} \cdot \dots \cdot F_{v_mi} \quad (11-2-10)$$

其中

$$F_{iv_2} = \sum_{P_1 \in \{P_{iv_2}\}} (\text{路径 } P_1 \text{ 乘积}) \quad (11-2-11)$$

$$F_{v_rv_{r+1}} = \sum_{P_r \in \{P_{v_rv_{r+1}}\}} (\text{路径 } P_r \text{ 乘积}) \quad (11-2-12)$$

$$F_{v_mi} = \sum_{P_m \in \{P_{v_mi}\}} (\text{路径 } P_m \text{ 乘积}) \quad (11-2-13)$$

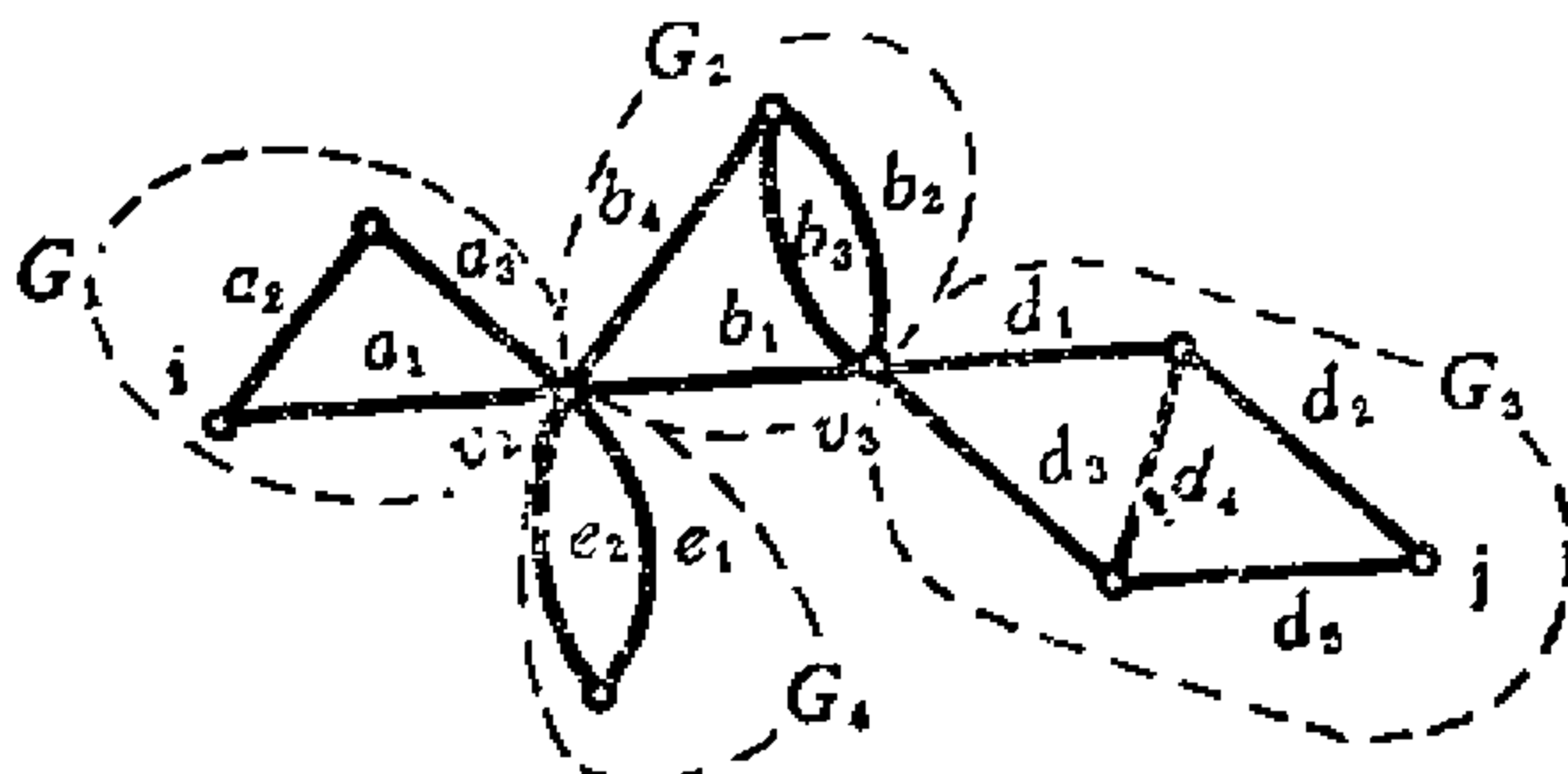


图11-2-3 开关网络

例11-2-1 考虑图11-2-3中的开关网络。假定我们选取 i 和 j 之间的一条路径 P_{ij} 为 $P_{ij} = (a_1, b_1, d_1, d_2)$ 。

这条路径通过割点 V_2 和 V_3 。显然我们需要考虑的全部子图乃是 G_1, G_2 , 和 G_3 。利用 G_1, G_2 和 G_3 的所有可能回路和空集的集合 $\{C_1\}, \{C_2\}$ 和 $\{C_3\}$, 即

$$\{C_1\} = \{\phi, (a_1, a_2, a_3)\}$$

$$\{C_2\} = \{\phi, (b_1, b_2, b_4), (b_1, b_3, b_4), (b_2, b_3)\}$$

$$\{C_3\} = \{\phi, (d_1, d_3, d_4), (d_2, d_4, d_5), (d_1, d_2, d_3, d_4)\}$$

我们可以得到

$$\{P_{i,v_2}\} = \min \{(a_1) \oplus C_1; C_1 \in \{C_1\}\} = \{(a_1), (a_2, a_3)\}$$

$$\{P_{v_2,v_3}\} = \min \{(b_1 \oplus C_2; C_2 \in \{C_2\}\} = \{(b_1), (b_2, b_4), (b_3, b_4)\}$$

$$\{P_{v_3,j}\} = \min \{(d_1, d_2) \oplus C_3; C_3 \in \{C_3\}\}$$

$$= \{(d_1, d_2), (d_2, d_3, d_4), (d_1, d_4, d_5), (d_3, d_5)\}$$

因此开关函数 F_{ij} 是

$$\begin{aligned} F_{ij} &= F_{i,v_2} \cdot F_{v_2,v_3} \cdot F_{v_3,j} \\ &= (a_1 + a_2 a_3) (b_1 + b_2 b_4 + b_3 b_4) (d_1 d_2 + d_2 d_3 d_4 \\ &\quad + d_1 d_4 d_5 + d_3 d_5) \end{aligned}$$

这里讨论的方法适用于计算机分析开关网络。另外, 如果有必要计算一个以上的开关函数, 我们就可以利用路径集之间的关系来简化计算式, 如利用定理1-6-7所给出的三角关系。

11-3 完全确定开关函数的综合

现在我们要来考虑一种特殊的网络, 通称单触点网络 (single contact 简称SC网络)。

定义11-3-1 SC网络是一种无向图, 其中每一条边的权为不同的布尔变量。

这里, 我们只考虑这样一种开关 (布尔) 函数, 它们是完全

确定了的（即对应的真值表为 1 或 0）。我们要解决的问题是：是否存在一个 SC 网络，满足所给定的完全确定开关函数。例如，函数

$$F = ab + acd + de$$

不是一个 SC 网络的开关函数。另一方面，函数

$$F = ab + acd$$

显然是一个 SC 网络的开关函数。

为了简便，我们采用以下定义。

定义11-3-2 我们说 $\{P_{rs}\}$ 是一个与完全确定开关函数 F_{rs} 对应的集合，如果

$$F_{rs} = \sum_{P_{rs} \in \{P_{rs}\}} P_{rs} \text{ 乘积} \quad (11-3-1)$$

其中 P_{rs} 乘积是 $\{P_{rs}\}$ 中所有元素的乘积。

例如，如果 $F_{rs} = a(b + ce) + d(e + bc)$ ，则与 F_{rs} 对应的集合 $\{P_{rs}\}$ 是

$$\{P_{rs}\} = \{(a, b), (a, c, e), (d, e), (b, c, d)\}$$

因为在一个 SC 网络中每条边的权不同，为了简便，我们以一条边的权作为这条边的名称。若把一个完全确定开关函数 F_{ij} 表示为

$$F_{ij} = \sum_{P_{ij} \in \{P_{ij}\}} P_{ij} \text{ 乘积} \quad (11-3-2)$$

我们就可以看出，如果一个与 F_{ij} 对应的开关网络是 SC 网络，那么集合 $\{P_{ij}\}$ 必定是顶点 i 和 j 之间的所有可能路径的集合。由于这个原因，我们有以下 SC 网络开关函数的必要条件。

定理11-3-1 设集合 $\{P_{ij}\}$ 是与一个 SC 网络的完全确定开关函数 F_{ij} 相对应的，对于 $\{P_{ij}\}$ 中任意奇数个 P_r ，比如 $P_1, P_2, \dots, P_{2k+1}$ ，必存在 $\{P_{ij}\}$ 中的 P' ，满足：

$$P' \subset P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_{2k+1} \quad (11-3-3)$$

例如, 如果 $F_{ij} = a(b+ce) + bcd$, 那么 $\{P_{ij}\} = \{(a,b) (a,c, e)(b,c,d)\}$. 因为 $(a,b) \oplus (a,c,e) \oplus (b,c,d) = (d,e)$, 并且没有满足式(11-3-3)的 $P' \in \{P_{ij}\}$, 所以 F_{ij} 不是一个 SC 网络的完全确定开关函数.

定理11-3-1的证明 如果 $\{P_{ij}\}$ 是顶点 i 和 j 之间所有可能路径的集合, 那么奇数个 $P_r \in \{P_{ij}\}$ 的环和是一个 M 图 M_{ij} (见1-4节), 它或者是一条路径 P , 或者是一条路径和若干回路的无重边并, 其中 $P \in \{P_{ij}\}$. (证毕)

复习一下子图集合的某些性质是有帮助的, 在 SC 网络的综合中也需要它们. 在3-5节中, 我们曾经学过从一个基本割集矩阵 Q_f 综合一个线图的方法, 从式(3-4-24), 我们得到基本割集矩阵 Q_f 和基本回路矩阵 $B_f = [U \ B_{f,12}]$ 之间的关系为

$$Q_f = [B_{f,12}^t \ U] \quad (11-3-4)$$

我们知道, 一个基本回路矩阵可以很容易地从所有可能回路的集合 $\{C\}$ 得到. 在1-6节中, 我们曾看到

$$\{C\} = \min \{E\} \quad (11-3-5)$$

其中 $\{E\}$ 是线图 G 中所有可能欧拉图的集合. 因此, 如果给定一个集合 $\{E\}$, 我们就可以得到一个线图 G , 它以 $\{E\}$ 作为所有可能欧拉图的集合.

一个 SC 网络的开关函数 F_{ij} 将给出 $\{P_{ij}\}$ (i 与 j 之间所有可能路径的集合) 而不是 $\{E\}$. 但是, 从1-4节和5-3节我们知道, 集合 $\{E, M_{ij}\}$ 具有 $n_e - n_v + 2$ 个生成元, 其中 n_e 或 n_v 分别为连通线图 G 中边数和顶点数. 因为我们将试图从一个完全确定开关函数 F_{ij} 来综合一个 SC 网络 G , 所以可以假设 G 是连通的. 从 F_{ij} 综合得的 SC 网络 G 可以具有这样的性质: 每一条边至少位于从 i 到 j 的一条路径中. 因此我们容易看出 G 或为不可分图, 或者由 k 个不可分子图 G_1, G_2, \dots, G_k 组成, 都有: (1) 这些

子图的任意两个都没有公共边；（2）这些子图中任两个至多有一个公共点；（3）有 $k-1$ 个割点；（4） $i \in G_1, j \in G_k$ ，（5）从 i 到 j 的每一条路径全都通过这 $k-1$ 个割点，如图11-3-1所示。可以看出

$$\{P_{ij}\} \otimes \{P_{ij}\} = \{C\} \tag{11-3-6}$$

其中 $\{C\}$ 是 G 中所有回路的集合。



图11-3-1 SC网络 G

从集合 $\{C\}$ ，我们可以得到基本回路矩阵 B_f ，因此，基本割集矩阵可由式(11-3-4)得到。现在我们可以找到一个线图 G ，它以 $\{C\}$ 作为所有可能回路的集合。可是， G 不一定以 $\{P_{ij}\}$ 作为从 i 到 j 的所有可能路径的集合。例如，假定 $\{P_{ij}\} = \{(a,b), (c,d)\}$ ，那么

$$\{P_{ij}\} \otimes \{P_{ij}\} = \{\phi, (a,b,c,d)\}$$

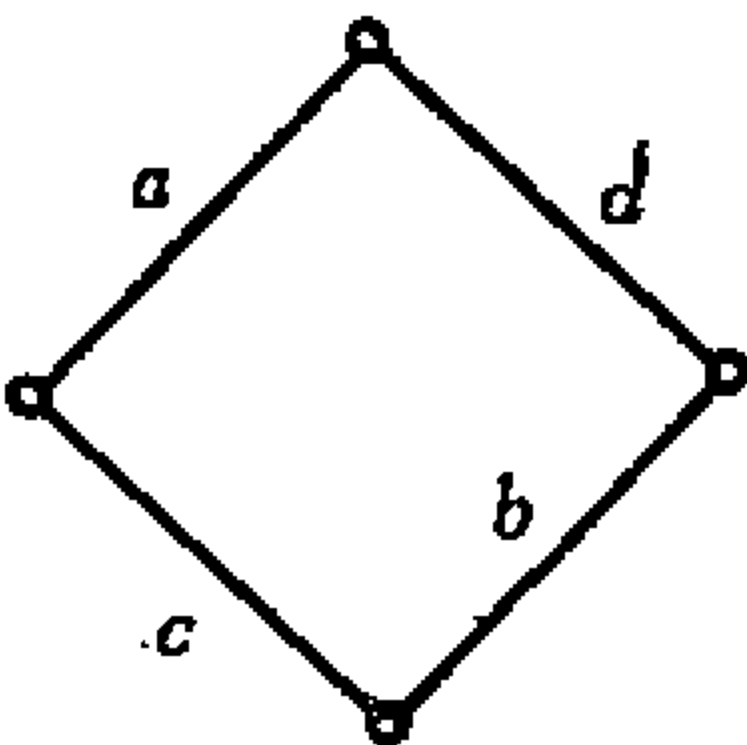


图11-3-2 线图 G

图11-3-2中的线图 G 以 (a,b,c,d) 为一个回路。因此 G 以 $\{C\}$ 为所有可能回路的集合。可是， G 并不以 $\{(a,b), (c,d)\}$ 作为两个顶点间所有可能路径的集合。

为了得到以 $\{P_{ij}\}$ 作为 i 和 j 之间所有可能的路径集合的线图，我们加上一条以 i 和 j 为端点的边 y 。换句话说，如果有一个SC网络 G 以 $\{P_{ij}\}$ 作为 i 和 j 之间所有可能路径的集合，那么，插入边 y 所得的新线图 $G \cup (y)$ 将具有这样的性质：对于每一个 $P \in \{P_{ij}\}$ ， $(y) \cup P$ 是一个回路。因此

$$\{(y) \cup P_{ij}\} = \{(y) \cup P; P \in \{P_{ij}\}\} \quad (11-3-7)$$

是 $G \cup (y)$ 中所有可能的回路集合 $\{C_y\}$ 的一个子集。

因为 SC 网络具有这样的性质，即

$$\{P_{ij}\} \otimes \{P_{ij}\} = \{C\} \quad (11-3-8)$$

所以 $\{(y) \cup P_{ij}\}$ 将包含线性无关的全部回路，它们能生成 $G \cup (y)$ 的所有回路。这样，利用 $\{(y) \cup P_{ij}\}$ 中的回路，我们可以得到 $G \cup (y)$ 的回路矩阵 B_y ，而利用这个回路矩阵 B_y ，就可以得到基本回路矩阵 B_f 和基本割集矩阵 Q_f 。我们再根据这个矩阵 Q_f ，就可以构造一个线图 G' 。

现在，一个重要的问题是从 G' 中删去边 y 后，是否得到一个以给定集合 $\{P_{ij}\}$ 为两顶点间所有可能路径集合的 SC 网络。下面的定理就回答了这个问题。

定理11-3-2 设 $\{P_{ij}\}$ 是一个与满足定理11-3-1的完全确定开关函数 F_{ij} 对应的集合。又设 P_1, P_2, \dots, P_m 是 $\{P_{ij}\}$ 中线性无关的路径，以致 $\{P_{ij}\}$ 中其它任一路径 P' 不可能与这些路径线性无关。当且仅当存在一个零度为 m 的无向线图 G ，其线性无关回路为 $(y) \cup P_1, (y) \cup P_2, \dots, (y) \cup P_m$ ，其中 y 不在 $\{P_{ij}\}$ 的任一路径中，则 G 去掉边 y 是一个满足 F_{ij} 的 SC 网络。

注意，一个 SC 网络满足 F_{ij} 的意思是：在 SC 网络中存在两个顶点，这两个顶点间的开关函数是 F_{ij} 。路径这个名称是用来给 $\{P_{ij}\}$ 中的元素命名的。不过，如果不存在满足 F_{ij} 的 SC 网络，那么这种用法也许并不确切。

定理11-3-2的证明：假定有一个零度为 m 的无向线图 G ， $(y) \cup P_1, (y) \cup P_2, \dots, (y) \cup P_m$ 是图 G 的线性无关回路。假定在 G 的顶点 i 和 j 之间有一条路径 P' ，它不在 $\{P_{ij}\}$ 中。因为 $(y) \cup P'$ 是 G 的一个回路，所以 $(y) \cup P'$ 可以由 $(y) \cup P_1, (y) \cup P_2, \dots, (y) \cup P_m$ 中一部分的环和得到。不失一般性，设

$$(y) \cup P' = [(y) \cup P_1] \oplus [(y) \cup P_2] \oplus \cdots \oplus [(y) \cup P_{2k+1}] \quad (11-3-9)$$

其中 $2k+1 \leq m$ 。那么

$$P' = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_{2k+1} \quad (11-3-10)$$

P' 必在 $\{P_{ij}\}$ 中，这是因为 F_{ij} 满足定理11-3-1，而这与 P' 不在 $\{P_{ij}\}$ 中的假设矛盾。

假定 G 去掉边 y 后是一个满足 F_{ij} 的 SC 网络，那么很明显， G 的零度为 m ，且 $(y) \cup P_1, (y) \cup P_2, \dots, (y) \cup P_m$ 是线性无关回路。
(证毕)

运用这个定理，就可以从一个完全确定的开关函数 F_{ij} 按以下步骤综合出一个 SC 网络。

步骤 1 检验所给的函数 F_{ij} 是否满足定理11-3-1。如果不满足， F_{ij} 就不是 SC 网络的开关函数。

步骤 2 从对应于 F_{ij} 的集合 $\{P_{ij}\}$ 中，选取线性无关路径 P_1, P_2, \dots, P_m ，用回路 $(y) \cup P_1, (y) \cup P_2, \dots, (y) \cup P_m$ 构造回路矩阵 B 。

步骤 3 用初等行运算和列运算把 B 变成基本回路矩阵 $[U \ B_{12}]$ 。

步骤 4 构造基本割集矩阵 Q_1 ：

$$Q_1 = [B_{12}^T \ U] \quad (11-3-11)$$

步骤 5 用3-5节的方法求出线图 G ，它的基本割集矩阵是按步骤 4 得到的。

步骤 6 删去边 y ，所得的图即为满足 F_{ij} 的 SC 网络，其中顶点 i 和 j 是边 y 的端点。

下面的例子说明了应用上述步骤的过程。

例11-3-1 由下可以看出，完全确定开关函数

$$F_{ij} = ab + acd + bce + de$$

满足了定理11-3-1。因此我们转到步骤 2。

步骤 2 从

$$\{P_{ij}\} = \{(a,b), (a,c,d), (b,c,e), (d,e)\}$$

中, 假定我们取 $P_1 = (a,b)$, $P_2 = (a,c,d)$ 和 $P_3 = (b,c,e)$ 作为线性无关路径, 注意 $(d,e) = P_1 \oplus P_2 \oplus P_3$. 回路矩阵 B 是

$$B = \begin{matrix} & a & b & c & d & e & y \\ \begin{matrix} (y) \cup P_1 \\ (y) \cup P_2 \\ (y) \cup P_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

步骤 3 调整 B 的列:

$$B = \begin{matrix} & b & d & e & a & c & y \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

然后把行 1 加到行 3 上, 得到

$$B_f = \begin{matrix} & b & d & e & a & c & y \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} = [U \quad B_{f,1}]$$

步骤 4 得到 Q_f :

$$Q_f = \begin{matrix} & b & d & e & a & c & y \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

步骤 5 首先求出关于行 1 的 H 子阵:

$$H_{(1)} = \begin{matrix} & c & y \\ 2 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 3 & \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

用这个 H 子阵就可以得到 M 子阵对: $M_1(1)$ 和 $M_2(1)$

$$M_1(1) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} & b & d & e & a & c \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_2(1) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} & b & d & e & a & y \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

与 $M_1(1)$ 和 $M_2(1)$ 对应的两个线图 G_1 和 G_2 如图11-3-3所示。将 G_1 和 G_2 结合在一起, 移去顶点 1, 就得到图11-3-4(a)所示的线图 G 。

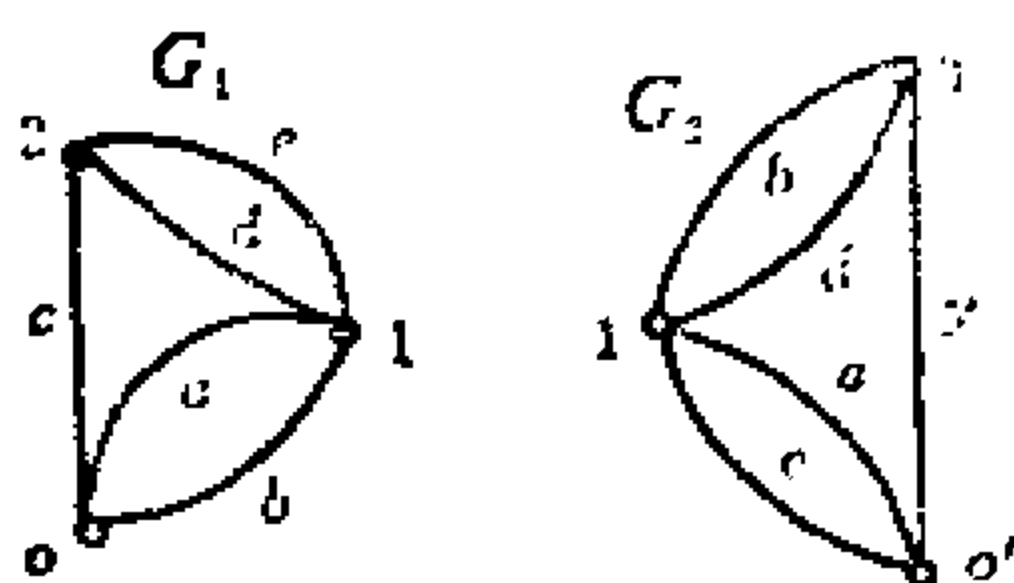


图11-3-3 对于 $M_1(1)$ 和 $M_2(1)$ 的线图

步骤 6 从 G_1 中删去边 y , 得到线图 G [图11-3-4(b)] 它是在顶点 3 和 O' (其间连着边 y) 之间满足已知 F_{ij} 的 SC 网络。

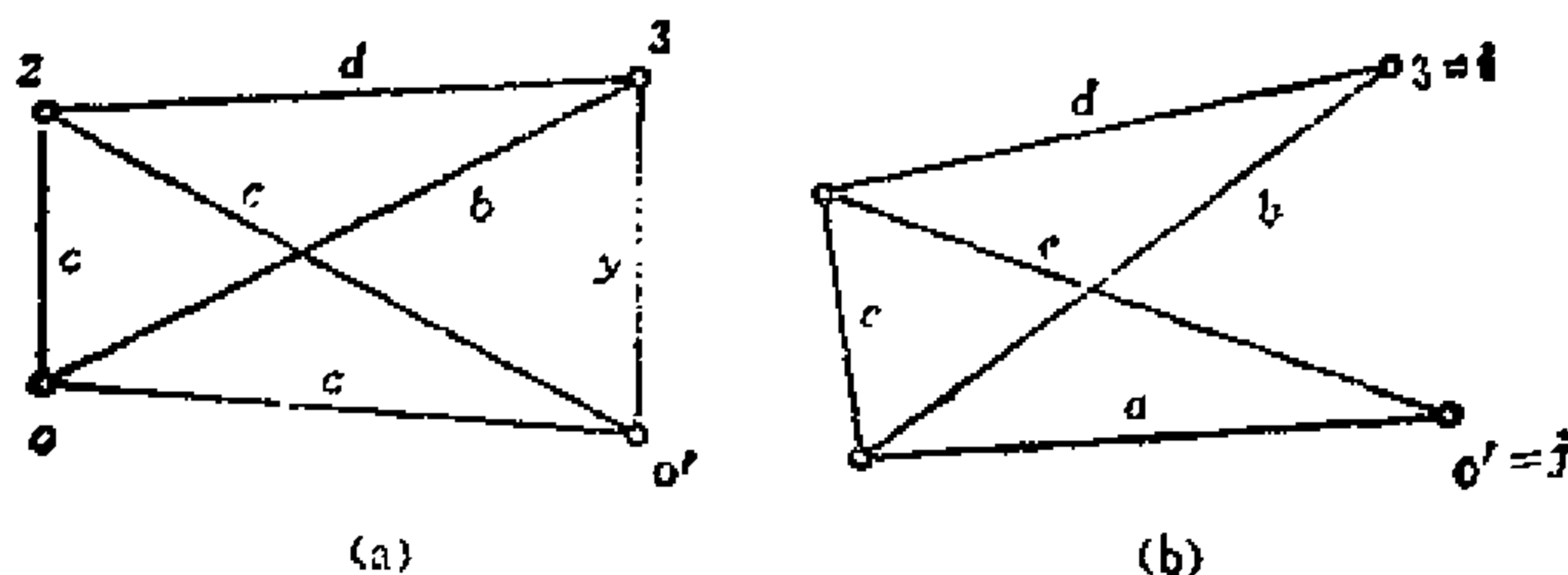


图11-3-4

(a) 线图 G' , (b) SC 网络

11-4 以 SC 网络综合不全定开关函数

考虑下面的真值表：

x_2	x_1	F
0	0	0
0	1	I
1	0	1
1	1	1

其中符号 I 表示 F 是不确定的（不必考虑），如象此真值表所给出的，具有不完全确定情况的开关函数称为不全定开关函数。

定义11-4-1 对于一个不全定开关函数 F_{ij} 来说，符号 $\{R_{ij}\}$ 和 $\{I_{ij}\}$ 代表与 F_{ij} 对应的两个集合，它们满足：

$$1. \quad F_{ij}(1) = \sum_{R_i \in \{R_{ij}\}} R_i \text{ 乘积} \quad (11-4-1)$$

$$2. \quad F_{ij}(I) = \sum_{I_i \in \{I_{ij}\}} I_i \text{ 乘积} \quad (11-4-2)$$

其中 $F_{ij}(1)$ 是从 F_{ij} 把对应真值表内所有的 I 置 0 得到的， $F_{ij}(I)$ 是从 F_{ij} 把对应真值表内所有的 1 置 0，所有的 I 置 1 得到的。

注意，将对应真值表中所有的 I 置 1 时：

$$F_{ij} = F_{ij}(1) + F_{ij}(I) \quad (11-4-3)$$

还可以看出

$$\{R_{ij}\} \cap \{I_{ij}\} = \phi \quad (11-4-4)$$

我们也可以不用真值表而用 $F_{ij}(1)$ 和 $F_{ij}(I)$ 来确定一个不全定开关函数。例如，

$$F_{ij}(1) = x_2$$

$$F_{ij}(I) = x_1 \bar{x}_2$$

给出一个不全定开关函数，其真值表就是上面所给出的。这组方程的集合 $\{R_{ij}\}$ 和 $\{I_{ij}\}$ 是

$$\{R_{ij}\} = (x_2)$$

$$\{I_{ij}\} = (x_1, \bar{x}_2)$$

若一个不全定开关函数给定，则我们可以选取 $\{P_{ij}\}$ 使

$$\{R_{ij}\} \subset \{P_{ij}\}$$

并且任何一个 $I \in \{I_{ij}\}$ 可以在 $\{P_{ij}\}$ 中。但是， $\{P_{ij}\}$ 的选择一定要使得按照上节所提供的步骤就能够综合出一个 SC 网络。下面的例子说明选择集合 $\{P_{ij}\}$ 的过程。

例11-4-1 设有一个不全定开关函数，其对应集合给定为

$$\{R_{ij}\} = \{(a, e, f), (b, d, f), (c, d, e), (a, b, c)\}$$

和

$$\{I_{ij}\} = \{(d, e, f), (a, b, f), (a, c, e), (b, c, d), (a, b, e)\}$$

假定我们选取 $\{P_{ij}\} = \{R_{ij}\}$ ，这种选择需满足定理 11-3-1。选择 $P_1 = (a, e, f), P_2 = (b, d, f), P_3 = (c, d, e)$ ，我们有

$$B = \begin{matrix} (y) \cup P_1 \\ (y) \cup P_2 \\ (y) \cup P_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d & e & f & y \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因为这是一个基本回路矩阵，所以，我们可以得到基本割集矩阵为

$$Q_f = \begin{matrix} & a & b & c & d & e & f & y \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

这个矩阵不可实现为基本割集矩阵，因此 $F_{ij}(1)$ 不是 SC 网络的开关函数。

假定我们把 (d, e, f) 加到 $\{P_{ij}\}$ 中去，那么

$$(d, e, f) \oplus P_1 \oplus P_2 = (a, b, f) \in \{I_{ij}\}$$

由定理 11-3-1， (a, b, f) 必在 $\{P_{ij}\}$ 中。同样

$$(d, e, f) \oplus P_1 \oplus P_3 = (a, c, e) \in \{I_{ij}\}$$

表明所选的 (a, c, e) 必在 $\{P_{ij}\}$ 中。最后

$$(d, e, f) \oplus P_2 \oplus P_3 = (b, c, d) \in \{I_{ij}\}$$

说明 (b, c, d) 必在 $\{P_{ij}\}$ 中。因而，我们有

$$\{P_{ij}\} = \{R_{ij}\} \cup \{(d, e, f), (a, b, f), (a, c, e), (b, c, d)\}$$

显然，这个集合满足定理 11-3-1。选 $P_4 = (d, e, f)$ 为线性无关路径组中的一个元素，我们有

$$B = \begin{array}{c|ccccccc} & a & b & c & d & e & f & y \\ \hline (y) \cup P_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ (y) \cup P_2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ (y) \cup P_3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ (y) \cup P_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

把第 4 行加到第 2 行和第 3 行，得

$$B_1 = \begin{array}{c|cccc|ccc} a & b & c & d & e & f & y \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

由此我们得到基本割集矩阵 Q_1 为

$$Q_1 = \begin{array}{c|cccc|ccc} a & b & c & d & e & f & y \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

把第 3 行加到第 2 行，得

$$Q = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e & f & y \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这个矩阵的每一列最多有两个非零项。因此我们可以得到图 11-4-1 所示的线图 G 。去掉边 y ，就得到了满足 F_{ij} 的一个 SC 网络。

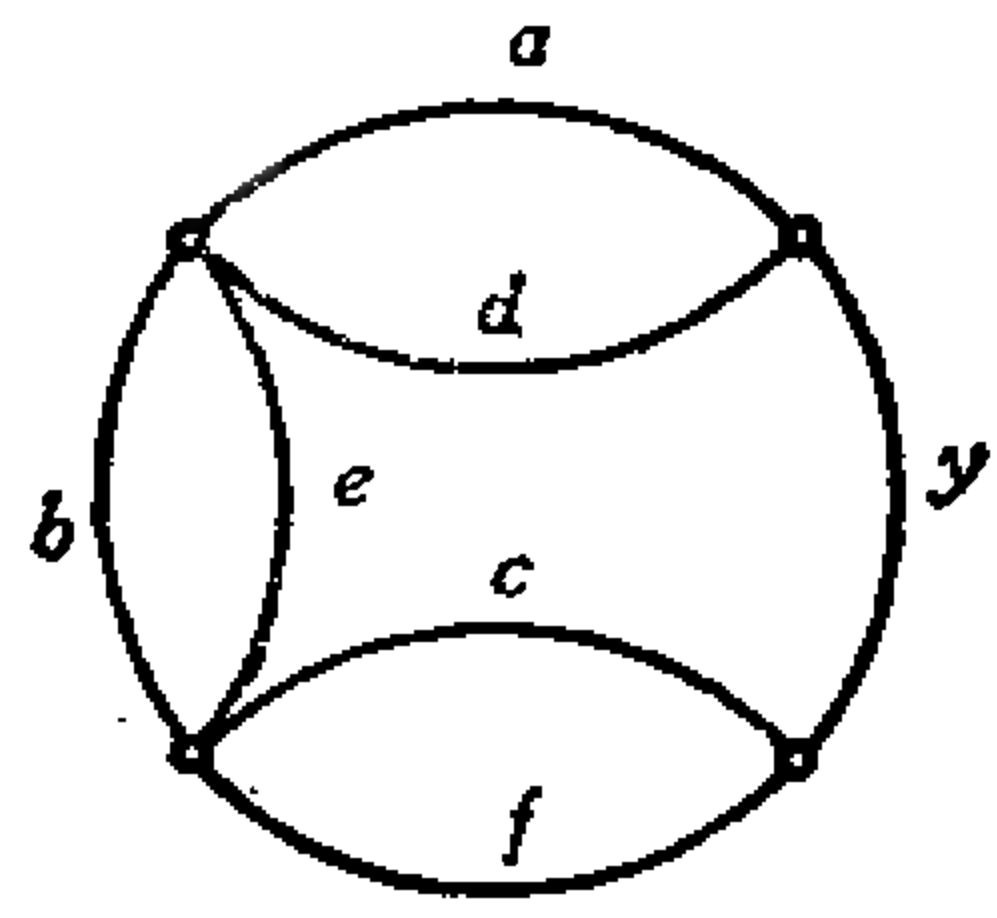


图 11-4-1 线图 G

假定我们不选 (d, e, f) ，而是选择 (a, b, e) 作为 $\{P_{ij}\}$ 的一个元素，也就是

$$\{P_{ij}\} \supset \{R_{ij}\} \cup (a, b, e)$$

那么

$$(a, b, e) \oplus P_1 \oplus P_2 = (d) \notin \{I_{ij}\}$$

从而，在 $\{P_{ij}\}$ 中再多加入 $\{I_{ij}\}$ 的任何其他元素是不可能满足定理 11-3-1 的。因此上述 $\{P_{ij}\}$ 的选择是给出待求 SC 网络的唯一选择。

这里一定要注意，只要在 $\{P_{ij}\}$ 中出现的不同的布尔变量个数不变，对 $\{P_{ij}\}$ 的各种选择就不改变所得的 SC 网络的边的数目。换句话说，所得的 SC 网络的边的数目是由 $\{P_{ij}\}$ 中不同的布尔变量的个数决定的。

11-5 多触点开关网络

在 SC 网络中，每一边的权必须是不同的布尔变量。在 SP 网络中，一个开关网络的两条边所带的权可以是同一个布尔变量。然而，如果两条边的布尔变量 x 是相同的，那么一条边必为 x ，而另一条边必为 \bar{x} (x 的补)。

定义11-5-1 SP 网络是一个无向线图，它满足：(1) 每条边的权是布尔变量；(2) 对于每个布尔变量 x ，至多有一条边的权为 x ，并且至多另有一条边的权为 \bar{x} 。

考虑 SP 网络 G 的完全确定开关函数 F_{ij} ，把它表示为

$$F_{ij} = \sum_{P_i \in \{P_{ij}\}} P_i \text{ 乘积} \quad (11-5-1)$$

集合 $\{P_{ij}\}$ 不一定是 G 中 i 和 j 之间所有可能路径的集合。这是因为图中可能会有这样一条路径，它包含两条权为互补的边，如 x 和 \bar{x} ，由于 $x\bar{x} = 0$ ，在 F_{ij} 中它们就不会与非零项对应，例如，图11-5-1中 SP 网络的 F_{ij} 是

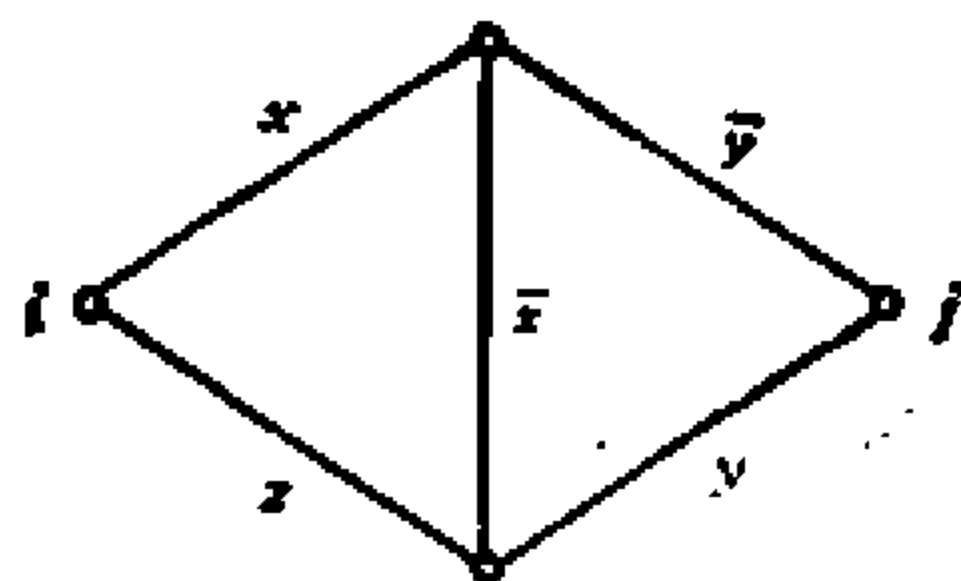


图11-5-1 SP网络

$$F_{ij} = x\bar{y} + yz + \bar{x}\bar{y}z$$

对应 F_{ij} 的集合 $\{P_{ij}\}$ 是

$$\{P_{ij}\} = \{(x, \bar{y}), (y, z), (\bar{x}, \bar{y}, z)\}$$

显然它不是该 SP 网络中 i 和 j 之间所有可能路径的集合。

定义11-5-2 当一条路径包含一个布尔变量及其补时，就称这条路径为 0 路径。

现在很清楚，与一个 SP 网络对应的完全确定开关函数 F_{ij} 的 $\{P_{ij}\}$ 一般不满足定理11-3-1。因此我们必须将 0 路径（它是 i 和 j 之间的路径）加进 $\{P_{ij}\}$ 中，才能使所得的集合 $\{P'_{ij}\}$ 按照11-3节中的步骤给出 SP 网络。下面的例子对此作了说明。

例11-5-1 假定一个完全确定开关函数 F_{ij} 是

$$F_{ij} = ace + cc\bar{d}\bar{e} + \bar{a}bce + bd\bar{e} + \bar{a}b\bar{c}\bar{d}\bar{e}$$

那么与 F_{ij} 对应的集合 $\{P_{ij}\}$ 是

$$\{P_{ij}\} = \{(a, c, e), (a, c, \bar{d}, \bar{e}), (\bar{a}, b, c, e), (b, d, \bar{e}), (\bar{a}, b, \bar{c}, \bar{d}, \bar{e})\}$$

它不满足定理11-3-1. 这是因为

$$(a, c, e) \oplus (a, c, \bar{d}, \bar{e}) \oplus (b, d, \bar{e}) = (b, d, \bar{d}, e) \notin \{P_{ij}\}$$

$$(a, c, e) \oplus (\bar{a}, b, c, e) \oplus (b, d, \bar{e}) = (a, \bar{a}, d, \bar{e}) \notin \{P_{ij}\}$$

以及

$$(a, c, \bar{d}, \bar{e}) \oplus (\bar{a}, b, c, e) \oplus (b, d, \bar{e}) = (a, \bar{a}, d, \bar{d}, e) \notin \{P_{ij}\}$$

但是, 它们都是 0 路径. 因此我们可以把它们加入 $\{P_{ij}\}$ 中而不改变 F_{ij} . 所得的集合 $\{P'_{ij}\}$ 为

$$\{P'_{ij}\} = \{(a, c, e), (a, c, \bar{d}, \bar{e}), (\bar{a}, b, c, e), (b, d, \bar{e}),$$

$$(\bar{a}, b, \bar{c}, \bar{d}, e), (b, d, \bar{d}, e), (a, \bar{a}, d, \bar{e}), (a, \bar{a}, d, \bar{d}, e)\}$$

设 $P_1 = (a, c, e)$, $P_2 = (a, c, \bar{d}, \bar{e})$, $P_3 = (\bar{a}, b, c, e)$, $P_4 = (b, d, \bar{e})$

是所选的线性无关路径, 则我们可以得到一个回路矩阵 B :

$$B = \begin{bmatrix} a & \bar{d} & \bar{a} & d & b & c & e & \bar{e} & y \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

把第一行加到第二行, 得

$$B_1 = \begin{bmatrix} a & \bar{d} & \bar{a} & d & b & c & e & \bar{e} & y \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

因此基本割集矩阵 Q_1 是

$$Q_1 = \begin{bmatrix} a & \bar{d} & \bar{a} & d & b & c & e & \bar{e} & y \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

如果我们把第 1 行加到第 5 行，把第 2 行加到第 3 行，就得到一个关联矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a & \bar{a} & \bar{a} & d & b & c & e & \bar{e} & y \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

以它为关联矩阵的线图 G 如图 11-5-2 所示。去掉边 y ，得到的线图即为满足所给函数 F_{ij} 的 SP 网络。

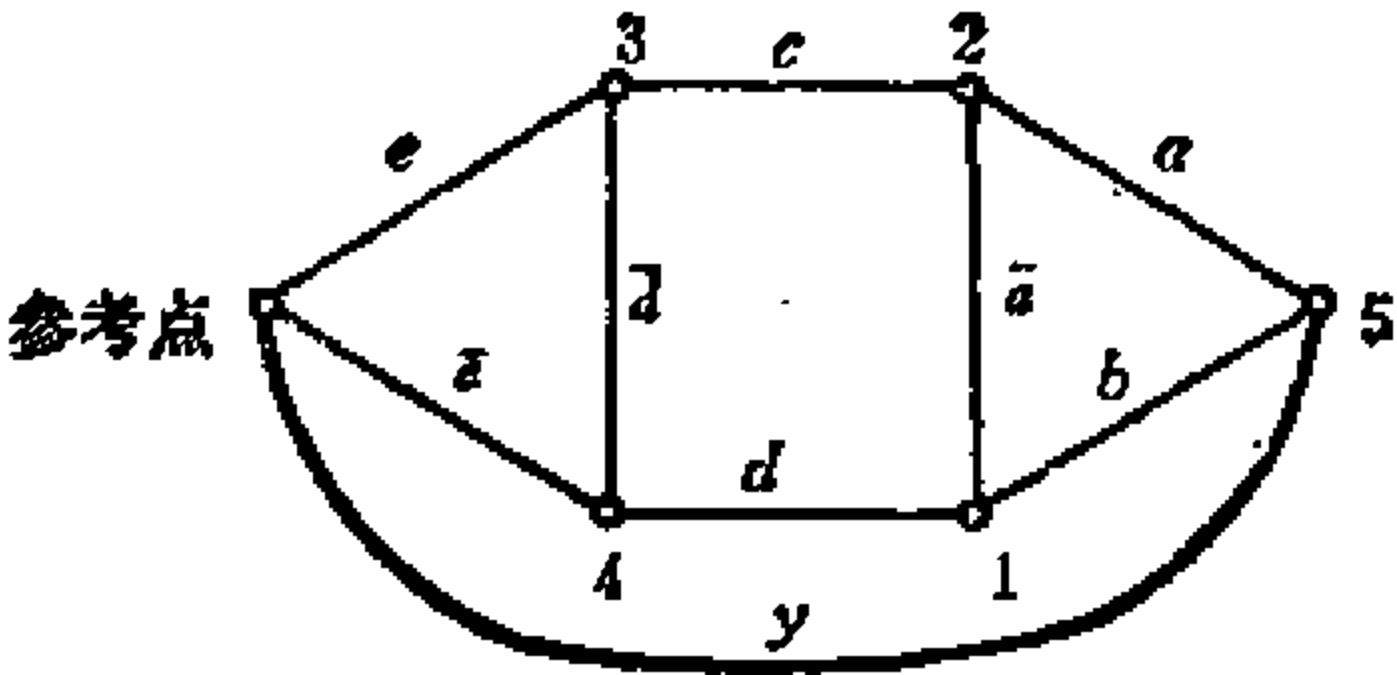


图 11-5-2 线图 G

当一个 SP 网络的开关函数为不完全确定时，就有集合 $\{R_{ij}\}$ 和 $\{I_{ij}\}$ 。这时，除了应该把 0 路径加进 $\{P_{ij}\}$ 外，综合 SP 网络的方法与 11-4 节中所讲的几乎是一样的。

当一个开关网络可以有多触点（即一个布尔变量可以是无向线图中许多条边的权）时，这种网络如按照 11-3 节的方法来综合就变得非常复杂。在这种情况下，为了应用上述方法，就必须使每一条边都有各自不同的名称。这样在一个给定的开关函数 F_{ij} 中，要判断一个布尔变量是否是某一条边的权就非常困难。例如，在与开关函数 F_{ij} 对应的集合 $\{P_{ij}\}$ 中， (a, b, c) 有可能来自 (a_1, a_2, b, c) ，其中 $a_1 = a_2$ 。换句话说，假设在一个包含两条带

有相同权的边的开关网络中，有一条 i 和 j 之间的路径，那么这条路径的路径乘积中只能出现 F_{ij} 中的一个 x 。当我们应用11-3节中的方法时，就必须重新构造这条含有两个带变量 x 的边所组成的路径。这可不是一个容易的事，下例将说明这一点。

例11-5-2 考虑一个开关函数 F_{ij} ,

$$F_{ij} = ab + ac + bc$$

对应 F_{ij} 的集合 $\{P_{ij}\}$ 是

$$\{P_{ij}\} = \{(a, b), (a, c), (b, c)\}$$

它不满足定理11-3-1，因为

$$(a, b) \oplus (a, c) \oplus (b, c) = \phi$$

如果我们作以下改变：

$$(a, b) \implies (a_1, b_1)$$

$$(a, c) \implies (a_2, c)$$

$$(b, c) \implies (b_2, c)$$

其中 $a_1 = a_2, b_1 = b_2$ ，那么

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, c) \oplus (b_2, c) = (a_1, a_2, b_1, b_2)$$

于是集合 $\{P_{ij}\}$ 为

$$\{P_{ij}\} = \{(a_1, b_1), (a_2, c), (b_2, c), (a_1, a_2, b_1, b_2)\}$$

它满足定理11-3-1，故按照11-3节的方法可得到满足 F_{ij} 的一个开关网络。

习 题

1. 利用连接矩阵求出图 P-11-1 网络中从 i 到 j 的开关函数。

2. 利用11-2节中所讲的路径集合求出图 P-11-2 中网络的开关函数 F_{12} 和 F_{13} 。

3. 综合一个 SC 网络，它满足完全确定开关函数

$$F = af + bdf + cdef + cg + beg + adeg$$

4. 综合一个 SC 网络, 它满足一个不全定开关函数, 其对应集合 $\{R_{ij}\}$ 和 $\{I_{ij}\}$ 是

$$\{R_{ij}\} = \{(a, d, e), (b, d, f), (b, e), (c)\}$$

和

$$\{I_{ij}\} = \{(a, c, e), (a, f)\}$$

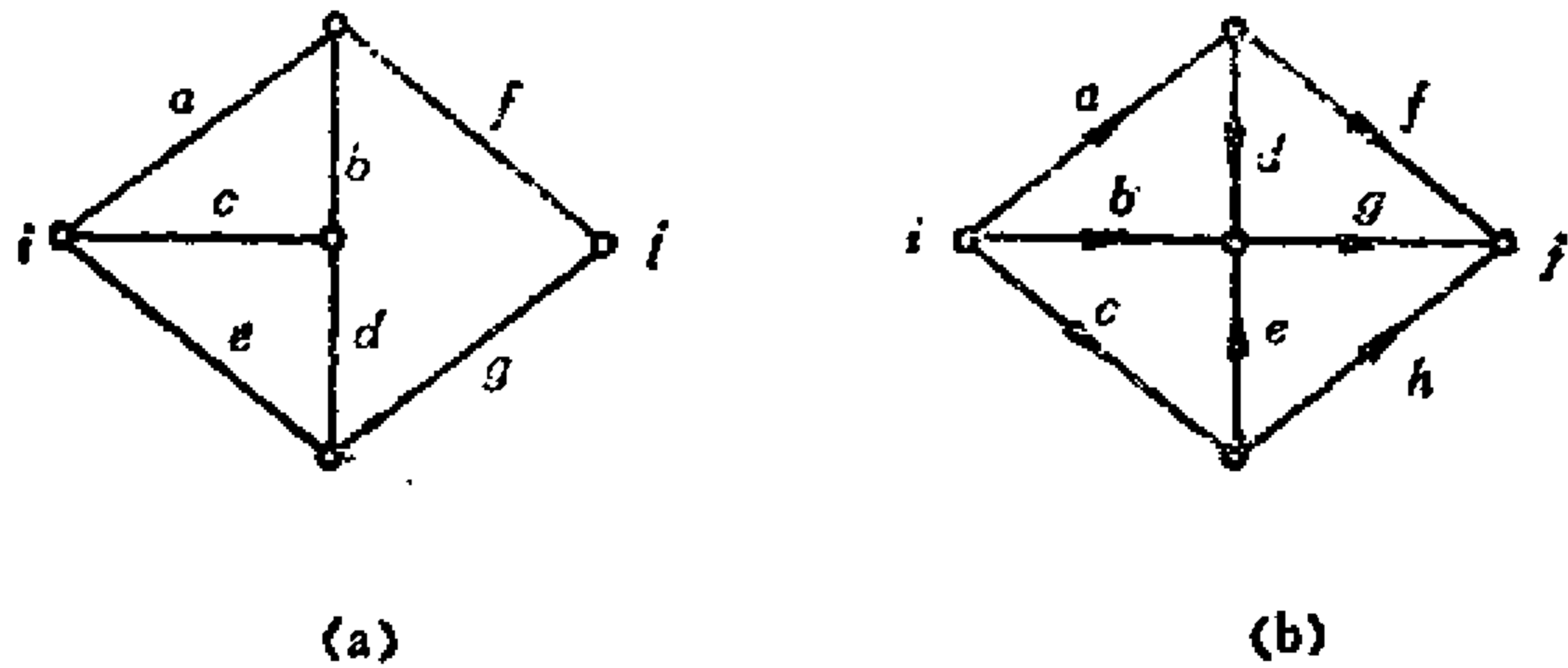


图 P-11-1
(a) SC 网络 G , (b) 网络 G'

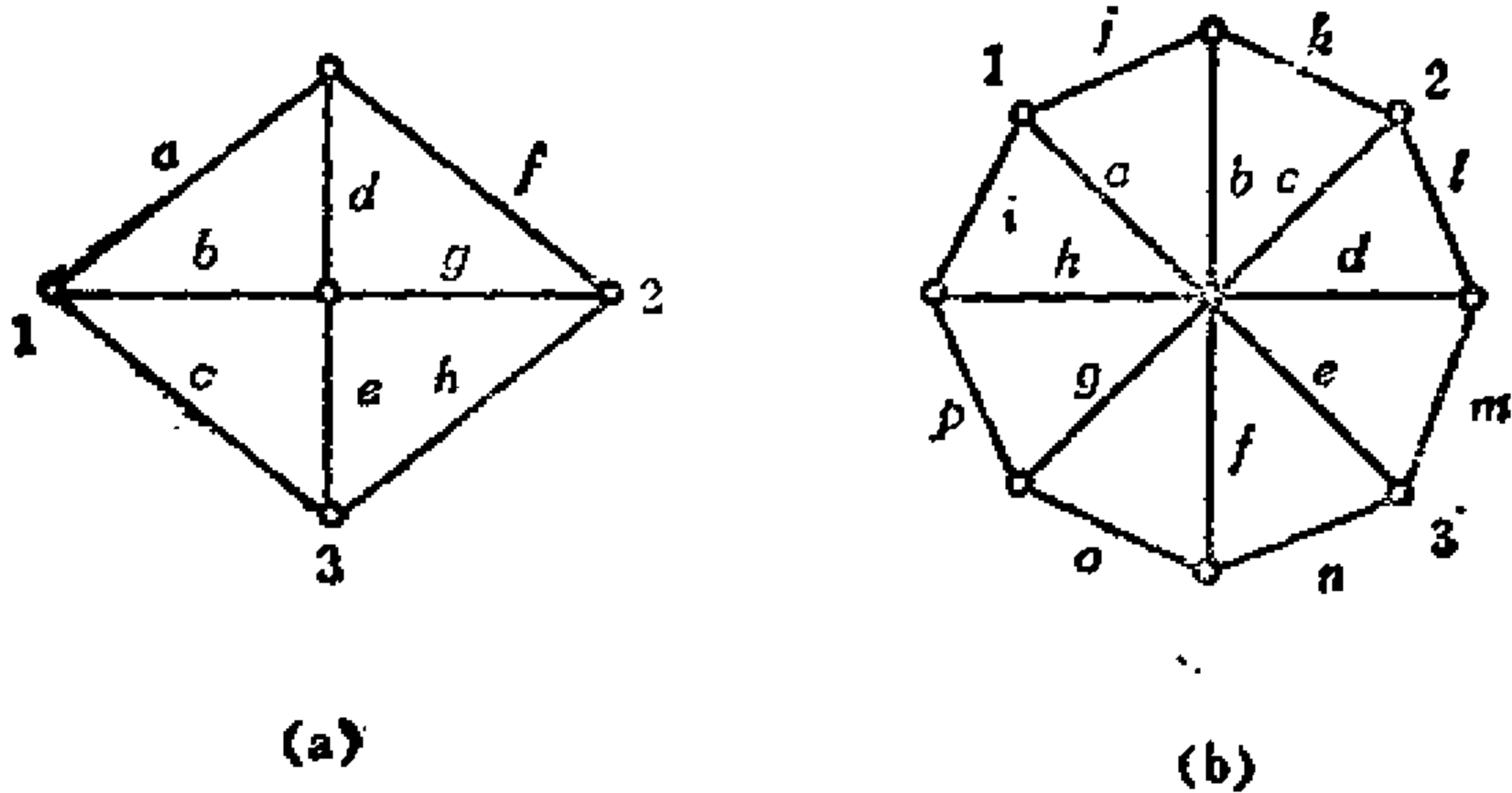


图 P-11-2
(a) SC 网络 G , (b) SC 网络 G'

5. $F_{ij} = ab + ac + bc + ad$ 是一个 SC 网络的开关函数吗?

6. 假定 F_1 不是 SC 网络的开关函数, 而 F_2 是 SC 网络的开关函数. $F = F_1 + F_2$ 是 SC 网络的开关函数吗?

7. 综合一个满足以下完全确定开关函数的 SP 网络:

$$F_{ij} = x\bar{y}z + \bar{x}yz + y\bar{u}\bar{z} + \bar{y}u\bar{z}$$

8. 假定 F_1 是一个 SC 网络的完全确定开关函数, $F = xF_1 + \bar{x}F_1$ 是一个 SP 网络的完全确定开关函数吗?

9. 在 SC 网络 G 中, 设 F_{ij} 是 i 和 j 之间的开关函数, F_{ip} 是 i 和 p 之间的开关函数. 假定我们把一个新的变量 x 加在 G 中 p 和 j 之间, 那么在所得的 SC 网络中, i 和 j 之间的开关函数是什么?

10. 设 G 是一个 SP 网络. 又设 i, j 和 k 是 G 中任意三顶点. 在 F_{ij}, F_{jk} 和 F_{ik} 之间, 存在什么关系? 其中 F_{pq} 是 p 和 q 之间的开关函数, $p, q \in (i, j, k)$.

第十二章 传输网理论——边权例

12-1 无向边权 (EWC) 网中的单流

我们来考虑从一站向另一站传送信息的介质,例如电话线路、公路、电力线、公用管道等等。单位时间内这种介质所能传输的信息是有某种最大限量的。每站所能处理的信息也会有一个最大的限量。这种介质网络称为传输网(communication net)。我们可以用线图来表示它,其中每个顶点代表一个站,而每条边代表一个在两站之间传送信息的介质(链)。若各站都不限制所传信息的数量时,这样的网络称为边权传输网(Edge Weighted Communication Net),或记为EWC网。当每条边所能传输信息的最大限量足够大,使得信息的传输量仅受到顶点(站)的限制时,这样的网络称为点权传输网(Vertex Weighted Communication Net),或记为VWC网。本章只讨论EWC网,VWC网在下一章讨论。

在EWC网中,因为只有边才限制信息的传输量,所以只有边具有容量(权)——边所能传送信息量的最大限量,这些权称为边容量。当所有边均未定向的时候,就称网络为无向EWC网。另一方面,当所有边均定了向时,就称之为有向EWC网。例如,图12-1-1中的线图是无向

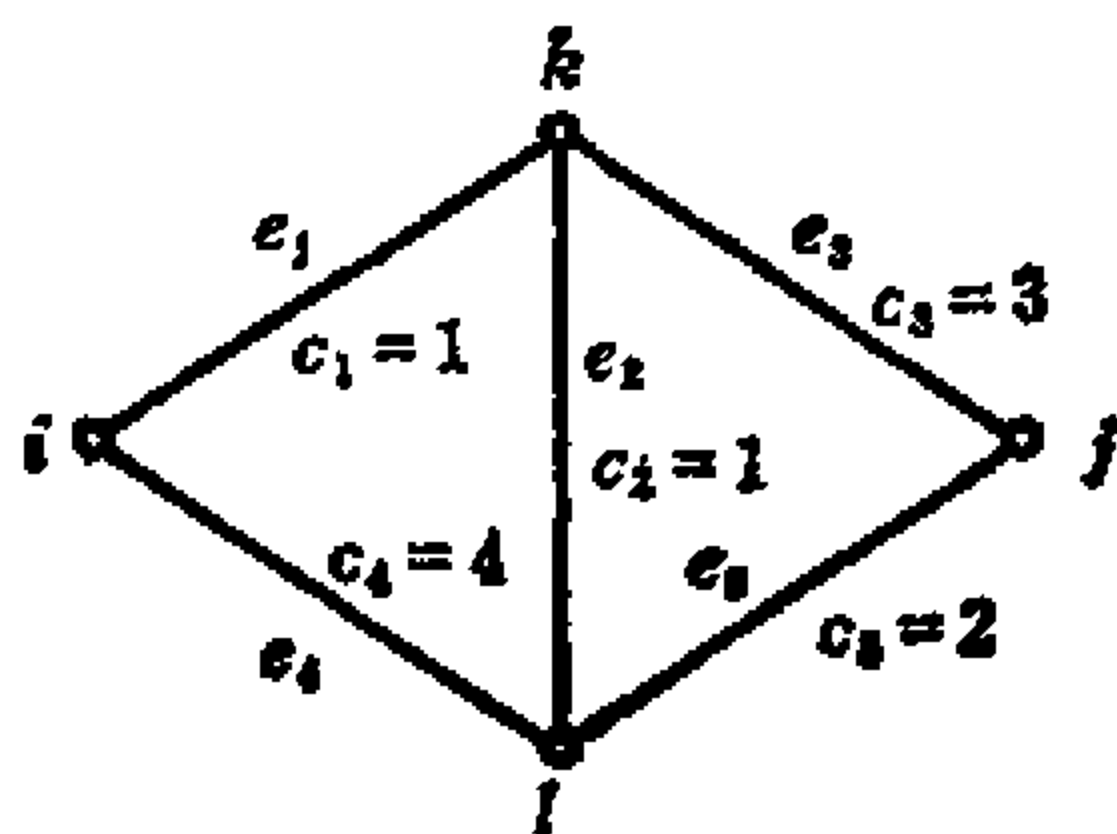


图12-1-1 一个无向EWC网

EWC网，其中，给每条边赋的权代表该边的边容量。

为了方便，我们用“从 i 分配到 j 的流”这样的说法来代替“从顶点 i 传输到顶点 j 的信息”这句话。这里我们要用到下面的术语。

定义12-1-1 设 P_r 是无向图中顶点 i 和 j 之间的一条路径。从 i 到 j 的对应_{有向}路径是这样得到的：给 P_r 的每条边定一个方向，使路径 P_r 变成一条从 i 到 j 的有向路径。

例如，在图12-1-2(a)所示的无向线图中，路径 $P = (a, b, c)$ 的从 i 到 j 的对应_{有向}路径如图12-1-2(b)所示。

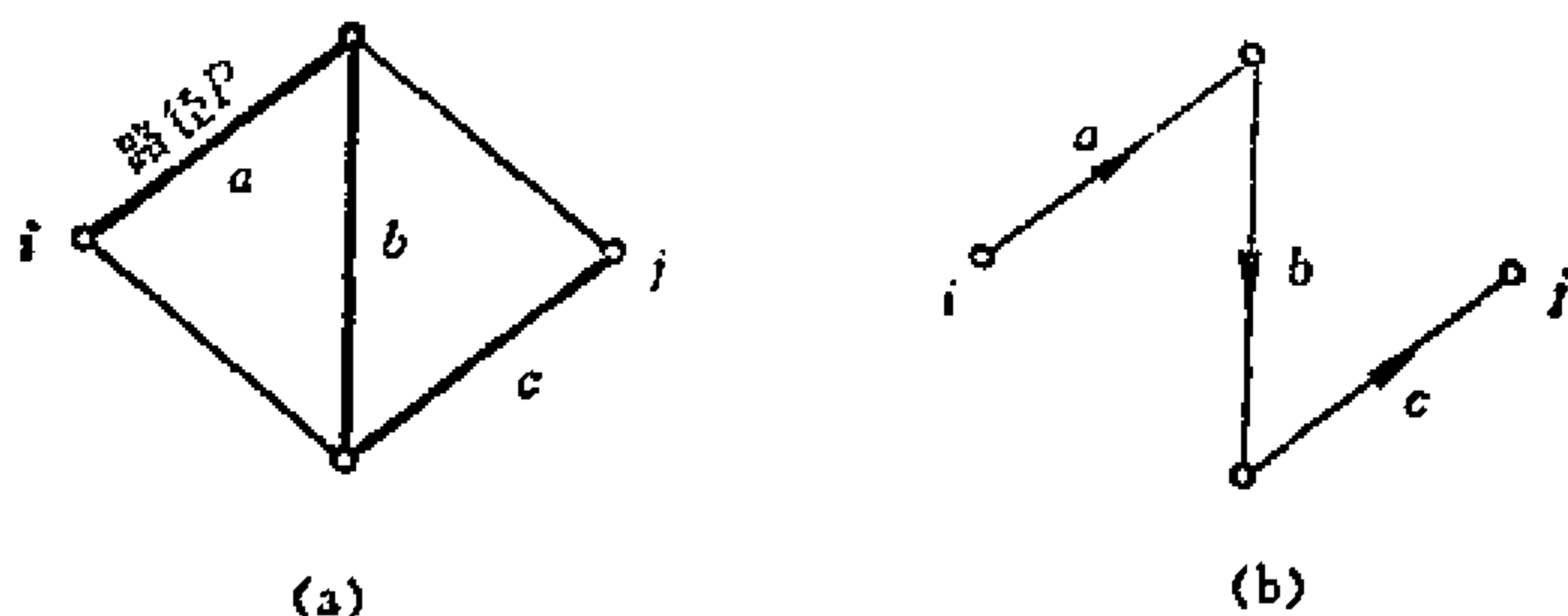


图12-1-2

(a) 线图 G 和路径 P ; (b) P 的从 i 到 j 的对应_{有向}路径

定义12-1-2 符号 $\psi_{r,ij}$ 表示从顶点 i 到顶点 j 的流（注意下标代表这些顶点）。

将流 $\psi_{r,ij}$ 分配给一条路径的意思是由这条路径中的边传输 $\psi_{r,ij}$ 。

定义12-1-3 设 P_r 是无向图中顶点 i 和 j 之间的一条路径。分配给路径 P_r 一个流 $\psi_{r,ij}$ 的意思是把 $\psi_{r,ij}$ 分配给 P_r 的每条边，其定向与 P_r 的从 i 到 j 对应的有向路径方向一致。

例如，分配 $\psi_{r,ij} = 1$ 给路径 $P = (a, b, c)$ ，也就是说，我们把

1 个单位的流连同适当的定向赋给 P 的每条边, 如图 12-1-3(a) 所示。为了简化, 通常用一条线来代表 $\psi_{r,i}$, 如图 12-1-3(b) 所示。

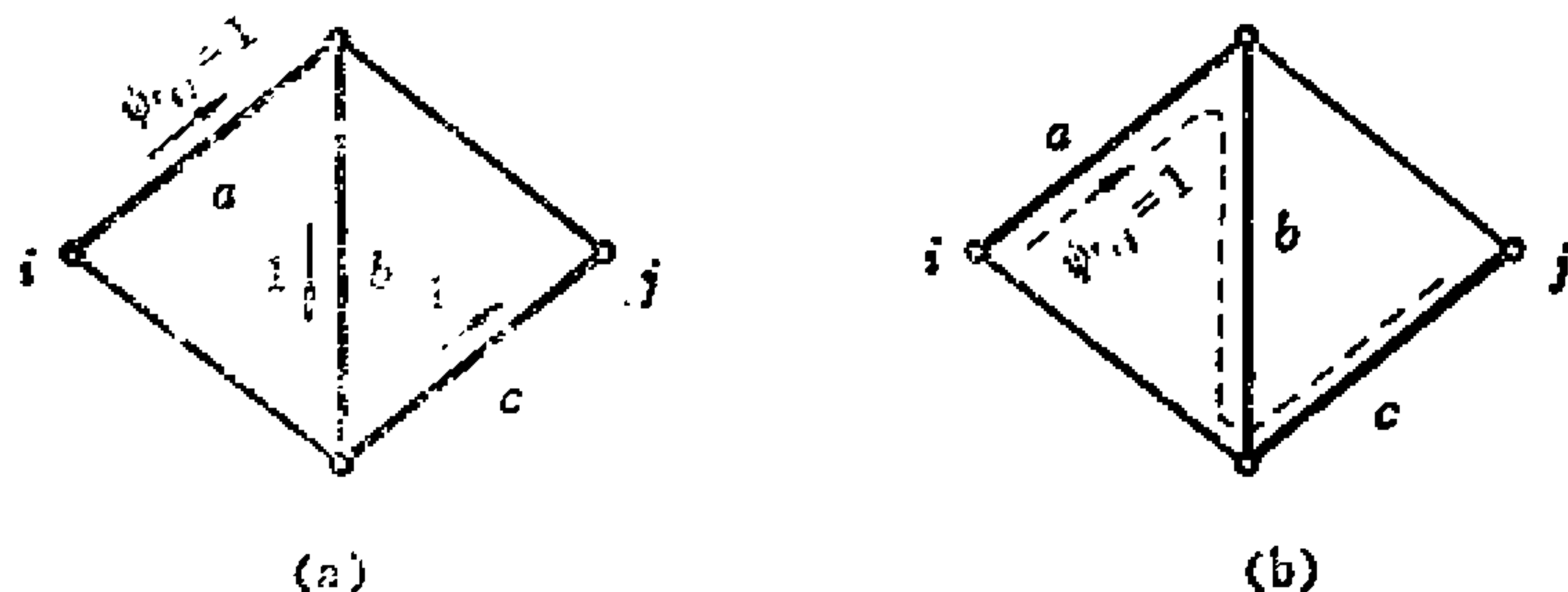


图12-1-3 $\psi_{r,i}$ 的分配

(a) 分配 $\psi_{r,i}$ 给 P 的每条边; (b) 用线表示 $\psi_{r,i}$

当我们说将一个流 ψ_r 分配给一个无向 EWC 网 G 时, 一般是指

$$\psi_{ij} = \sum_{r=1}^n \psi_{r,i,j} \quad (12-1-1)$$

其中, 流 ψ_{ij} 的每一部分 $\psi_{r,i,j}$ 是分配给 G 中 i 和 j 之间一条路径 P_r 的, $r=1, 2, \dots, n$, 而 $\sum_{r=1}^n \psi_{r,i,j}$ 是指对 $\psi_{r,i,j}$ 的数量求和。例如, 在图 12-1-4 所示无向 EWC 网中有三个流 $\psi_{1,i,j}=1$, $\psi_{2,i,j}=2$ 和 $\psi_{3,i,j}=3$, 分别分配给路径 P_1 , P_2 和 P_3 。因此, 我们说 $\psi_{ij} = \sum_{r=1}^n \psi_{r,i,j} = 6$ 分配给了 G 。

根据边容量的定义, 必须注意将流 $\psi_{r,i,j}$ 分配给路径 P_r ($r=1, 2, \dots, n$) 时, 不应出现分配给一条边的流量超过该边容量的情况。例如, 在图 12-1-4 所示的 EWC 网中, 边 b 必须承担 $\psi_{1,i,j} + \psi_{2,i,j} = 3$ 。如果 b 的边容量小于 3, 那么图 12-1-4 所示要承担

$\psi_{ij} = 6$ 的分配方式就不适当了。换句话说，给一条路径 P_s 分配流 ψ_{ij} 是有一定限制的。

假定 ψ_{sij} ($s = 1, 2, \dots, h$) 是分配给从 i 到 j 的路径 P_{sij} (对所有的 s) 的流。那么对于边容量为 c' 的任一边 e' ，必须满足下式

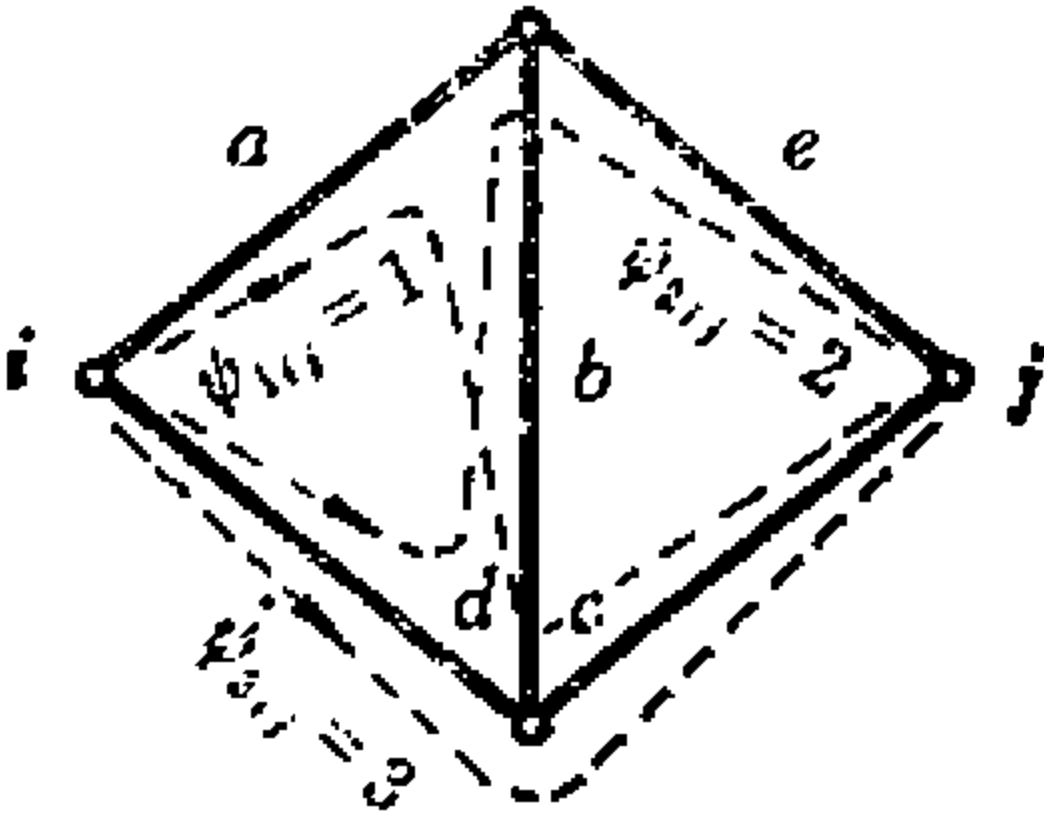


图12-1-4 ψ_{ij} 的分配

$$c' \geq \psi(e') \tag{12-1-2}$$

其中

$$\psi(e') = \sum_{s=1}^h \delta_s(e') \psi_{sij} \tag{12-1-3}$$

而

$$\delta_s(e') = \begin{cases} 1 & \text{若边 } e' \text{ 在路径 } P_s \text{ 中} \\ 0 & \text{若边 } e' \text{ 不在路径 } P_s \text{ 中} \end{cases} \tag{12-1-4}$$

式 (12-1-2) 中的符号 $\psi(e')$ 表示将流 ψ_{sij} 给予路径 P_{sij} ($s = 1, 2, \dots, h$) 的分配方式中，分配给边 e' 的总流。

假定流 ψ_{sij} 已分配给路径 P_{sij} ， $s = 1, 2, \dots, h$ 。于是我们知道，式(12-1-2)对 EWC 网 G 的每条边都应满足。要给路径 P_{sij} 分配一个附加的流 ψ_{sij} ， P_{sij} 中的每条边 e_u 就必须满足

$$\psi(e_u) + \psi_{sij} \leq c_u \tag{12-1-5}$$

其中 $\psi(e_u)$ 是按式(12-1-3)给出的边 e_u 的总流，而 c_u 是边 e_u 的容量。式(12-1-5)可以改写为

$$\psi_{sij} \leq c_u - \psi(e_u) \tag{12-1-6}$$

这是 P_{sij} 中每条边都必须满足的公式。换句话说，

$$\psi_{sij} \leq \min \{c_u - \psi(e_u); e_u \in P_{sij}\} \tag{12-1-7}$$

此式的右端为通过一条路径 P_{ij} 能够给 EWC 网分配的附加流的上界。

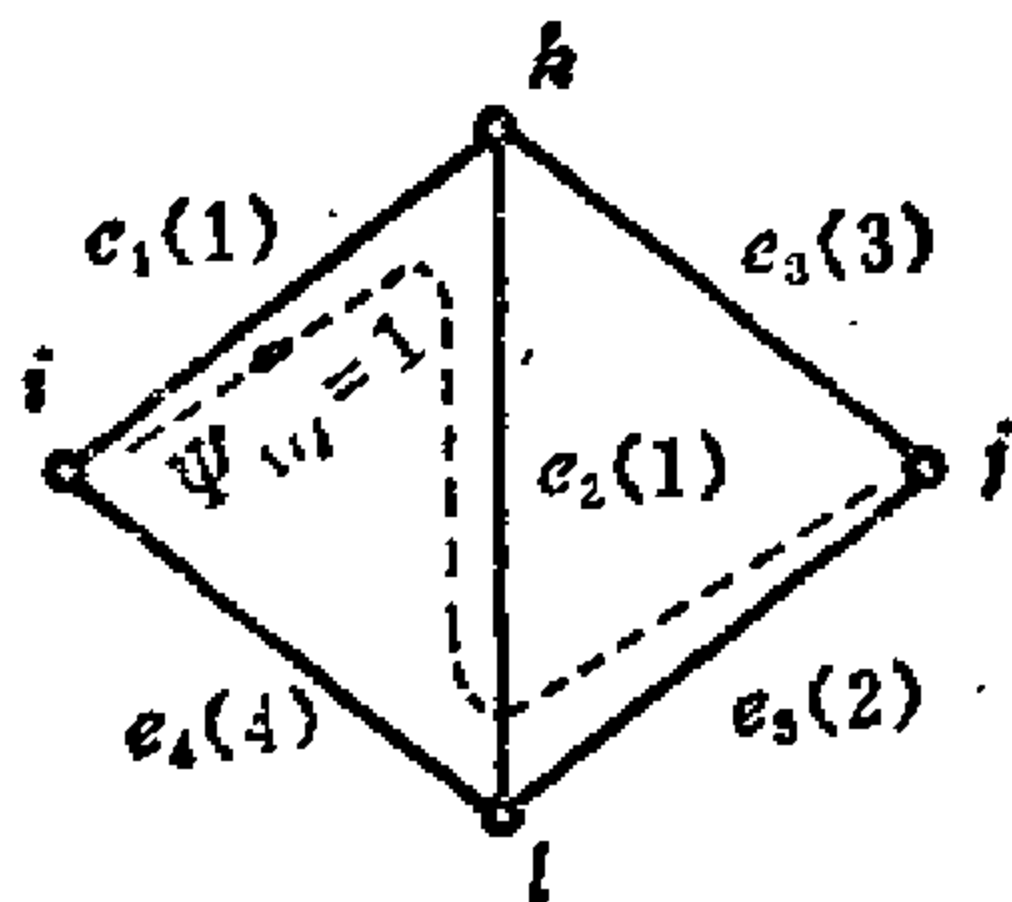


图12-1-5 流 $\psi_{ij} = 1$

例12-1-1 假定我们给图 12-1-1 中的 EWC 网一个流 ψ_{ij} ，如图12-1-5所示。那么只有一条路径 $P_{ij} = (e_4, e_5)$ 可以分配到一个从 i 到 j 的非零流。因为 $\min\{4 - \psi(e_4); 2 - \psi(e_5)\}$ 是 1，所以附加流 ψ_{2ij} 不能大于 1。

定义12-1-4 所谓“流 ψ_{ij} 可以被分配”的意思是说存在一个路径 $P_{r,ij}$ ($r = 1, 2, \dots, h$) 的集合，（其中每条路径都是在顶点 i 和 j 之间的一条路径），以及一个流 $\psi_{r,ij}$ ($\psi_{ij} = \sum_{r=1}^h \psi_{r,ij}$) 的集合，使得对于 $r = 1, 2, \dots, h$ ， $\psi_{r,ij}$ 可以顺次分配给路径 $P_{r,ij}$ 。

在例12-1-1中，我们可以看出， $\psi_{ij} = 2$ 可以分配给图12-1-1中的传输网。但是，如果我们不是如图12-1-5那样分配 $\psi_{ij} = 1$ ，那么就可以如图12-1-6那样把 $\psi_{ij} = 4$ 分配给同一网络。这就说明，我们所能分配的流 ψ_{ij} 的数量是根据流的分配方式决定的。另一方面，如果一个EWC网由有限条边组成，并且每条边的容量是有限的，那么我们知道，只能给它分配有限的流量。因此从顶点 i 到顶点 j 所分配的流必定有一个最大值，这个最大流称为从 i 到 j 的端限容量 (terminal capacity)，记为 t_{ij} 。

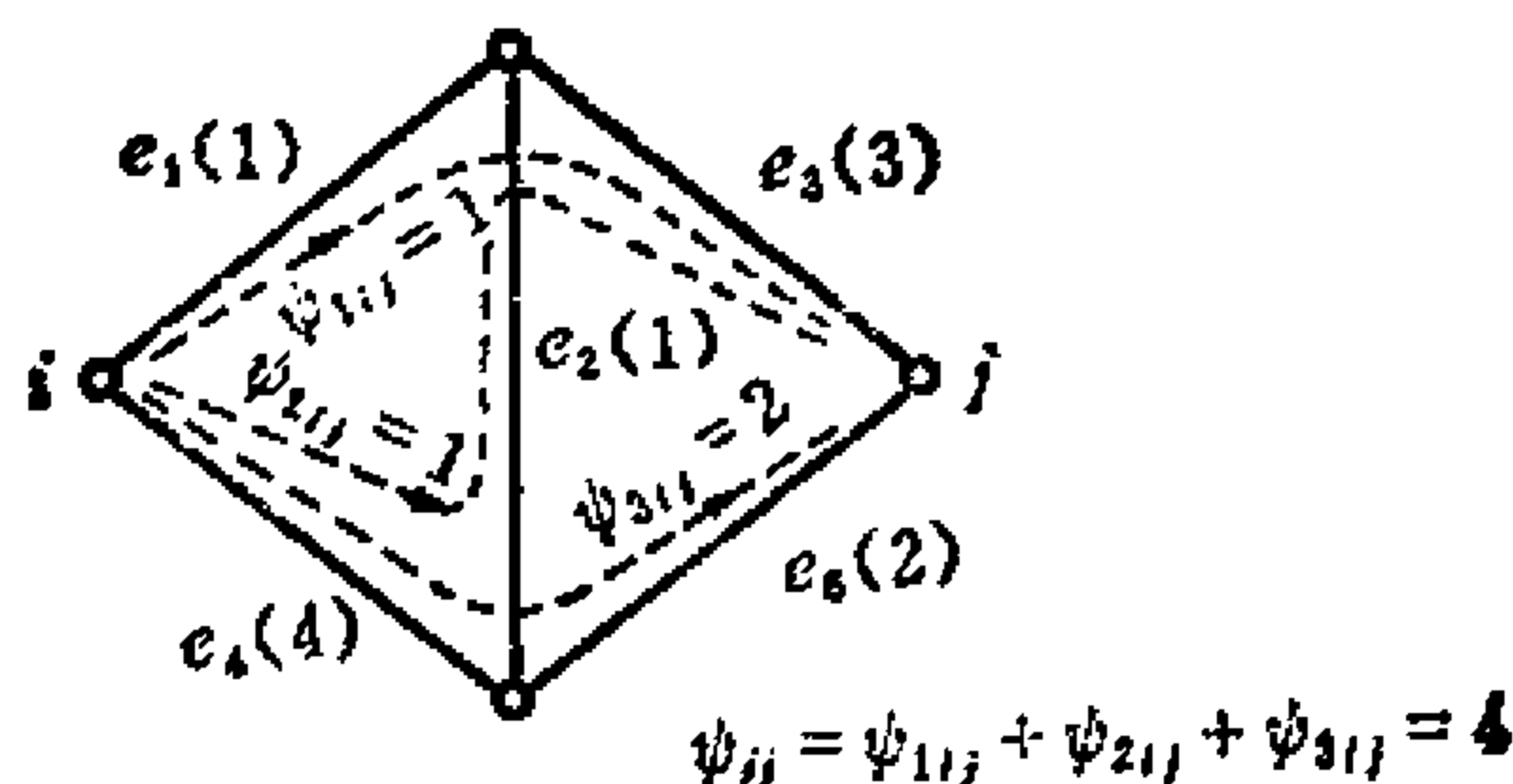


图12-1-6 把 $\psi_{ij} = 4$ 分配给一个EWC网

定义12-1-5 一个EWC网 G 的端限容量 t_{ij} 就是所能分配给 G 的从 i 到 j 的最大流。

假定一个流 ψ_{ij} 可以分配给一个EWC网 G ，并且假设 ψ_{ij} 就是最大流。也就是说， ψ_{ij} 等于从 i 到 j 的端限容量 t_{ij} 。那么，任何一个满足 $\psi'_{ij} \leq \psi_{ij}$ 的流 ψ'_{ij} 都可以分配给 G ，这是因为对于 $r=1, 2, \dots, h$ ，把 $\psi'_{r,ij} = \alpha \psi_{r,ij}$ 分配给路径 $P_{r,ij}$ 是满足式(12-1-2)的，其中

$$\alpha = \frac{\psi'_{ij}}{\psi_{ij}} \quad (12-1-8)$$

且

$$\psi_{ij} = \sum_{r=1}^h \psi'_{r,ij} \quad (12-1-9)$$

因此，知道一个EWC网的端限容量 t_{ij} 是非常重要的。为了讨论端限容量，我们需要以下定义。

定义12-1-6 我们说一条边在流 ψ_{ij} 的一种分配方式下是饱和的（或称为饱和边），如果通过这条边的流等于该边的容量。

例如，图12-1-5中，在流 ψ_{ij} 的这种分配方式下，边 e_1 和 e_2 是饱和的。图12-1-6中，边 e_1, e_2 和 e_5 都是饱和的。

定义12-1-7 在流 ψ_{ij} 的一种分配方式下，如果割集 S 由饱和

边组成，那么就称 S 为饱和割集。

例如，在图12-1-6中，边 e_1, e_2 和 e_5 是饱和的。因此 $S = (e_1, e_2, e_5)$ 在流 ψ_{ij} 的这种分配方式下是饱和割集。我们选择饱和割集的定向为割集中一条边上一个流的方向。注意，分配给一条边的几个流的方向可能不尽相同。

考虑图 12-1-7 中的EWC网。在边 e_2 中有两个方向相反的流，取其中的一个（比如说 ψ_1 ），作为割集 S 的定向，我们可以说，边 e_1 中流的方向与 S 的定向不一致。同样，我们可以看出，边 e_5 中流的方向与 S 的定向也不同。

定义12-1-8 如果一条边是饱和的，并且这条边中所有的非零流都是同方向（定向）的，我们就说这条边是一条基本饱和边。

例如，在图 12-1-7 中，边 e_2 是饱和的，但非基本饱和边。而 e_1 和 e_5 是基本饱和边。

定义12-1-9 当一个饱和割集中的所有边都是基本饱和边，且割集的定向与割集中每条边上的非零流方向一致时，就称此割集为基本饱和割集。

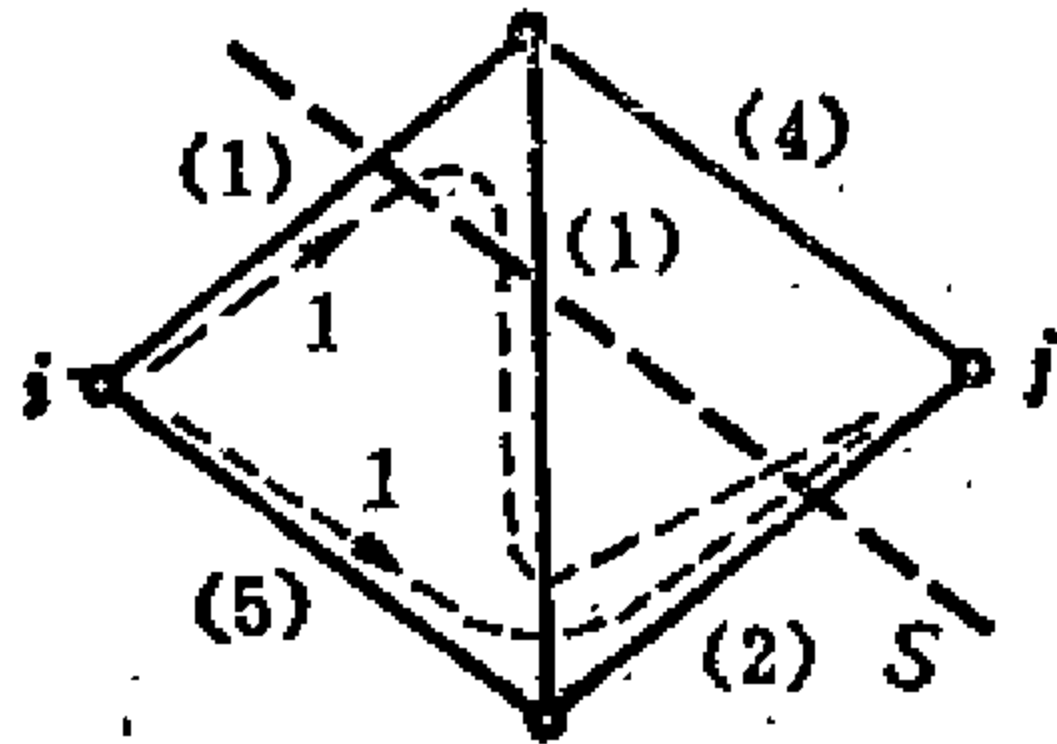


图12-1-8 饱和割集 S

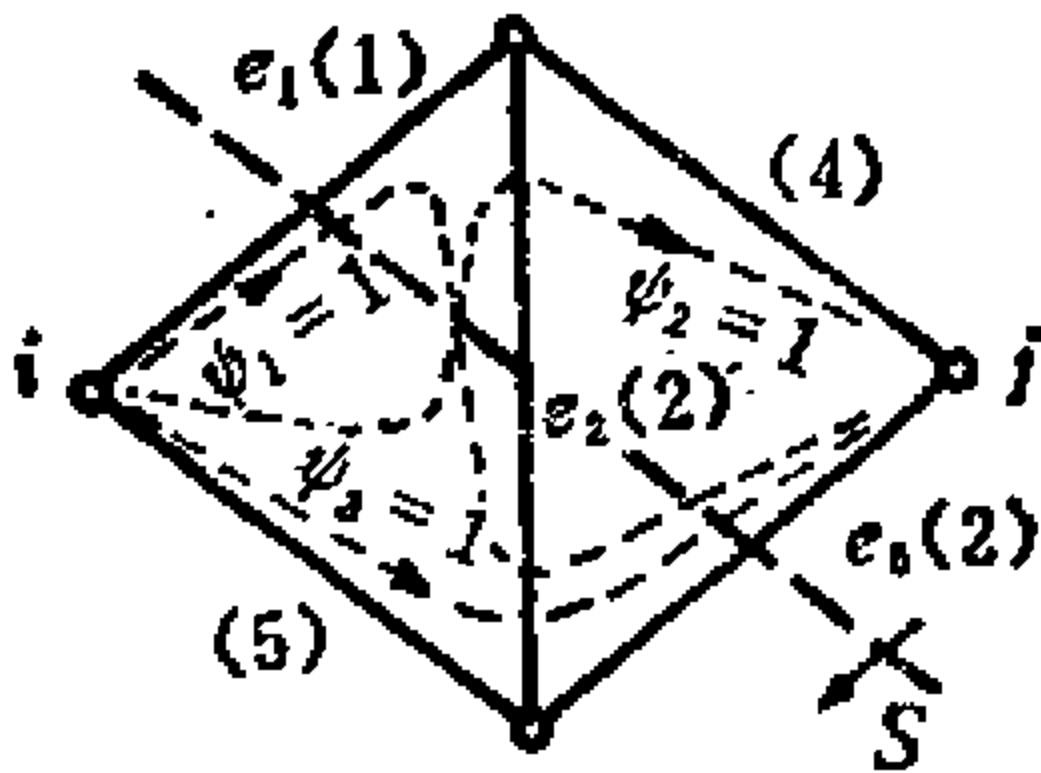


图12-1-7 一个EWC网，当 $\psi_{ij} = 3$ 时包含一个饱和割集 S

显然，图12-1-7中的 S 不是基本饱和割集；同样，图12-1-8中的饱和割集 S 也不是基本饱和割集；而图12-1-6中饱和割集 (e_1, e_2, e_5) 是基本饱和割集。

考虑图 12-1-9 所示的

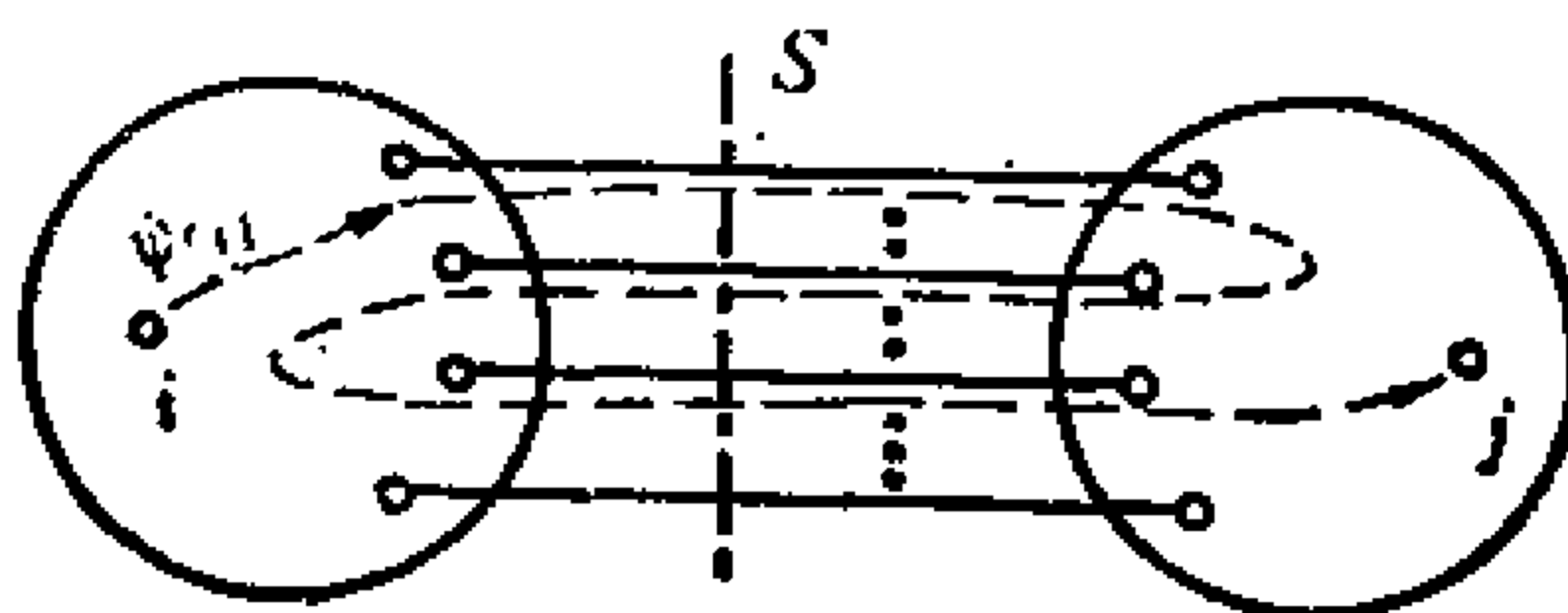


图12-1-9 饱和割集和流

EWC 网, S 是一个饱和割集, 但非基本饱和割集。容易看出, 存在一条从 i 到 j 的路径 P_{ij} , 分配给它的非零流为 ψ_{ij} , 并且这条路径至少包含割集 S 中的三条边, 如图所示, 另一方面, 如果 S 是一个基本饱和割集, 则每一条从 i 到 j 的路径 P_{ij} (分配给它的非零流为 ψ_{ij}) 必定恰包含 S 的一条边, 如图12-1-10所示。

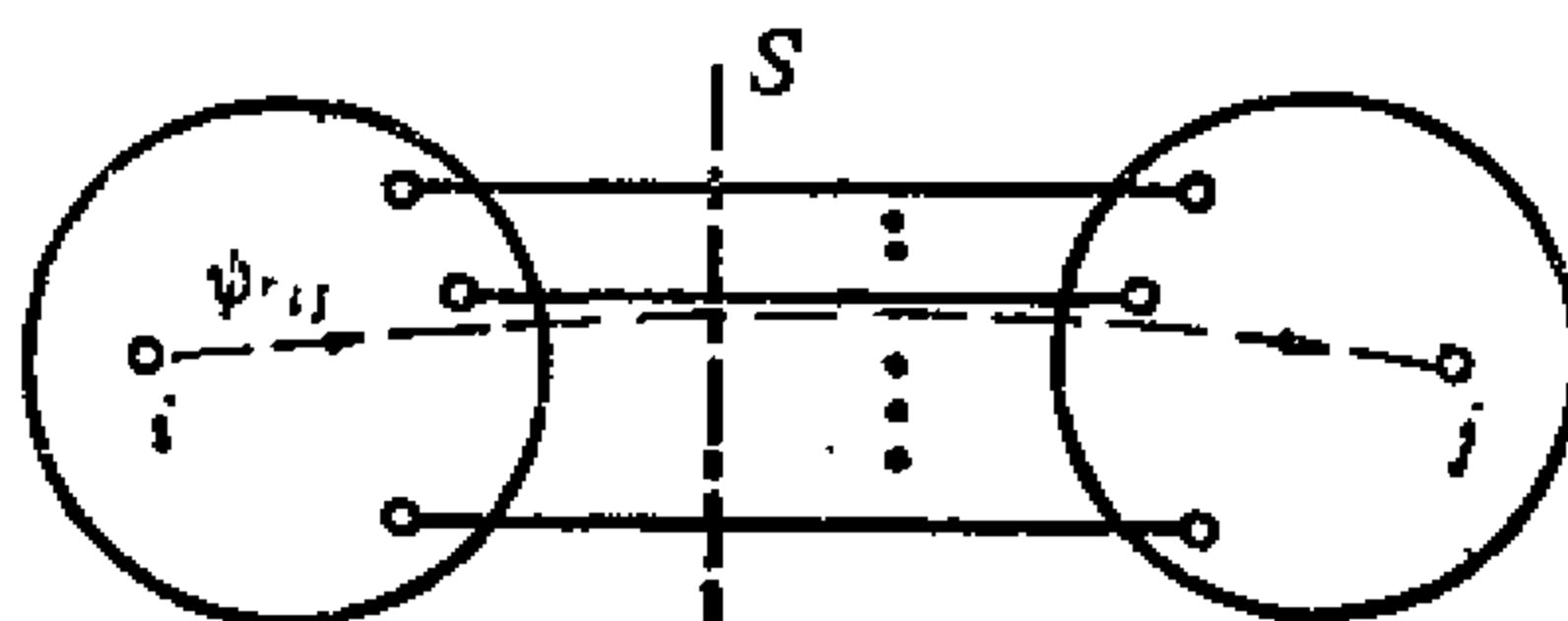


图12-1-10 基本饱和割集与流

在把最大流和基本饱和割集联系起来之前, 我们来研究饱和割集的存在对分配附加流的影响。

引理12-1-1 对 EWC 网采用了分配流 ψ_{ij} 的一种方式之后, 若不存在饱和割集, 则从 i 到 j 的附加流是可以分配的。

证明: 因为不存在饱和割集, 如果我们在 EWC 网中把每条边 e_r 的容量 c_r 变成 $c'_r = c_r - \psi(e_r)$, 其中 $\psi(e_r)$ 是已给边 e_r 的总流, 并删去新容量 c'_r 为零的边, 那么在所得的网络中一定至少存在一条从 i 到 j 的路径 P_{ij} , 否则必有一个饱和割集。因为路径 P_{ij} 中

每条边的每个边容量非零，所以我们可以分配一个非零流给这条路径，其中

$$\psi'_{ij} \leq \min \{c'_r : e_r \in P_{ij}\} \quad (12-1-10)$$

(证毕)

根据引理12-1-1，如果不能对一个EWC网 G 分配任何更多的流 ψ'_{ij} ，那么我们就知道，至少存在一个分离顶点 i 和 j 的饱和割集。

下面是一个关于最大流的重要定理。

定理12-1-1 对有限条边的EWC网 G 采用了流 ψ_{ij} 的一种分配方式之后，若存在一个饱和割集但非基本饱和割集，则

$$\psi_{ij} < t_{ij} \quad (12-1-11)$$

注意 t_{ij} 是从 i 到 j 的端限容量，它等于从 i 到 j 的最大流。

证明： 因为 G 的边数是有限的，故 G 中的割集数也是有限的。设 $\{S_q(i; j)\}$ 是所有分离 i 和 j 的割集的集合；又设由 $\underline{S}_1, \underline{S}_2, \dots, \underline{S}_k$ 组成的 $\{\underline{S}_{q'}(i; j)\}$ 是 $\{S_q(i; j)\}$ 中在 ψ_{ij} 的一种分配方式下所有饱和割集的集合。则我们可以看出，在 $\{\underline{S}_{q'}(i; j)\}$ 中存在一个最接近顶点 j 的(割集) \underline{S}_c 。也就是说，如果 $\underline{S}_{q'} = \mathcal{O}(\Omega_{q'} \times \bar{\Omega}_{q'})^*$ ， $q' = 1, 2, \dots, c, \dots, k$ ，其中 $j \in \bar{\Omega}_{q'}$ ，那么对所有的 q' ，有 $\bar{\Omega}_c \subset \bar{\Omega}_{q'}$ 。

考虑图12-1-11所示的EWC网 G ， \underline{S}_c 由边 e_1, e_2, \dots, e_r 组成，它是最接近顶点 j 的。则在 $\{\underline{S}_{q'}(i; j)\}$ 中的饱和割集没有一个包含 g_{ci} 的边，其中 g_{ci} 的顶点即为 $\bar{\Omega}_c$ 中的顶点。并注意到 g_{ci} 和 g_{cj} 是从 G 删去 \underline{S}_c 中所有边后得到的一对子图。

因为 \underline{S}_c 是饱和割集，但非基本饱和割集，故存在一条路径 P_{ij} ，它包含 \underline{S}_c 中一条以上的边，且对它分配了非零流 $\psi_{r,ij}$ 。不失一般性，设边 e_1 是从 i 到 j 的路径 P_{ij} 的边列中所出现的 \underline{S}_c 的第

* 见定义2-2-4和5-1-1。

一条边，如图12-1-11所示。设 v_1 和 v_1' 是边 e_1 所联的端点，并设 v_1 属于 g_{ci} 。因为在 g_{cj} 中没有分离顶点 v_1' 和 j 的饱和割集，所以我们可以找出一条从 v_1' 到 j 的路径 P' ，因而从 v_1 到 j 可以给它分配非零流 δ 。

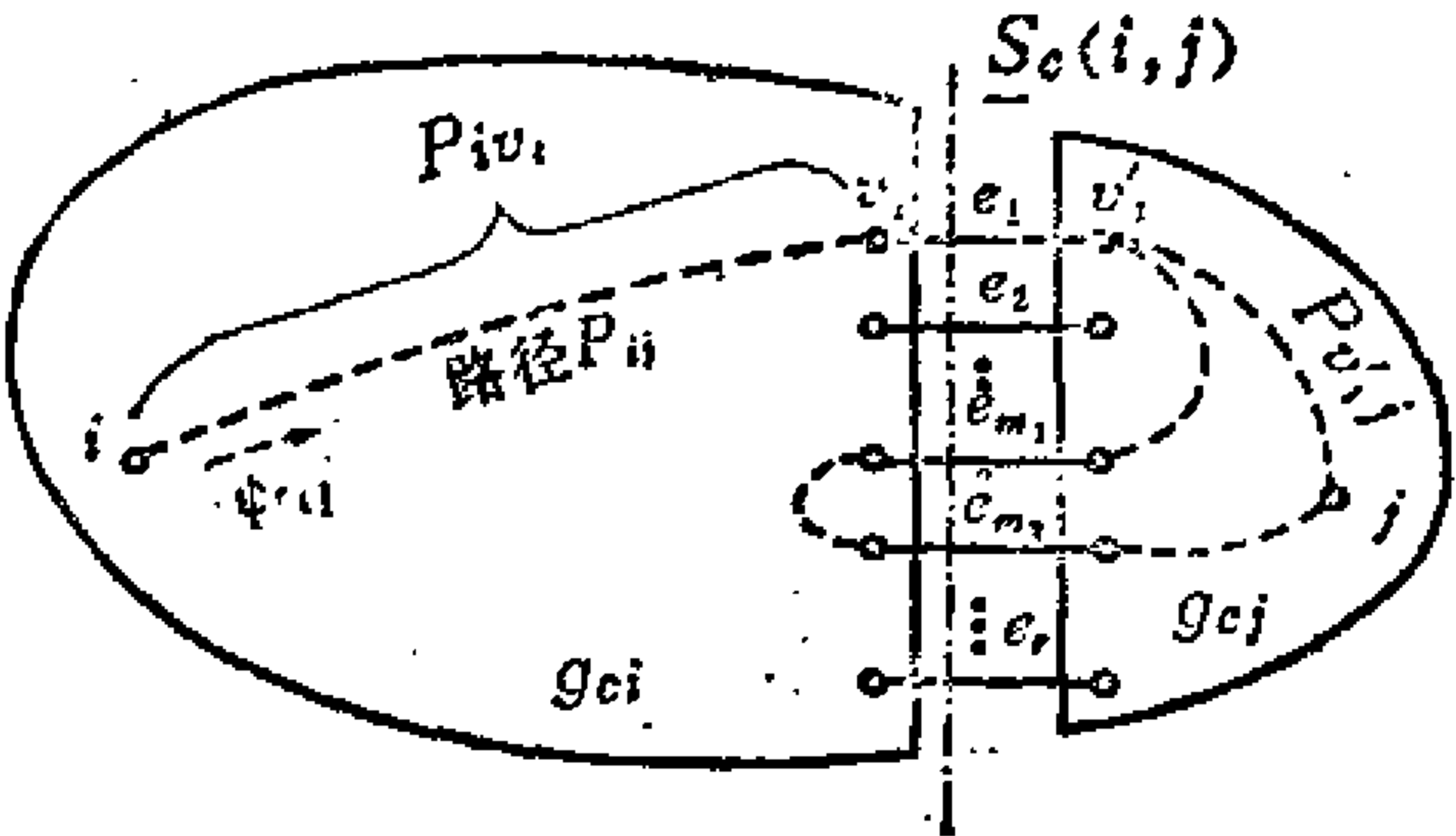


图12-1-11 EWC网 G 及 $\underline{S}_c(i, j)$

如果我们不把 $\psi_{r_{ij}}$ 分配给 P_{ij} ，而把 $(\psi_{r_{ij}} - \delta)$ 分配给 P_{ij} ，并把 δ 分配给路径 $P'_{ij} = P_{i v_1} \cup (e_1) \cup P_{v_1' j}$ ，其中 $P_{i v_1}$ 是从 i 到 v_1 的路径，它是 P_{ij} 的一部分，如图12-1-11所示。这样，我们正好就得到从 i 到 j 的同样数量的流，也就是 ψ_{ij} 。但是，因为对 $P_{ij} \cap \underline{S}_c$ 中（除 e_1 外）的边所分配的流都减少了 δ ，所以 \underline{S}_c 不再是饱和割集。只要选择充分小的 δ ，仍不会产生任何新饱和割集。因此，对流 ψ_{ij} 的这种新的分配方式最多给出 $k-1$ 个饱和割集。

我们可以重复这个过程，直到在流 ψ_{ij} 的一种分配方式下，不再有饱和割集。若不再有饱和割集，则我们可以根据引理12-1-1，分配附加的流。因此， ψ_{ij} 就不是给定EWC网所能分配到的从 i 到 j 的最大流。

(证毕)

由定理12-1-1，我们可以得到以下定理。

定理12-1-2 当且仅当 ψ_{ij} 的一种分配方式至少产生一个分离 i 和 j 的基本饱和割集时,

$$\psi_{ij} = t_{ij} \quad (12-1-12)$$

证明: 考虑任一分离 i 和 j 的割集,如图12-1-10所示。则我们可以看出,流 ψ_{ij} 一定通过割集中的边。因此从顶点 i 到顶点 j 所能输送的最大流量不可能超过割集中所有边的边容量之和。因为这个结论对任何分离 i 和 j 的割集都是对的,所以它对分离 i 和 j 的基本饱和割集也是对的。并且,通过一个基本饱和割集的总流等于这个割集中所有边的边容量之和,故式(12-1-12)为真。这样就由定理12-1-1给出了这个定理的证明。

(证毕)

定义12-1-10 割集 S 的值是指 S 中所有边的边容量之和,用 $V[S]$ 表示。

考虑分离顶点 i 和 j 的所有割集的集合 $\{S_q(i;j)\}$ 。注意,对 $\{S_q(i;j)\}$ 中任一割集 S 来说, $V[S]$ 不可能小于最大流 ψ_{ij} 。如果流 ψ_{ij} 的一种分配方式产生了一个基本饱和割集 S' (它分离 i 和 j),那么 S' 在 $\{S_q(i;j)\}$ 内。分配给基本饱和割集 S' 中边流之和必定等于 ψ_{ij} 。因此我们可以根据定理12-1-2的结果得出结论。

定理12-1-3 (最大流-最小割定理)对于一个EWC网,

$$t_{ij} = \min \{V[S]; S \in \{S_q(i;j)\}\} \quad (12-1-13)$$

例12-1-2 考虑图12-1-12中的EWC网。分离1和2的割集集合是

$$\{(a,b), (a,c,e), (b,c,d), (d,e)\}$$

因此

$$\begin{aligned} t_{12} &= \min \{V[a,b], V[a,c,e], V[b,c,d], V[d,e]\} \\ &= \min \{7, 6, 10, 7\} = 6 \end{aligned}$$

假定由 ψ_{ij} 的两种分配方式得到了分离顶点 i 和 j 的两种不同的基本饱和割集的集合 $\{S'_q(i; j)\}$ 和 $\{S''_q(i; j)\}$ ，并令 ψ'_{ij} 是一种分配方式，而 ψ''_{ij} 是另一种方式。设 $\sum_{(r)} \psi'_{r,ij} = \psi'_{ij}$ ，其中 $\psi'_{r,ij}$ 是分配给路径 $P_{r,ij}$ 的，设 $\sum_{(r)} \psi''_{r,ij} = \psi''_{ij}$ ，其中 $\psi''_{r,ij}$ 是分配给路径 $P_{r,ij}$ 的， $r=1,2,\dots,k$ 。注意 $\psi'_{r,ij}$ 或 $\psi''_{r,ij}$ 可以为零。如果我们不分配 $\psi'_{r,ij}$ 给 $P_{r,ij}$ ，也可以分配 $a\psi'_{r,ij} + (1-a)\psi''_{r,ij}$ 给路径 $P_{r,ij}$ ， $r=1,2,\dots,k$ ，其中 $0 < a < 1$ 。这种分配方式也给出从 i 到 j 的相同的流。在这样的分配下， $\{S'_q(i; j)\}$ 中任一割集 S'_q 不再是基本饱和割集，除非这个割集同时也是 $\{S''_q(i; j)\}$ 中的基本饱和割集。因此，据定理12-1-2，要使 ψ'_{ij} 和 ψ''_{ij} 两者都给出从 i 到 j 的最大流，必有 $\{S'_q(i; j)\} \cap \{S''_q(i; j)\} \neq \phi$ 。同理，可以证明在所有的集合 $\{S_p(i; j)\}$ 中，至少有一个割集是公共的，其中 $\{S_p(i; j)\}$ 是在从 i 到 j 的最大流的一种分配方式下产生的分离 i 和 j 的基本饱和割集的集合， $p=1,2,\dots$ 。这个公共割集称为对应于 t_{ij} 的割集，或 t_{ij} 的对应割集。例如，图12-1-12中的割集 (a, c, e) 就是 t_{ij} 的对应割集。对于下一节要讨论的端限容量之间的关系来说，端限容量的对应割集是非常重要的。

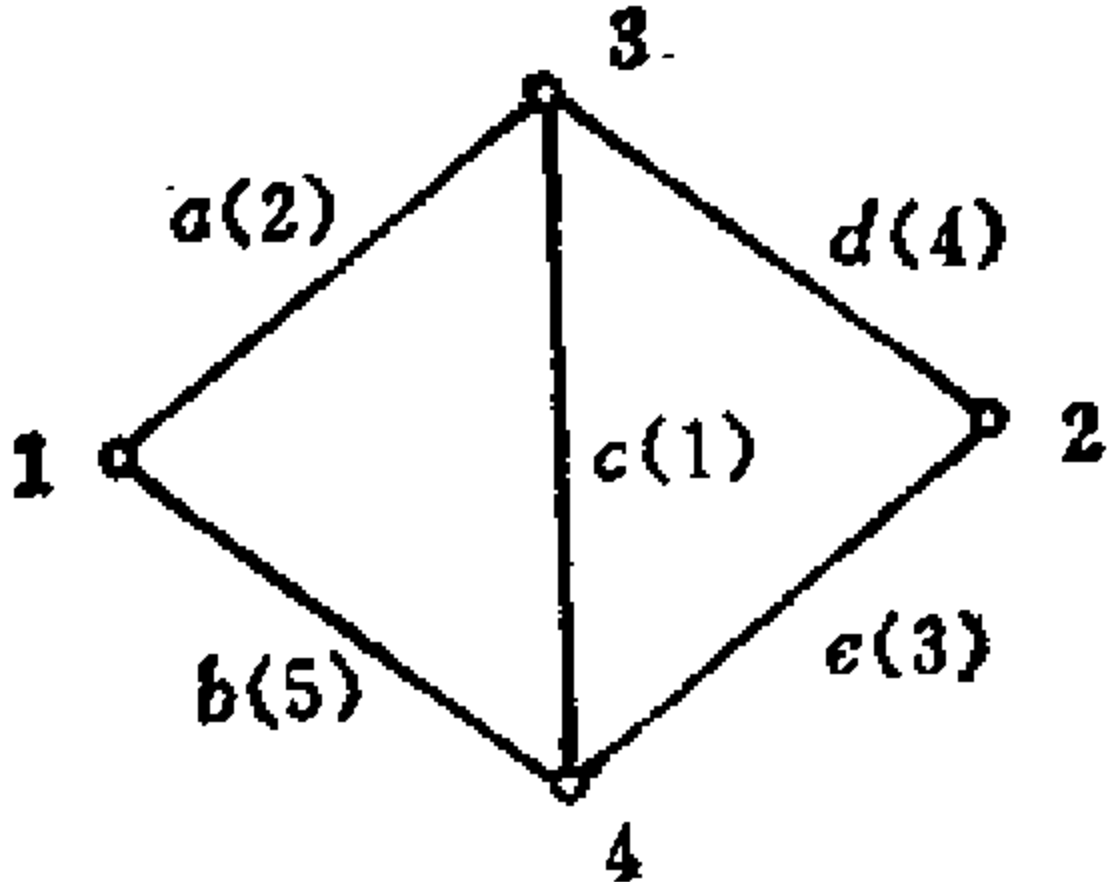


图 12-1-12 一个EWC网

12-2 无向EWC网的端限容量矩阵

确定一个EWC网的方法之一是给出这个网的所有可能的顶点对之间的端限容量。这可以由一个称为端限容量矩阵的矩阵

$T = [t_{ij}]$ 来作到。

定义12-2-1 EWC网 G 的端限容量矩阵 $T = [t_{ij}]$ 是一个方阵，它的第 i 行和第 i 列表示顶点 i ，它的元素 t_{ij} 为

t_{ij} = 从 i 到 j 的端限容量（当 $i \neq j$ 时）

$t_{ii} = d$ （对所有的 i ） (12-2-1)

对于一个 EWC 网，这个定义中的 d 可以是任意的，除非我们对从顶点 i 到它自身的端限容量赋予了某种意义。有时候，定义 d 为零可能要简便些。记号 d 是 diagonal entry（对角元）的第一个字母。

例12-2-1 考虑图 12-1-12 中的 EWC 网 G 。我们已经知道 $t_{12} = 6$ 。其余的端限容量是

$$t_{13} = \min \{V[a, b], V[a, c, e], V[a, c, d]\} = 6$$

$$t_{14} = \min \{V[a, b], V[b, c, d], V[b, c, e]\} = 7$$

$$t_{23} = \min \{V[d, e], V[b, c, d], V[a, c, d]\} = 7$$

$$t_{24} = 6$$

$$t_{34} = 6$$

因此 G 的端限容量矩阵 T 为

$$T = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & d & 6 & 6 & 7 \\ 2 & 6 & d & 7 & 6 \\ 3 & 6 & 7 & d & 6 \\ 4 & 7 & 6 & 6 & d \end{array}$$

为了讨论 EWC 网的端限容量矩阵的性质，我们定义矩阵的主分块如下。

定义12-2-2 设 M 是一个方阵，其中每一个对角元均为 d ，每一个非对角元都是实数。 M 的一个分块

$$M = \begin{bmatrix} M_a & M_c \\ M_d & M_b \end{bmatrix} \quad (12-2-2)$$

称为主分块，如果：(1) M_c 中每一个元素是相同的，并且是除 d 外 M 中的最小数；(2) M_a 和 M_b 都是方子阵，其中每一个对角元都是 d 。 M_a 和 M_b 称为由 M 的主分块划分得到的结果主子阵。

这一节中所讨论的 EWC 网都是无向的，我们可以看出， $t_{ij} = t_{ji}$ ，因此端限容量矩阵 T 是对称的。为了研究端限容量矩阵的性质，我们回忆上节所讨论的：对于每一个端限容量 t_{ij} ，存在一个分离 i 和 j 的对应割集 S_1 ，并且它的值等于 t_{ij} 。设

$$S_1 = \mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1) \quad (12-2-3)$$

因为 S_1 是 t_{ij} 的对应割集，故 $i \in \Omega_1$ ， $j \in \bar{\Omega}_1$ 。假定 t_{ij} 是 EWC 网 G 的所有端限容量中最小的一个，那么对于 Ω_1 中任一顶点 p 和 $\bar{\Omega}_1$ 中任一顶点 q ， $t_{pq} = t_{ij}$ ，这是因为根据式 (12-1-13)

$$t_{pq} = \min \{V[S]; S \in \{S(p; q)\}\} \quad (12-2-4)$$

又因为 S_1 分离 p 和 q ，所以 S_1 是式 (12-2-4) 中的一个割集。此外， S_1 是 t_{ij} 的对应割集，而 t_{ij} 根据假设是 G 中最小的端限容量， $V[S_1]$ 也在所有分离 p 和 q 的割集的值中是最小的，因此 $t_{pq} = t_{ij}$ 。于是，经过行列调整，式 (12-2-2) 所示的端点容量矩阵的主分块划分是可能的：

$$T = \begin{bmatrix} T_a & T_1 \\ T_1^t & T_b \end{bmatrix} \quad (12-2-5)$$

其中， T_a 由对应于 Ω_1 中的顶点的行和列组成， T_b 由对应于 $\bar{\Omega}_1$ 中的顶点的行和列所组成，并注意 T_1 中每一个 (r, s) 元素表示端限容量 t_{rs} 。为此 T_1 中每个元素等于 t_{ij} 。

设 $t_{i'j'}$ 是结果主子阵 T_a 和 T_b 中最小的元素。不失一般性，设 $t_{i'j'}$ 在 T_a 中。设

$$S_2 = \mathcal{E}(\Omega_2 \times \bar{\Omega}_2) \quad (12-2-6)$$

是 $t_{ij'}$ 的对应割集。则任一端点容量 t_{uv} , $u \in (\Omega_2 \cap \Omega_1)$, $v \in (\bar{\Omega}_2 \cap \Omega_1)$, 一定等于 $t_{ij'}$, 这是因为, 分离 u 和 v 的割集类中包含 S_2 , 而据假设, S_2 的值在这一类的所有割集的值中是最小的。现在, T_r 的主分块有可能为

$$T = \begin{bmatrix} T_{aa} & T_{a1} & \\ T_{a1}^t & T_{ab} & \\ & T_1^t & T_b \end{bmatrix} \quad (12-2-7)$$

其中 T_{aa} 由对应于 $\Omega_2 \cap \Omega_1$ 中顶点的行和列组成, T_{ab} 由对应于 $\bar{\Omega}_2 \cap \Omega_1$ 中顶点的行和列组成。这样, T_{a1} 的诸元素是相同的, 并且在 T_r 的所有元素中是最小的。

类似地, 我们可以挑选一个端限容量, 它在结果主子阵 T_{aa} , T_{ab} 和 T_b 的所有元素中是最小的, 使得我们可以应用主分块划分法。如此类推, 直至所有的结果主子阵都只有一个元素为止。这个性质也是一个矩阵为端限容量矩阵的充分条件。

定理12-2-1 一个 n_r 阶的对称矩阵 T 是一个无向 EWC 网的端限容量矩阵, 当且仅当我们可以得到这个矩阵的一个主分块, 以及所有包含一个以上元素的结果主子阵的主分块。

证明: 从上面的讨论我们知道, 矩阵 T 必然具有定理给出的性质, 所以我们只需证明定理条件的充分性即可。即存在一种求出矩阵 T 的主分块, 以及所有包含一个以上元素的结果主子阵的主分块的方法。现在, 我们要证明, 存在一个无向 EWC 网, 它的端限容量矩阵就是所给的矩阵 T 。从主分块的定义可以看出, 当对矩阵 T_r 作主分块划分时, 即

$$T_r = \begin{bmatrix} T_{ra} & T_{r1} \\ T_{r1}^t & T_{rb} \end{bmatrix} \quad (12-2-8)$$

就是把与 T_r 的行对应的顶点集合分成两个集合，一个由与 T_{r+1} 的行对应的顶点组成，另一个由与 T_{r+2} 的行对应的顶点组成。因此，对于所给矩阵 T 所施行的一系列主分块划分，直至所有结果主子阵仅由对角元 d 组成，于是我们得到一个顶点集合类的序列。设这个集合类的序列是 $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{n-1}$ 。例如，对于已知矩阵 T

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} d & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d & 3 & 2 \\ 1 & 3 & d & 2 \\ 1 & 2 & 2 & d \end{bmatrix} \end{matrix}$$

可以施行以下一系列主分块划分：

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} d & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d & 3 & 2 \\ 1 & 3 & d & 2 \\ 1 & 2 & 2 & d \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} d & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d & 3 & 2 \\ 1 & 3 & d & 2 \\ 1 & 2 & 2 & d \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} d & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d & 3 & 2 \\ 1 & 3 & d & 2 \\ 1 & 2 & 2 & d \end{bmatrix} \end{matrix}$$

因此，顶点集合类序列是：

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \{(1, 2, 3, 4)\}, \quad \Gamma_1 = \{(1), (2, 3, 4)\}, \\ \Gamma_2 &= \{(1), (2, 3), (4)\}, \quad \Gamma_3 = \{(1), (2), (3), (4)\} \end{aligned}$$

显然， Γ_k 里恰有两个集合不在 Γ_{k-1} 中，而 Γ_{k-1} 里恰有一个集合不在 Γ_k 中。我们把 Γ_k 里的这两个集合称为生成集，而把 Γ_{k-1} 里不在 Γ_k 中的一个集合称为生成元。于是，我们可以这样说，除 Γ_0 和 Γ_{n-1} 外，在每一类 Γ_k 中，存在一个生成元和两个生成集，而 Γ_0 是由一个生成元组成的， Γ_{n-1} 不含生成元。对于每一对生成集，就存在一组相同的端限容量，它们是从这两个生成集之一

的顶点到另一个顶点的。这些相同的端限容量就是由主分块划分而得到的两个子矩阵的全部元素。我们称这些端限容量中的任何一个为 Γ_p 的两个生成集的对应端限容量, $p=1, 2, \dots, n_s-1$ 。例如, 在上面给出的 Γ_1 中, 集合(1)和(2, 3, 4)是生成集, 它们的对应端限容量是1。在 Γ_2 中, (2, 3)和(4)是生成集, 它们的对应端限容量是2。在 Γ_3 中, (2)和(3)是生成集, 它们的对应端限容量是3。

现在, 我们就可以给出一个构造 EWC 网的方法了。这方法是从给定矩阵出发的, 它要利用到 $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{n_s-1}$ 这一顶点集合类的序列, 并须注意 n_s 是所给矩阵的列数。

设 Ω_{11} 和 Ω_{12} 是 Γ_1 的两个生成集。然后我们将 Ω_{11} 看作一个顶点而将 Ω_{12} 看作另一顶点, 并在它们之间连一条边, 其边容量等于这两个生成集的对应端限容量。其次, 设 Ω_{21} 和 Ω_{22} 为 Γ_2 中两个生成集, Ω_{11} 为 Γ_1 中的生成元。这就相当于把顶点 Ω_{11} 切割开, 使 Ω_{21} 和 Ω_{22} 这两个生成集成为两个顶点。原来连接到顶点 Ω_{11} 的边可以与这两个新顶点 Ω_{21} 和 Ω_{22} 中任何一个相连。在这两个新顶点之间, 我们连上一条边, 其边容量等于 Γ_2 中两个生成集的对应端限容量。现在, 整个步骤已经很明显了, 这就是, 把 Γ_p 中代表生成元的顶点切割成两个顶点 v_{p1} 和 v_{p2} , 用来表示 Γ_{p+1} 中的两个生成集; 然后改变原来与顶点 v_p 关联的边的连接方法, 使它与 v_{p1} 或 v_{p2} 关联, 并在 v_{p1} 和 v_{p2} 之间连一条新的边, 其边容量等于 Γ_{p+1} 中两个生成集的对应端限容量, $p=1, 2, \dots, n_s-1$ 。用这个步骤最终得到一个由 n_s-1 条边和 n_s 个顶点组成的 EWC 网。显然这个 EWC 网是一个连通的无向线图。因此, 就其结构而言, 这个 EWC 网是一个树。这意味着, 每一个割集由一条边构成, 并且容易看出, 这个 EWC 网的端限容量矩阵等于所给的矩阵。
(证毕)

例12-2-2 从一个给定矩阵

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} d & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d & 3 & 2 \\ 1 & 3 & d & 2 \\ 1 & 2 & 2 & d \end{bmatrix} \end{matrix}$$

以及上面给出的类序列 $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, 我们可以构造一个 EWC 网如下:

1. 从 $\Gamma_1 = \{(1), (2, 3, 4)\}$, 我们得到一个由一条边组成的 EWC 网, 如图 12-2-1(a) 所示, 其边容量为 (1) 和 (2, 3, 4) 的对应端限容量。

2. 从 $\Gamma_2 = \{(1), (2, 3), (4)\}$, 我们将顶点 (2, 3, 4) 切割成两个顶点 (2, 3) 和 (4), 并在这两个顶点之间添加一条边, 其边容量等于 (2, 3) 和 (4) 的对应端限容量, 如图 12-2-1(b) 所示。

3. 从 $\Gamma_3 = \{(1), (2), (3), (4)\}$, 我们将顶点 (2, 3) 切割成两个顶点 (2) 和 (3), 并在这两个顶点之间添加一条边, 其边容量等于 Γ_3 中生成集的对应端限容量。所得的 EWC 网如图 12-2-1(c) 所示, 它的端限容量矩阵等于所给的矩阵。

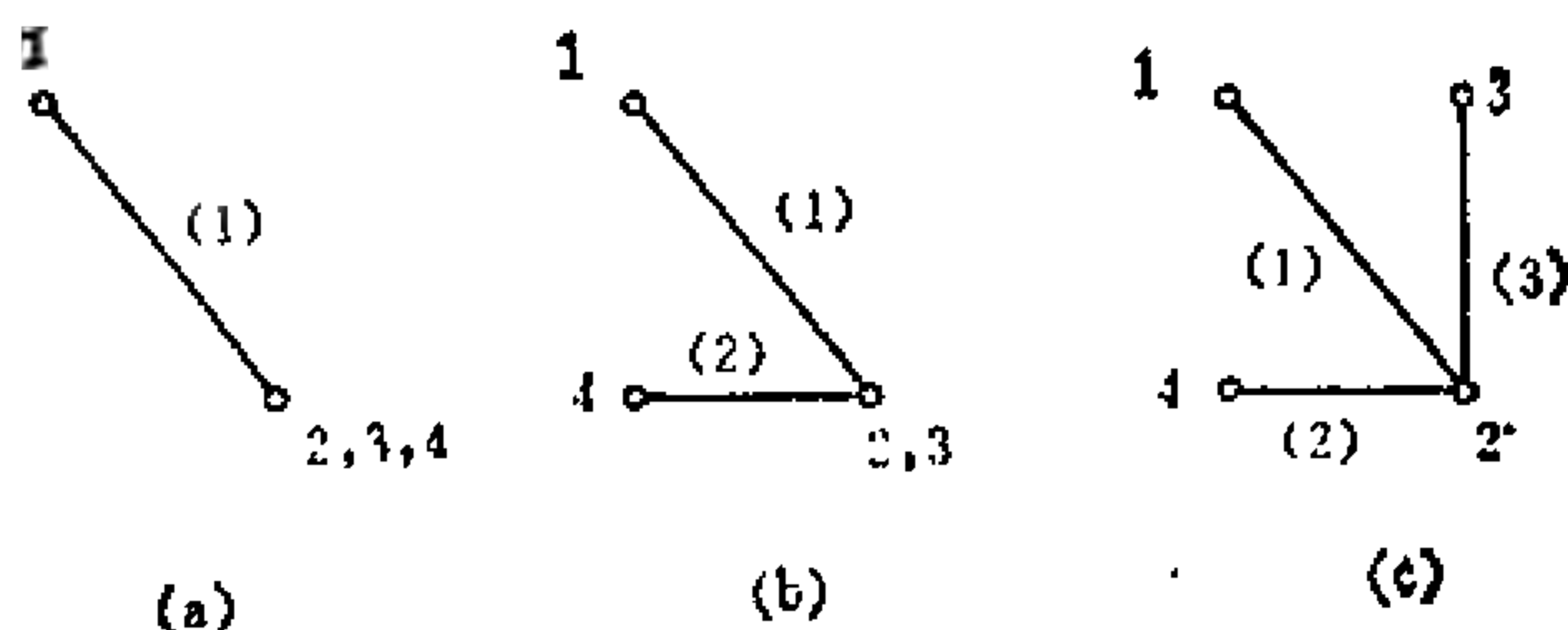


图12-2-1 构造一个EWC网

在用 Γ_p 中的生成元 Ω_p 和 Γ_{p+1} 中的生成集 Ω_a 与 Ω_b 来构造一个 EWC 网的过程中, 我们只把顶点 Ω_p 切割成两个顶点 Ω_a 和 Ω_b 。

除了切割顶点以外，如果把与顶点 Ω_p 连接的边也分成两组，我们就可以得到一个不同的EWC网。考虑图12-2-2中的顶点 Ω_p ，边 e_1, e_2, \dots, e_k 与它连接。假定我们把顶点 Ω_p 切割成两个顶点 Ω_a 和 Ω_b ，同时把边 e_q 分成 e_{q1} 和 e_{q2} ，它们的边容量等于 $c_q/2$ ，其中 c_q 是边 e_q 的边容量， $q = 1, 2, \dots, k$ ，如图12-2-3所示。

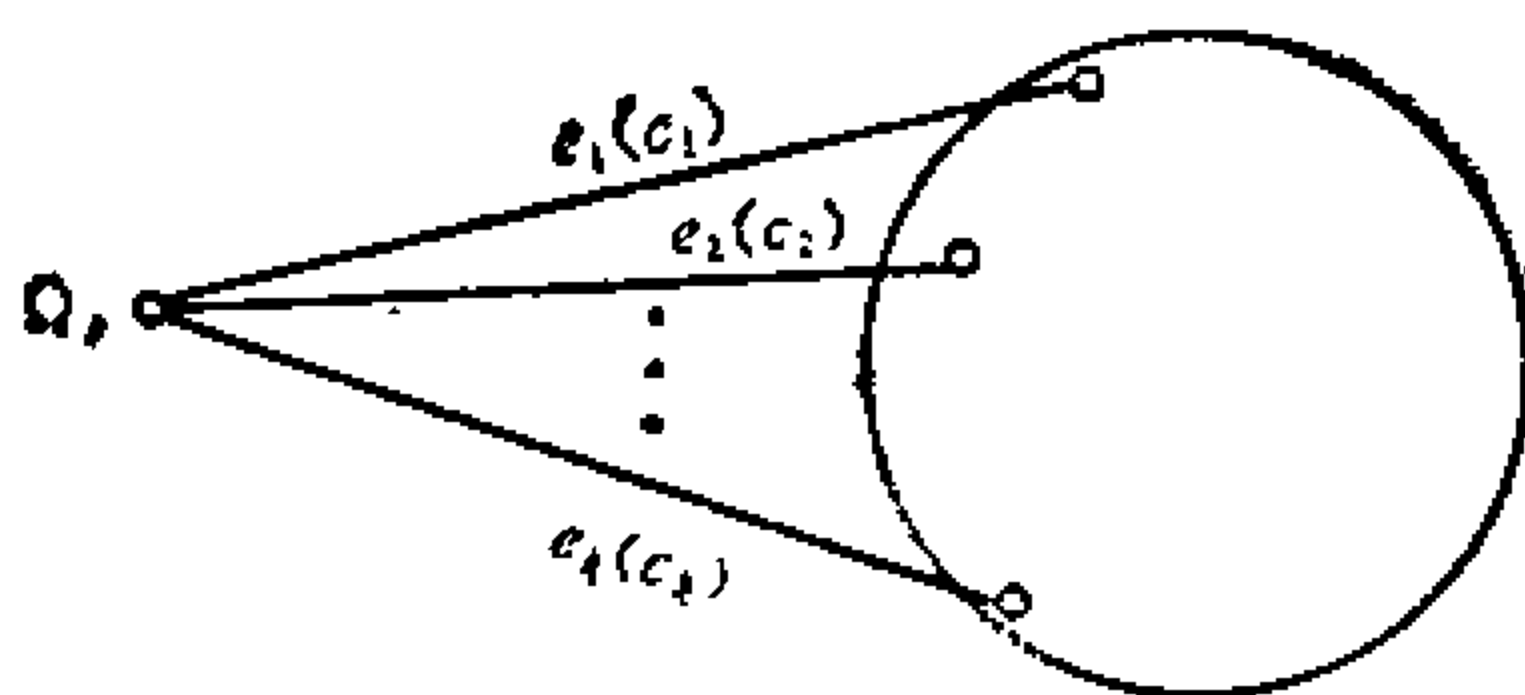


图12-2-2 一个带顶点 Ω_p 的EWC网

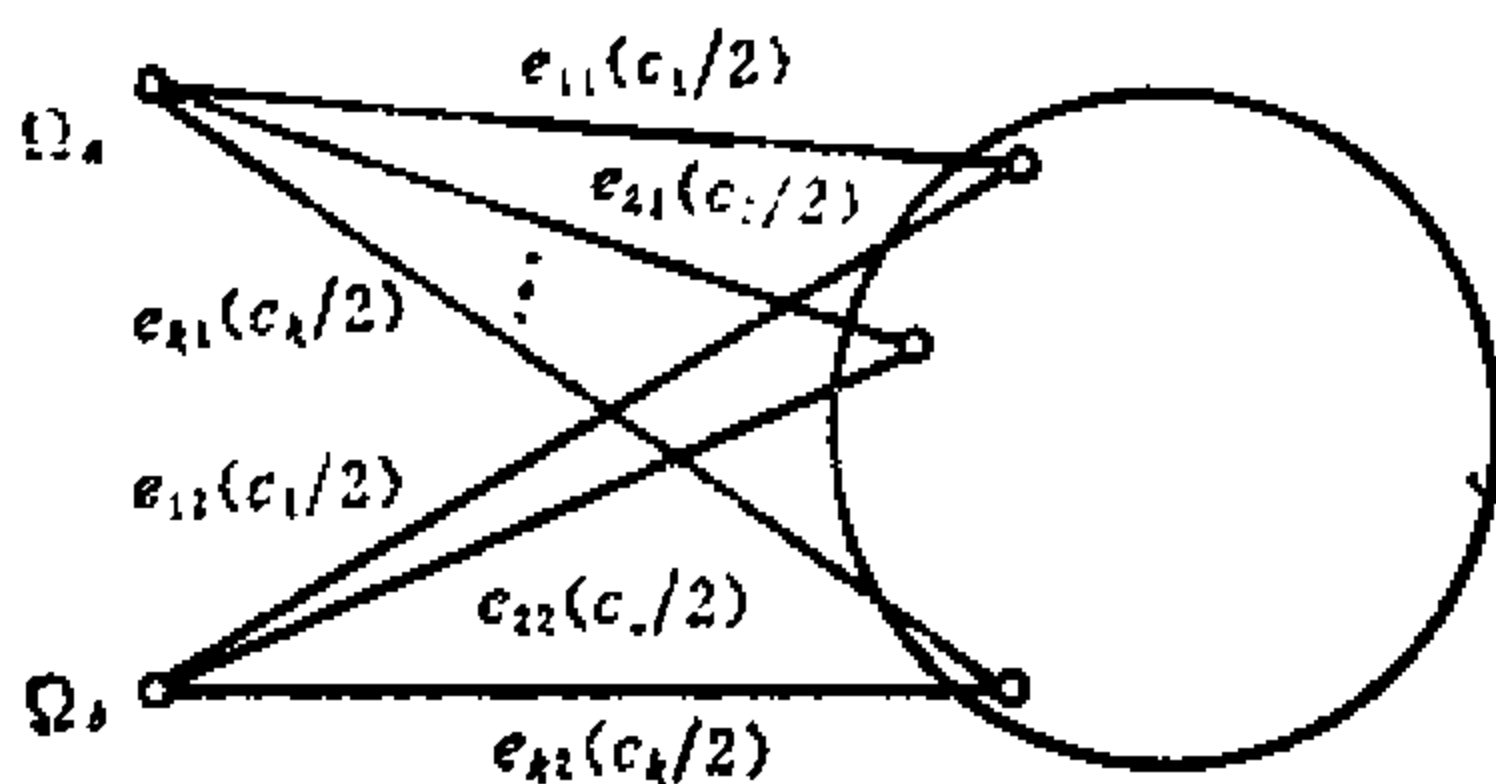


图12-2-3 一个带顶点 Ω_a 及 Ω_b 的EWC网

然后，我们在这两个新顶点之间添加一条边 e' ， e' 的边容量 c' 不等于生成集 Ω_a 和 Ω_b 的对应端限容量 t ，而等于

$$t = \sum_{q=1}^k \frac{c_q}{2}$$

例12-2-3 假定所给的矩阵就是例12-2-2中的矩阵，我们修改构造EWC网的步骤如下：

1. 在顶点(1)和(2, 3, 4)之间添加一条边 e_1 ，其边

容量等于 Γ_1 中生成集 (1) 和 (2, 3, 4) 的对应端限容量, 如图 12-2-4(a) 所示。

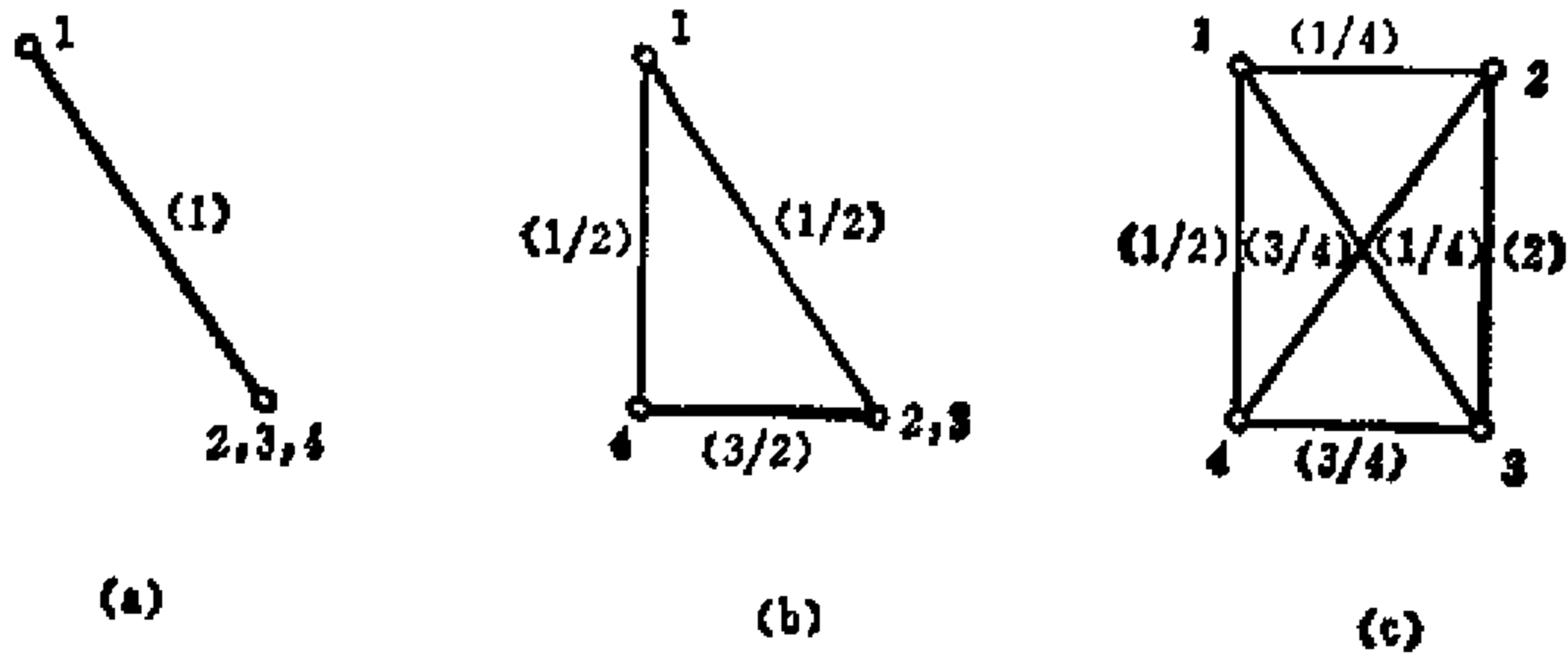


图12-2-4 构造一个EWC网的步骤

2. 把顶点 (2, 3, 4) 切割成两个顶点 (2, 3) 和 (4), 因为 Γ_2 中的生成集为 (2, 3) 和 (4)。同时把边 e_1 分成 e_{11} 和 e_{12} , 它们的边容量等于 e_1 边容量的一半。然后, 在顶点 (2, 3) 和 (4) 之间添加一条边 e_2 , 其边容量等于 (2, 3) 和 (4) 的对应端限容量减去 $1/2$, 如图 12-2-4(b) 所示。

3. 把顶点 (2, 3) 切割成两个顶点 (2) 和 (3), 同时将边 e_{12} 和 e_2 分成 e_{121} , e_{122} , e_{21} 和 e_{22} , 这些边中每一条的边容量都等于对应边的边容量的一半。然后添加边 e_3 , 其边容量等于生成集 (3) 和 (4) 的对应端限容量减去与顶点 (2) 相连的各边的边容量总和的一半, 如图 12-2-4(c) 所示。所得的结果即为一个 EWC 网, 其端限容量矩阵等于所给的矩阵。

从上面的例子我们可以看出, 可以有很多 EWC 网, 其端限容量矩阵都等于所给的矩阵。因此, 规定一些指标来表明这些 EWC 网的差别是合理的。这些指标之一是

$$I = \sum_{e_j \in G} \mathcal{W}_j c_j \tag{12-2-9}$$

其中 c_j 是边 e_j 的边容量, 求和是对传输网 G 中所有的边容量进行

的。 \mathscr{V}_p 称为边 e_p 边容量的单位价值。当 $\mathscr{V}_p=1$ （对所有的 p ）时，指标 I 变成

$$I_n = \sum_{e_p \in G} c_p \quad (12-2-10)$$

假定我们对相同端限容量矩阵的全部EWC网计算指标 I_n ，则将有一个EWC网的指标 I_n 为最小。这就意味着在考虑单位价值的条件下，这个EWC网的构造费用最低廉。找出最廉价的EWC网的一种方法是求出指标 I_n 的下界 I_0 ，并构造一个EWC网，使其指标 I_n 等于 I_0 。为此，我们定义 I_0 为

$$I_0 = \min \{ \text{所有满足给定端限容量矩阵的EWC网的 } I_n \} \quad (12-2-11)$$

为了求得 I_0 ，我们在EWC网 G 中取一个顶点 r 。设 t_{rj} 是端限容量 t_{rq} 中最大的一个（对所有的顶点 $q \neq r$ ）。因为我们可以分配一个流 ψ_{rj} ，它等于 G 中来自顶点 r 的 t_{rj} ，故

$$\psi_{rj} \leq V[S(r)] \quad (12-2-12)$$

其中 $S(r)$ 是与顶点 r 有关的关联集（见2—1节）。换句话说，为了使一个EWC网 G 能够负载流 ψ_{rj} ，与顶点 r 相连的边的边容量之和必须至少等于 ψ_{rj} 。

设 $r=1, 2, \dots, n$ 是一个EWC网的全部顶点，则我们可以看出， G 中全部边容量的和是

$$\frac{1}{2} \sum_{r=1}^n V[S(r)]$$

或者

$$I_n = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n V[S(r)] \quad (12-2-13)$$

考虑端限容量矩阵 T 。设 t_{ri} 是 T 中第 r 行最大的端限容量，则由式(12-2-12)，对任一满足 T 的EWC网就有

$$t_{ri} \leq V[S(r)] \quad (12-2-14)$$

设 I_* 定义为

$$I_* = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n t_{ri} \quad (12-2-15)$$

由式(12-2-13)和式(12-2-14), 我们可以看出, 任何一个 (满足给定端限容量矩阵 T) EWC 网的指标 I_* 不可能小于 I_0 。也就是说,

$$I_* \leq I_0 \leq I_* \quad (12-2-16)$$

假定存在一个 EWC 网 G_0 , 对于 G_0 中所有的顶点 r , 来自顶点 r 最大的端限容量 (即对于 G_0 中所有的顶点 q , t_{rq} 中最大的端限容量) 等于与顶点 r 有关的关联集 $S(r)$ 的值。故对所有的顶点 r , 式(12-2-14)变为

$$t_{ri} = V[S(r)] \quad (12-2-17)$$

于是 G_0 的 I_* 等于 I_0 。问题在于, 这样的 EWC 网是否存在。答案是肯定的。事实上, 用上面讨论的修改步骤所得的 EWC 网 G (它是一个完全图) 对于所有的顶点都能满足式(12-2-17)。这可以用如下的方法证明。首先注意到, 对于任何一个顶点 r , 在系列 $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{q-1}$ 中存在类 Γ_2 , 使得两个生成集里有一个仅由顶点 r 组成。设 Ω_q 是另一个生成集, t_q 是生成集 (r) 和 Ω_q 的对应端限容量。

现在考虑用修改的过程得到 EWC 网的步骤, 这就是, 对于网络中任一顶点 v , 就存在一个将顶点 v 从顶点集合中分离出来的步骤 q 。因此我们可以假设图 12-2-5 中的 EWC 网就是由步骤 $q-1$ 得到的网络, 其中 G_2 与生成元 Ω_{q-1} 对应。注意 $\Omega_{q-1} = (r) \cup \Omega_q$, 从而顶点 r 是在步骤 q 中从 Ω_{q-1} 中分离出来的, 如图 12-2-6 所示。为了完成步骤 q , 我们给连接在顶点 r 和集合 Ω_q 之间的边赋一个容量, 使得与顶点 r 有关的关联集

$S(r)$ 的值等于 t_q 。其余的步骤都是把集合 Ω_q 或 G_1 的顶点分开，它们都不会改变关联集 $S(r)$ 的值。

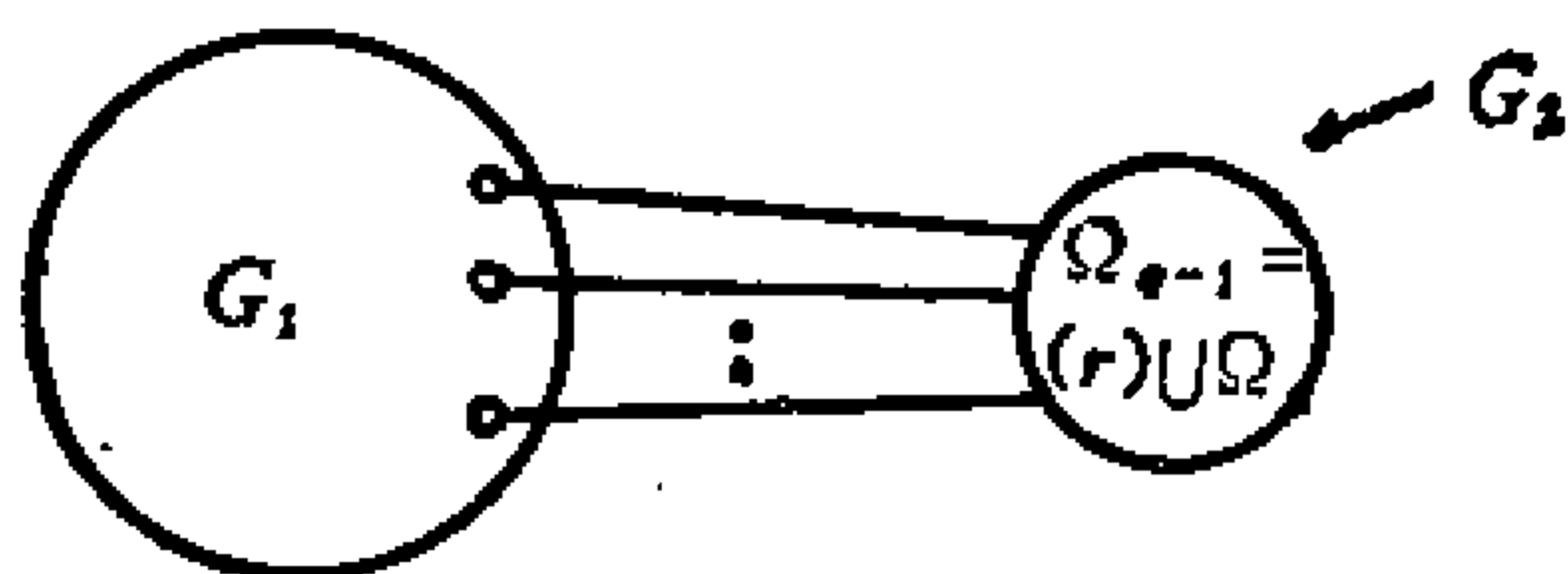


图12-2-5 在步骤 $q-1$ 时的EWC网

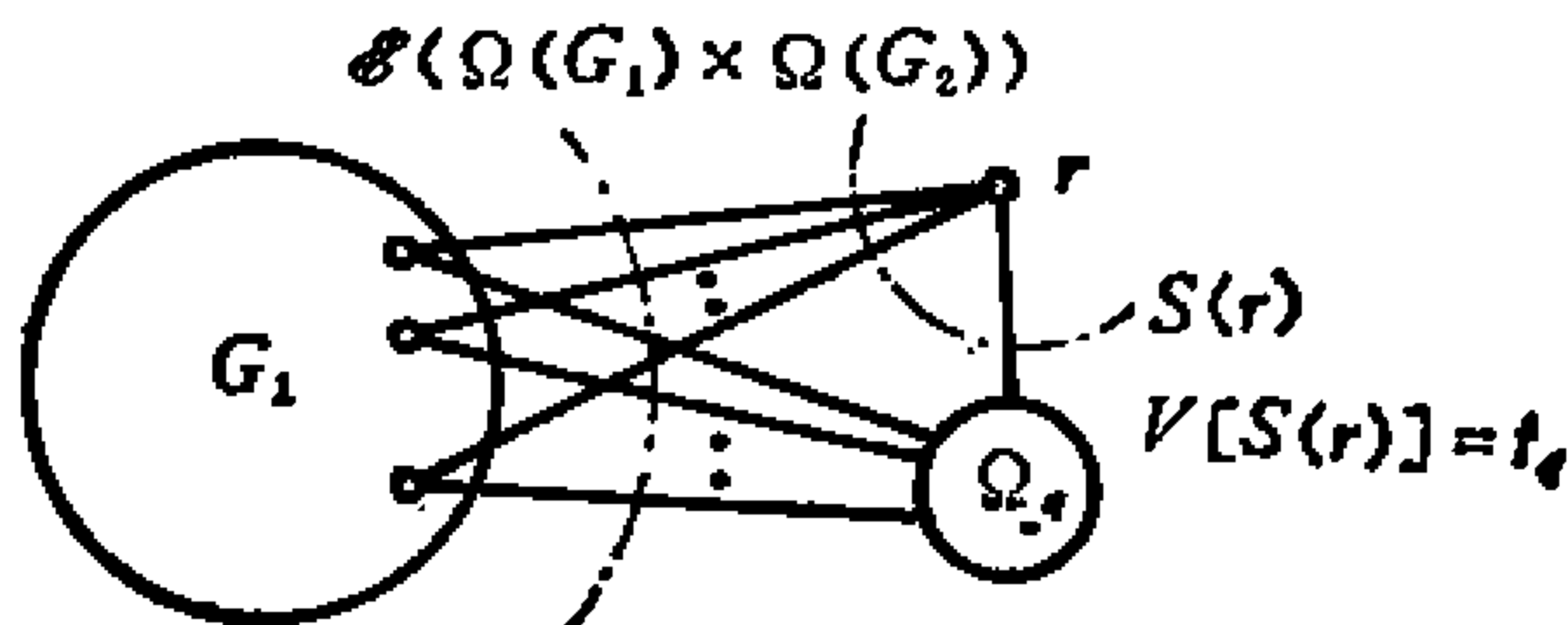


图12-2-6 在步骤 q 时的EWC网

端限容量 t_q 在来自顶点 r 的所有端限容量中必定是最大的，因为据式 (12-2-12)，要分配比 t_q 更大的流是不可能的。于是我们可以看出：

$$t_q = V[S(r)] \quad (12-2-18)$$

可见，上述结果对于 G 中任何顶点都适用。因此，由修改步骤所得的 G 的 I_u 等于 I_s ，同时用式 (12-2-16) 也就证明了 $I_0 = I_s$ 。

例12-2-4 例12-2-2给出的端限容量矩阵 T 是

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} d & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d & 3 & 2 \\ 1 & 3 & d & 2 \\ 1 & 2 & 2 & d \end{bmatrix} \end{matrix}$$

每一行的最大端限容量如下表所示：

行	最大端限容量
1	1
2	3
3	3
4	2

所有这些最大端限容量的和是 9，因此

$$I_0 = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^4 t_{r,r} = \frac{9}{2}$$

在例 12-2-3 中，我们已经用修改步骤得到图 12-2-4 (c) 中的 EWC 网。这个 EWC 网满足以上端限容量矩阵。这个网络的指标 I_n 是

$$I_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 2 = \frac{9}{2}$$

它等于 I_0 。

12-3 端限容量之间的关系

端限容量的对应割集有一个非常有趣的性质。设 i, j, k, m 是一个无向 EWC 网的顶点。设 $S_1 = \mathcal{S}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 是端限容量 t_{ij} 的对应割集，而 $S_2 = \mathcal{S}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_2)$ 是端限容量 t_{km} 的对应割集。又设

$$\Omega_j = (\Omega_i, \Omega_m) \tag{12-3-1}$$

$$\bar{\Omega}_1 = (\Omega_k, \Omega_i) \tag{12-3-2}$$

$$\Omega_2 = (\Omega_i, \Omega_k) \tag{12-3-3}$$

$$\bar{\Omega}_2 = (\Omega_j, \Omega_m) \tag{12-3-4}$$

其中 $i \in \Omega_i$, $j \in \Omega_j$, $k \in \Omega_k$, $m \in \Omega_m$, 如图12-3-1所示。因此

$$S_1 = \mathcal{E}(\Omega_i \times \Omega_k) \cup \mathcal{E}(\Omega_i \times \Omega_j) \cup \mathcal{E}(\Omega_m \times \Omega_k) \cup \mathcal{E}(\Omega_m \times \Omega_j) \quad (12-3-5)$$

$$S_2 = \mathcal{E}(\Omega_i \times \Omega_m) \cup \mathcal{E}(\Omega_i \times \Omega_j) \cup \mathcal{E}(\Omega_k \times \Omega_m) \cup \mathcal{E}(\Omega_k \times \Omega_j) \quad (12-3-6)$$

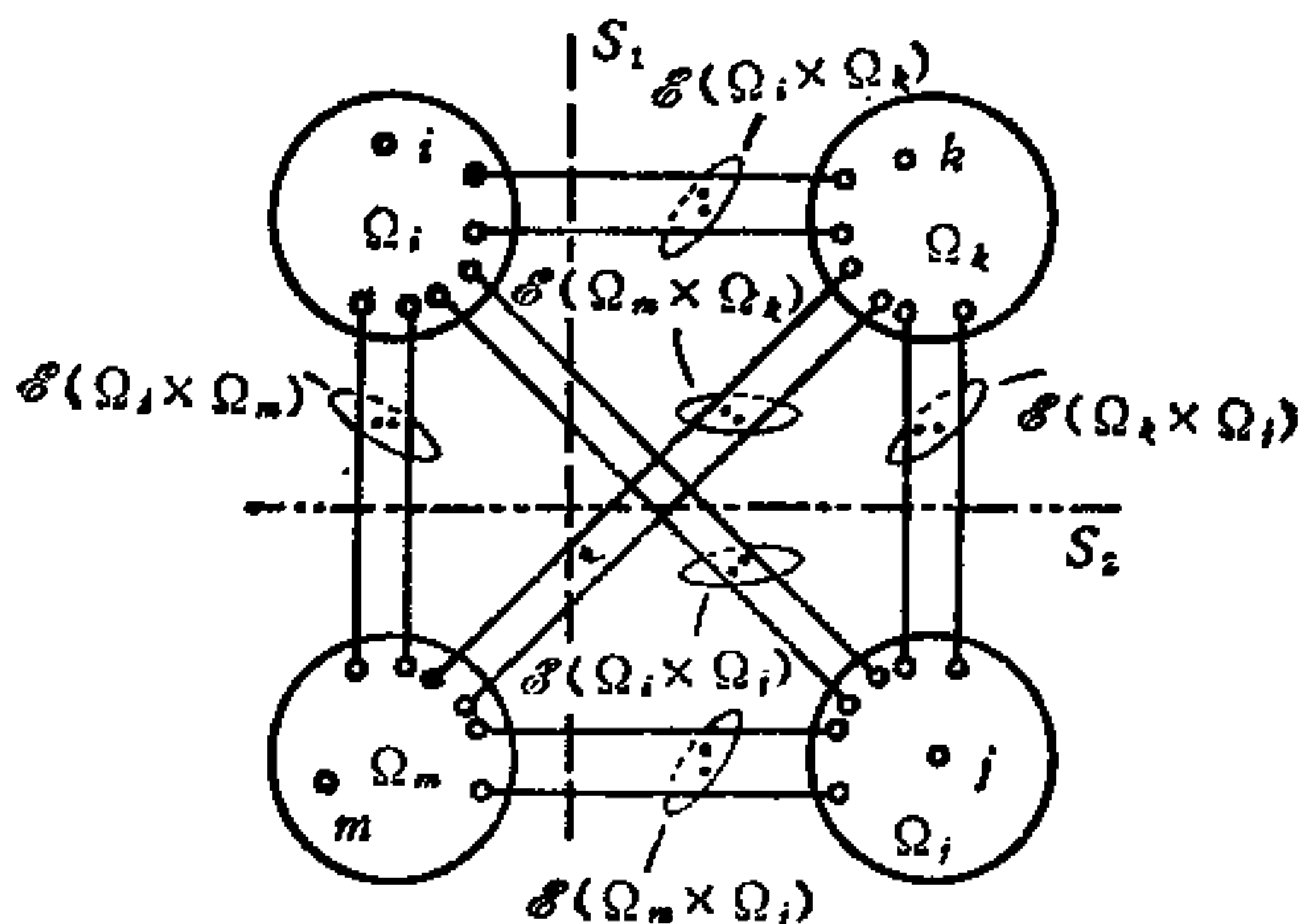


图12-3-1 由 Ω_i , Ω_j , Ω_k , Ω_m 组成的EWC网

当两个割集处于这种情况时 (如图 12-3-1 所示), 我们说这两个割集互相交叉。换句话说, 当我们删去两个割集的所有边时, 若最大连通子图的数目增加了二个以上, 我们就说这两个割集互相交叉。为了简便, 我们定义

$$V[\mathcal{E}(\Omega_p \times \Omega_q)] = \sum_{e_r \in \mathcal{E}(\Omega_p \times \Omega_q)} c_r \quad (12-3-7)$$

也就是说, $V[\mathcal{E}(\Omega_p \times \Omega_q)]$ 等于集合中所有边的边容量之和。

因为 S_1 是端限容量 t_{ij} 的对应割集, 所以当从顶点 i 到顶点 j 分配到最大流 ψ_{ij} (等于 t_{ij}) 时, S_1 就是一个基本饱和割集。

因此, 无论 S_2 在 ψ_{ij} 的这一分配方式下是否是基本饱和割集, 我们都有

$$V[\mathcal{S}(\Omega_i \times \Omega_k)] + V[\mathcal{S}(\Omega_m \times \Omega_k)] \leq V[\mathcal{S}(\Omega_k \times \Omega_j)] \quad (12-3-8)$$

故

$$V[\mathcal{S}(\Omega_i \times \Omega_k)] \leq V[\mathcal{S}(\Omega_k \times \Omega_j)] \quad (12-3-9)$$

同理

$$V[\mathcal{S}(\Omega_i \times \Omega_m)] \geq V[\mathcal{S}(\Omega_m \times \Omega_j)] \quad (12-3-10)$$

另一方面, 当我们从顶点 k 到顶点 m 分配最大流 ψ_{km} (它等于 t_{km}) 时, S_2 是一个基本饱和割集, 所以我们有

$$V[\mathcal{S}(\Omega_i \times \Omega_k)] \geq V[\mathcal{S}(\Omega_i \times \Omega_m)] \quad (12-3-11)$$

以及

$$V[\mathcal{S}(\Omega_k \times \Omega_j)] \leq V[\mathcal{S}(\Omega_m \times \Omega_j)] \quad (12-3-12)$$

因此, 由式 (12-3-9), (12-3-10), (12-3-11), (12-3-12), 我们有

$$\begin{aligned} V[\mathcal{S}(\Omega_i \times \Omega_k)] &\leq V[\mathcal{S}(\Omega_k \times \Omega_j)] \leq V[\mathcal{S}(\Omega_m \times \Omega_j)] \\ &\leq V[\mathcal{S}(\Omega_i \times \Omega_m)] \leq V[\mathcal{S}(\Omega_i \times \Omega_k)] \end{aligned} \quad (12-3-13)$$

当 S_1 和 S_2 相互交叉时, 这些式子必定相等, 并且有

$$V[\mathcal{S}(\Omega_i \times \Omega_j)] = V[\mathcal{S}(\Omega_m \times \Omega_k)] = 0 \quad (12-3-14)$$

注意, 如果式 (12-3-13) 中的等式满足, 而且式 (12-3-14) 也满足, 由式 (12-3-5) 和 (12-3-6), 则 $t_{ij} = t_{km}$ 。然而在这种情况下, 由图 12-3-1 我们可以看出, 如果我们不用 S_2 作为 t_{km} 的对应割集, 也可以用

$$S'_2 = \mathcal{S}(\Omega_i \times \Omega_k) \cup \mathcal{S}(\Omega_j \times \Omega_k) \quad (12-3-15)$$

作 t_{km} 的对应割集。注意在这个条件下

$$\mathcal{S}(\Omega_m \times \Omega_k) = \emptyset$$

因此可以得到下面的引理。

引理 12-3-1 设 S_1 是端限容量 t_{ij} 的对应割集, 则对于任何端限容量 t_{km} , 存在 t_{km} 的一个对应割集, 使这个割集与 S_1 不互相交叉。

有了这个结果, 我们就可以来讨论端限容量的一个有趣的性质。这就是下面定理给出的三角关系。

定理 12-3-1 设 i, j, k 是一个 EWC 网络中的顶点, 则

$$t_{ij} \geq \min(t_{ik}, t_{kj}) \quad (12-3-16)$$

证明: 设 S_1 是 t_{ij} 的对应割集, 此处 $S_1 = \mathcal{O}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$, $i \in \Omega_1$, $j \in \bar{\Omega}_1$. 设 $k \in \Omega_1$, 如图 12-3-2 (a) 所示。根据上面的引理, 存在一个 t_{ki} 的对应割集 S' , 使得 S' 和 S_1 不互相交叉。现在, 如图 12-3-2 (b) 所示, 若 $S_1 = S'$ 的条件不满足, 那么 S' 必定分离顶点 i 和 k , 而当 $S_1 = S'$ 时, 定理的证明是显然的。因此, 在分配等于 t_{ki} 的最大流时, 为了使 S' 成为基本饱和割集, 必有:

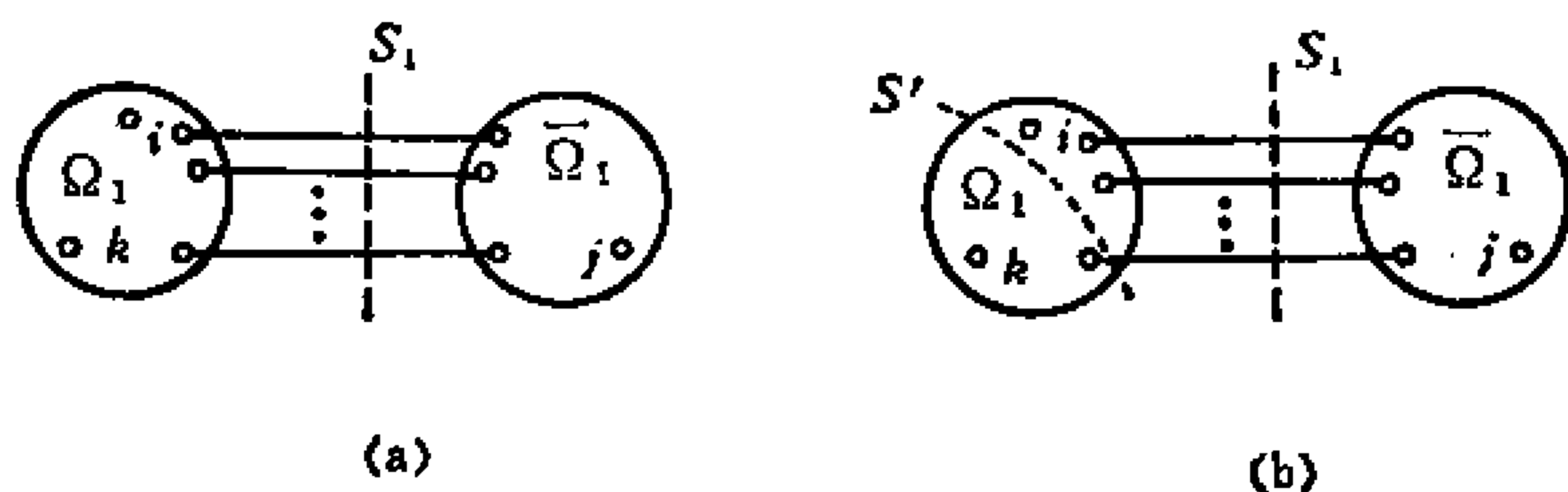


图 12-3-2 顶点 i, k, j 的位置

$$V[S'] \leq V[S_1] \quad (12-3-17)$$

或

$$t_{ki} \leq t_{ij} \quad (12-3-18)$$

因而式 (12-3-16) 是正确的。

当 $k \in \bar{\Omega}_1$ 时, 如图 12-3-3 (a) 所示。 t_{ik} 的对应割集 S'' 不与 S_1 交叉, 且一定分离顶点 j 和 k , 这是由于假设 $S'' \neq S_1$, 故 S'' 必处于图 12-3-3 (b) 所示的位置。因而, 在流 ψ_{ik} (等于 t_{ik}) 的

分配下, 为使 S'' 是基本饱和割集, 必有

$$V[S''] \leq V[S_1] \quad (12-3-19)$$

或

$$t_{ik} \leq t_{ij} \quad (12-3-20)$$

因此, 式 (12-3-16) 是正确的. (证毕)

容易看出, 定理 12-2-1 和定理 12-3-1 是等价的.

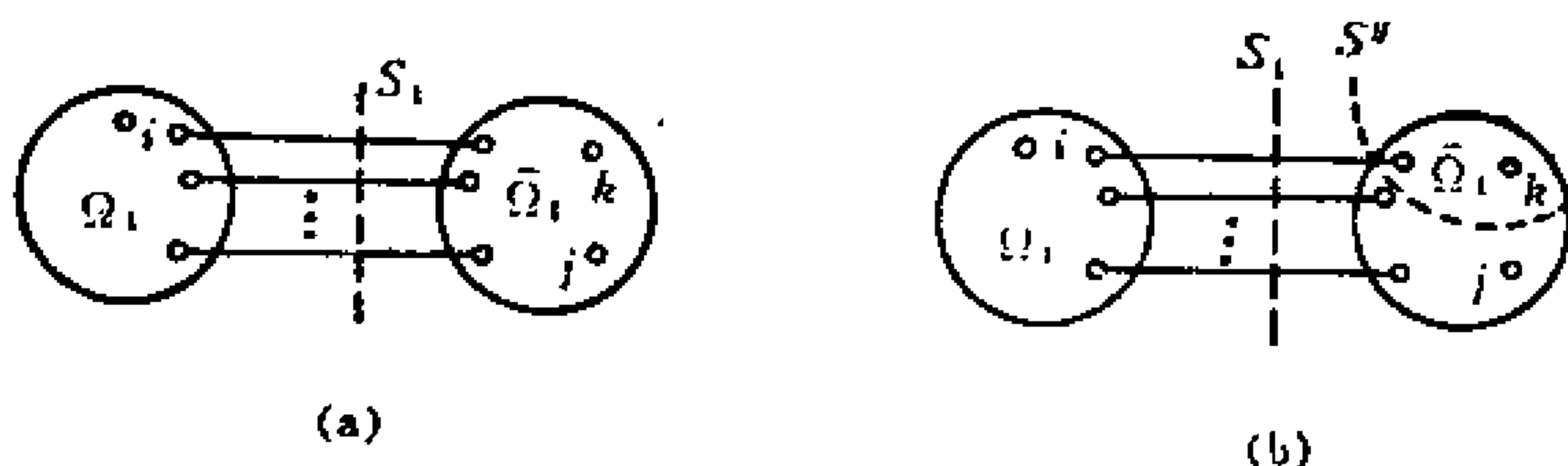


图12-3-3 顶点 i, j, k 的位置

12-4 割集的 W 类

考虑由 n 个顶点构成的连通 EWC 网 G . 设 S_1, S_2, \dots, S_{n-1} 是分离 i 和 j 的线性无关割集. 假定我们将流 ψ_{ij} 分配给 G , 使这些割集 S_p ($p=1, 2, \dots, n-1$) 都变成基本饱和割集, 那么很明显, 存在着一个流 $\psi_{r_{ij}}$ 的集合, 它构成流 ψ_{ij} , 并且每条路径 $P_{r_{ij}}$ (其中的流 $\psi_{r_{ij}}$ 非零) 通过每一个割集 S_p 正好一次*. 一般地, 在一个 EWC 网中, 总有一类线性无关割集, 如果我们只把非零流 $\psi_{r_{ij}}$ 分配给路径 $P_{r_{ij}}$, 而这些路径都通过每一个割集正好一次, 那么就可以得到一个从 i 到 j 的最大流. 如果一个这样的类不是另一个这样的类的子类, 这样的类就是割集的 W 类. 我们可以用下面的步骤来得到割集的 W 类. $S_{11}, S_{12}, \dots, S_{1k_1}$ 等割集类是

* “一条路径 P 通过一个割集 S 正好一次”, 这句话的意思是说 $P \cap S$ 正好有一条边.

这样的类，它们的值 $\sum_{e_p \in S} c_p$ 在分离 i 和 j 的全部割集的值中是最

小的。注意，我们现在只考虑分离 i 和 j 的割集。假定在割集 $S_{11}, S_{12}, \dots, S_{1m_1}, \dots, S_{1k_1}$ 中， $S_{11}, S_{12}, \dots, S_{1m_1}$ 是线性无关的，显然当把一个从 i 到 j 的最大流赋给 G 时，这 k_1 个割集就变成了基本饱和割集。

我们用 α^1 来乘 EWC 网 G 的所有这种边的边容量，这种边是属于割集 S_{1p} ($p = 1, 2, \dots, m_1$) 中任一个割集的，这样就修改了网络 G 。设所得的 EWC 网是 $G(\alpha^1)$ 。然后我们选择满足 $1 \leq \alpha^1 < \infty$ 的最小的 α^1 ，从而得到一些新的割集 $S_{21}, S_{22}, \dots, S_{2k_2}$ ，使它们的值在 $G(\alpha^1)$ 的所有分离 i 和 j 的割集的值中是最小的。设这个值是 α_0^1 ，而这个 $\alpha^1 = \alpha_0^1$ 的 EWC 网是 $G(\alpha_0^1)$ 。注意，在 $G(\alpha_0^1)$ 中， $S_{11}, S_{12}, \dots, S_{1k_1}$ 等割集的值也是最小的。设割集 $S_{21}, S_{22}, \dots, S_{2m_2}$ 和割集 $S_{11}, S_{12}, \dots, S_{1m_1}$ 是 $S_{11}, \dots, S_{1k_1}, S_{21}, \dots, S_{2m_2}, \dots, S_{2k_2}$ 中线性无关的割集。

再来重复这个步骤：用 α^2 来乘所考虑的割集的所有边的边容量，然后选取最小值 α_0^2 ，由它产生一些新的割集，这些新割集的值在所得网络 $G(\alpha_0^1 \alpha_0^2)$ 的全部分离 i 和 j 割集的值中是最小的。

现在，一般的模式已经很清楚了。设

$$\{S_0\} = \{S_{11}, \dots, S_{1m_1}, S_{21}, \dots, S_{2m_2}, \dots, S_{p-1,1}, \dots, S_{p-1,m_{p-1}}\} \quad (12-4-1)$$

假定 $G(\alpha_0^1 \alpha_0^2 \dots \alpha_0^{p-1})$ 中的 $S_{p1}, S_{p2}, \dots, S_{pk_p}$ 在 $\alpha^{p-1} = \alpha_0^{p-1}$ 时，是该 EWC 网的全部分离 i 和 j 的割集中其值最小的割集，并且在 $\alpha^{p-1} = \alpha_0^{p-1}$ 时没有值更小的割集。设 S_{p1}, \dots, S_{pm_p} ($m_p \leq k_p$) 以及 $\{S_0\}$ 中的割集在所有被考虑的割集中是线性无关的，则我们把 S_{p1}, \dots, S_{pm_p} 也包括在 $\{S_0\}$ 类中。

我们继续进行刚才描述的步骤，直至下面两种情况之一出现：

情况 1 在 $G(\alpha_0^1 \cdots \alpha_0^{p-1})$ 中不存在既能分离 i 和 j ，但又不能由 $\{S_0\}$ 中割集的线性组合得到的割集。这时，割集的 W 类即为式 (12-4-1) 中的 $\{S_0\}$ 。

情况 2 至少存在一个 $G(\alpha_0^1 \cdots \alpha_0^{p-1})$ 中能分离 i 和 j ，却不能由式 (12-4-1) 中 $\{S_0\}$ 内割集的线性组合得到的割集。要出现情况 2，就必须不存在这样的 α^{p-1} ，($1 \leq \alpha^{p-1} < \infty$)，它在 $G(\alpha_0^1 \cdots \alpha_0^{p-1})$ 中至少产生一个关于式 (12-4-1) 中的 $\{S_0\}$ 线性无关的新割集 $S_{p,r}$ ，而该新割集的值在分离 i 和 j 的割集的值中是最小的。假定 $G(\alpha_0^1 \cdots \alpha_0^{p-1})$ 中的割集 $S_{p,1}, S_{p,2}, \cdots, S_{p,k_p}$ 的值对于 α_0^{p-1} ($1 \leq \alpha_0^{p-1} < \infty$) 的任何一个值都不可能是最小的，又假定在 $S_{1,1}, S_{1,2}, \cdots, S_{1,k_1}, S_{2,1}, \cdots, S_{p-1,1}, \cdots, S_{p-1,k_{p-1}}, S_{p,1}, \cdots, S_{p,k_p}$ 中， $S_{p,1}, S_{p,2}, \cdots, S_{p,m_p}$ 以及 $\{S_0\}$ 中的割集是线性无关的，则关于顶点 i 和 j 的割集的 W 类由 $\{S_0\}$ 中的所有割集和割集 $S_{p,1}, S_{p,2}, \cdots, S_{p,m_p}$ 组成。

为了说明确定割集的 W 类的方法，考虑图 12-4-1 中的 EWC 网。我们可以看出，在分离 i 和 j 的所有割集中，只有割集 $S_{1,1} = (a, b)$ 的值最小。把 a, b 边的边容量乘以 $\alpha_0^1 = 2$ ，我们就得到一个新割集 $S_{2,1} = (c, e)$ ，它的值在 $G(\alpha_0^1 = 2)$ 中是最小的，如图 12-4-1(b) 所示。将 $G(\alpha_0^1)$ 中 $S_{1,1}$ 和 $S_{2,1}$ 各边的边容量乘以 α^2 ，并置 $\alpha_0^2 = 3$ ，我们得到 $G(\alpha_0^1 = 2, \alpha_0^2 = 3)$ ，如图 12-4-1(c) 所示。现在，存在一个新的割集 $S_{3,1} = (a, d, e)$ ，它的值在目前所有可用的割集中是最小的。前面说过，我们只讨论分离顶点 i 和 j 的割集。因此，关于 i 和 j 的割集的 W 类由 $(a, b), (a, d, e), (c, e)$ 组成。

以下定理给出了割集的 W 类和流 ψ_{ij} 之间的一个明显关系。

定理 12-4-1 对于一个给定的 EWC 网 G ，存在分离 i 和 j 的一类线性无关割集，以及一个从 i 到 j 路径的类 $\{P_r\}$ ，其中每一条路径通过这个割集类中每个割集一次，从而可用分配非零流

给 $\{P_r\}$ 中的路径的方法, 给出任意一个不超过端限容量 t_{ij} 的可行流 ψ_{ij} .

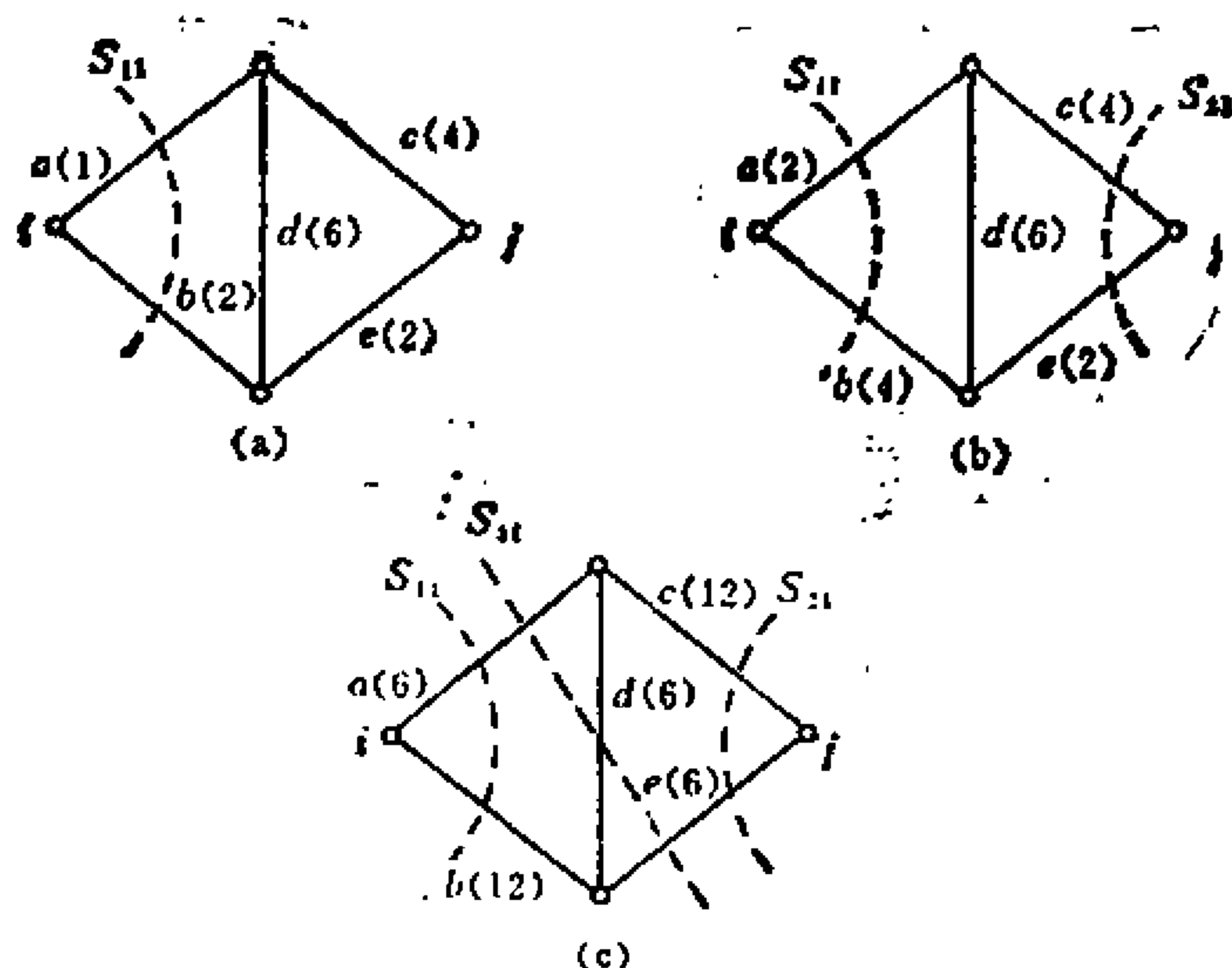


图12-4-1 EWC 网
(a) G ; (b) $G(\alpha_0^1)$; (c) $G(\alpha_0^1 \alpha_0^2)$

证明: 我们考虑前面描述的割集的 W 类和从所给 EWC 网 G 导出的修改网络 $G(\alpha_0^1 \cdots \alpha_0^{p-1})$, 有两种可能出现的情况.

情况 1 在这种情况下, W 类中的割集就是式 (12-4-1) 中 $\{S_0\}$ 的割集. 在 $G(\alpha_0^1 \cdots \alpha_0^{p-1})$ 中, 当我们分配一个最大流 ψ'_{ij} 时, W 类中所有的割集都是基本饱和割集. 因此, 存在着流 ψ'_{ij} 的一个集合, 它用这样的方法给出 $G(\alpha_0^1 \cdots \alpha_0^{p-1})$ 中从 i 到 j 的最大流 ψ'_{ij} , 以致带有非零流的每一路径通过每个割集正好一次. 设 $\psi'_{ij}(e)$ 是与流 ψ'_{ij} 的集合对应的边流集合. 用

$$A = \alpha_0^1 \alpha_0^2 \cdots \alpha_0^{p-1} \quad (12-4-2)$$

去除每个这样的路径流与用 A 去除分配给每条边的流是等效的.

因此，边 e 的流变成 $\psi'_{ij}(e)/A$ 。另一方面， G 中任一条边的边容量不小于修改网络 $G(\alpha_0^1 \cdots \alpha_0^{p-1})$ ，中边的边容量乘以 $1/A$ 。这样，路径流 ψ'_{ij}/A 的集合可以分配给 G 。很明显，这就在 G 中给出了一个从 i 到 j 的最大流。要得到其他任何一个从 i 到 j 的流，给每个流分配 ψ_{ij}/A 的 K 倍即可（这里 $0 \leq K \leq 1$ ）。因此对于这种情况定理为真。

情况 2 当割集的 W 类包含不属于式 (12-4-1) 的 $\{S_0\}$ 中的割集 $S_{p1}, S_{p2}, \cdots, S_{pm_p}$ 时，在 $G(\alpha_0^1 \cdots \alpha_0^{p-2})$ 中至少存在一条边，其边容量和原来的网络 G 的边容量相同。设这些边是 e_1, e_2, \cdots, e_q ，又设 $\bar{G}(\alpha_0^1 \cdots \alpha_0^{p-2})$ 是从 $G(\alpha_0^1 \cdots \alpha_0^{p-2})$ 中移去这些边得到的 EWC 网。那么，在 $\bar{G}(\alpha_0^1 \cdots \alpha_0^{p-2})$ 中，在同 $S_{p-11}, S_{p-12}, \cdots, S_{p-1m_{p-1}}$ 变换相同的条件下，与 $S_{p1}, S_{p2}, \cdots, S_{pm_p}$ 对应的割集变成基本饱和割集，这是因为，要从 G 得到 $\bar{G}(\alpha_0^1 \cdots \alpha_0^{p-2})$ ，在 S_{p1}, \cdots, S_{pm_p} 中凡是未用 α^{p-2} 乘的每条边都要移走。因此，就 $\bar{G}(\alpha_0^1 \cdots \alpha_0^{p-2})$ 而言，可以应用情况 1。因为分配给 $\bar{G}(\alpha_0^1 \cdots \alpha_0^{p-2})$ 中的路径的一类流也可以分配给 G 中的同一路径，故对这种情况定理为真。(证毕)

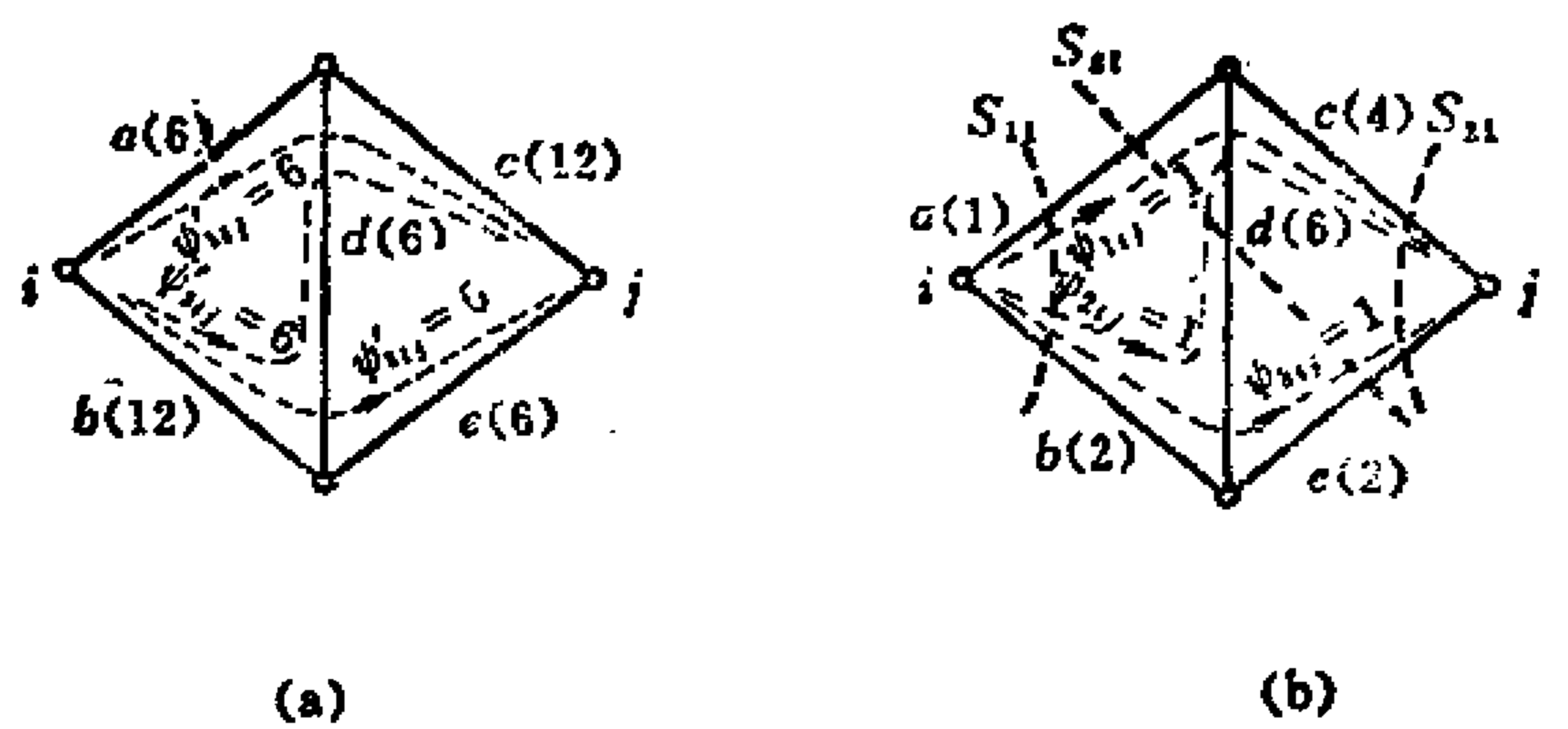


图12-4-2 用 $G(\alpha_0^1 \alpha_0^2)$ 分配流 ψ_{ij}
 (a) $G(\alpha_0^1 \alpha_0^2)$; (b) G

考虑图 12-4-1(c) 中的 EWC 网 $G(\alpha_0^1 \alpha_0^2)$ 。我们要分配最大流 ψ_{ij} 给这个传输网的唯一方式是分配流 $\psi'_{1,j} = 6$, $\psi'_{2,j} = 6$ 和 $\psi'_{3,j} = 6$, 如图 12-4-2(a) 所示。因为 $\alpha_0^1 \alpha_0^2 = 6$, 所以如图 12-4-2(b) 所示, 分配流 $\psi_{1,j} = 1$, $\psi_{2,j} = 1$, $\psi_{3,j} = 1$ 给出最大流 ψ_{ij} ; 并且显然割集 (a,b) , (a,d,e) , (c,e) 是线性无关割集, 而分配了非零流的这些路径, 对每一个割集每一条都只通过一次。

12-5 有向 EWC 网

当一个 EWC 网的每边都有一个定向, 表示通过该边的流只按规定的方向流动时, 就称这个网络为有向 EWC 网。把流 $\psi_{r,j}$ 分配给从顶点 i 到顶点 j 的一条路径 $P_{r,j}$, 除了路径必须是从 i 到 j 的有向路径外, 其余的情况都与无向 EWC 网中的情况相同。同样, 分配流 $\psi_{r,j}$ 给一个有向 EWC 网和分配给无向 EWC 网是一样的, 并且从 i 到 j 的端限容量是从 i 到 j 所能分配到的最大流。我们应该注意, 在有向 EWC 网的情况下, 端限容量 t_{ij} 有可能不等于端限容量 t_{ji} 。

为了讨论有向 EWC 网的性质, 我们定义半割如下。

定义 12-5-1 设 $S_{ij} = \mathcal{E}(\Omega_i \times \bar{\Omega}_j) \cup \mathcal{E}(\bar{\Omega}_i \times \Omega_j)$ 是一个有向线图的割集, 其中 $i \in \Omega_i$, $j \in \bar{\Omega}_i$, 则 S_{ij} 的半割 s_{ij} 和 s_{ji} 分别为

$$s_{ij} = \mathcal{E}(\Omega_i \times \bar{\Omega}_j) \quad (12-5-1)$$

$$s_{ji} = \mathcal{E}(\bar{\Omega}_i \times \Omega_j) \quad (12-5-2)$$

注意 s_{ij} 和 s_{ji} 是无重边的集合, 并且

$$s_{ij} \cup s_{ji} = S_{ij} \quad (12-5-3)$$

与无向 EWC 网的情况一样, 一个有向 EWC 网的边称为饱和的, 如果这条边的边流等于它的边容量。但是在有向 EWC 网中分配流 ψ_{ij} 时, 与之有关的基本饱和割集的定义与无向 EWC 网中相应的定义有一点不同。

定义12-5-2 在一个有向EWC网中，如果割集 S_{ij} 的半割 s_{ij} 中每条边都是饱和的，而 S_{ij} 的半割 s_{ji} 中每条边都没有非零流，那么割集 S_{ij} 就是流 ψ_{ij} 的（从 i 到 j ）一个分配方式下的基本饱和割集。

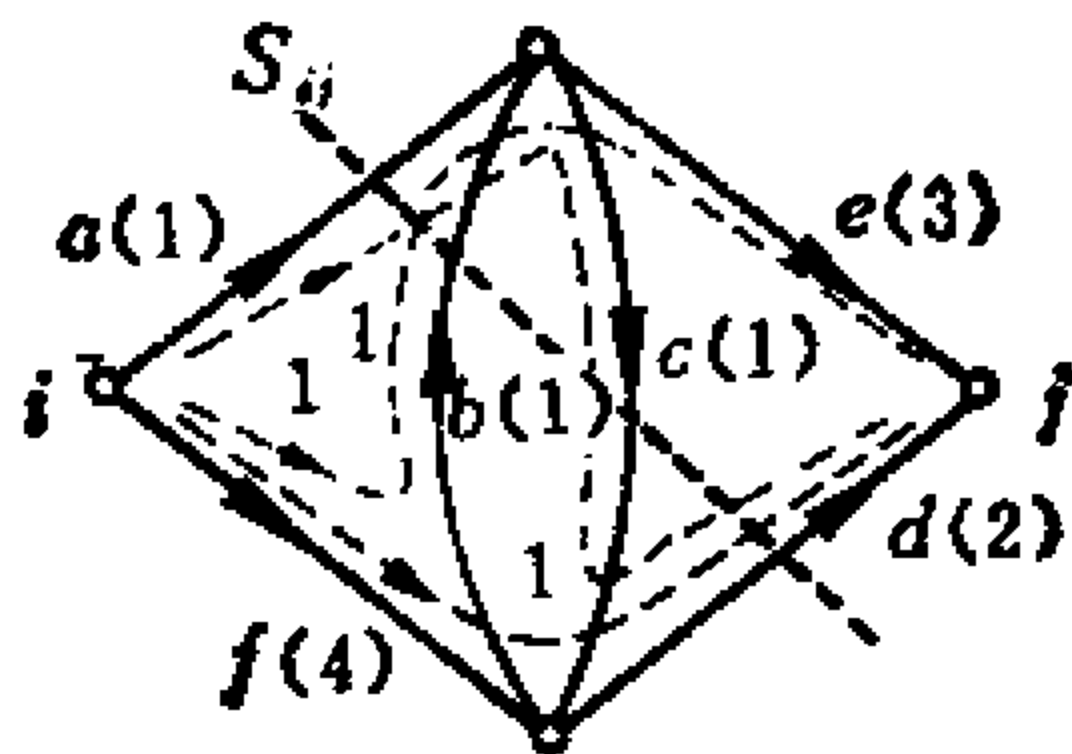


图12-5-1 一个有向EWC网和流 ψ_{ij}

例如，如果我们分配流 ψ_{ij} 如图 12-5-1所示，那么割集 $S_{ij} = (a, b, c, d)$ 中每一条边都是饱和的。但是， S_{ij} 不是基本饱和割集，这是因为 S_{ij} 的半割 s_{ij} 和 s_{ji} 为

$$s_{ij} = (a, b, d), \quad s_{ji} = (c)$$

而给边 c 分配了一个非零边流 $\psi_{ij}(c)$ 。

当我们如图 12-5-2 所示那样分配流 ψ_{ij} 时，割集 $S_{ij} = (a, b, c, d)$ 变成了基本饱和割集。根据上面这些定义，我们可以证明定理12-5-1。

定理12-5-1 当且仅当存在一个分离 i 和 j 的基本饱和割集时，分配给有向 EWC 网的流 ψ_{ij} 是最大的。

这个定理的证明与定理 12-1-2 的证明正好相同，只不过要用到有向 EWC 网的基本饱和割集。很容易看出，对于最大流 ψ_{ij} 的每一种可能的分配方式，至少存在一个分离 i 和 j 的基本饱和割集。我们称这个割集为端限容量 t_{ij} 的对应割集。

从定理12-5-1，我们得到另一个定理。

定理12-5-2 端限容量 t_{ij} 等于

$$t_{ij} = \min \{V[s_{p_{ij}}]; S_{p_{ij}} \text{ 的半割 } s_{p_{ij}} \in S(i; j)\} \quad (12-5-4)$$

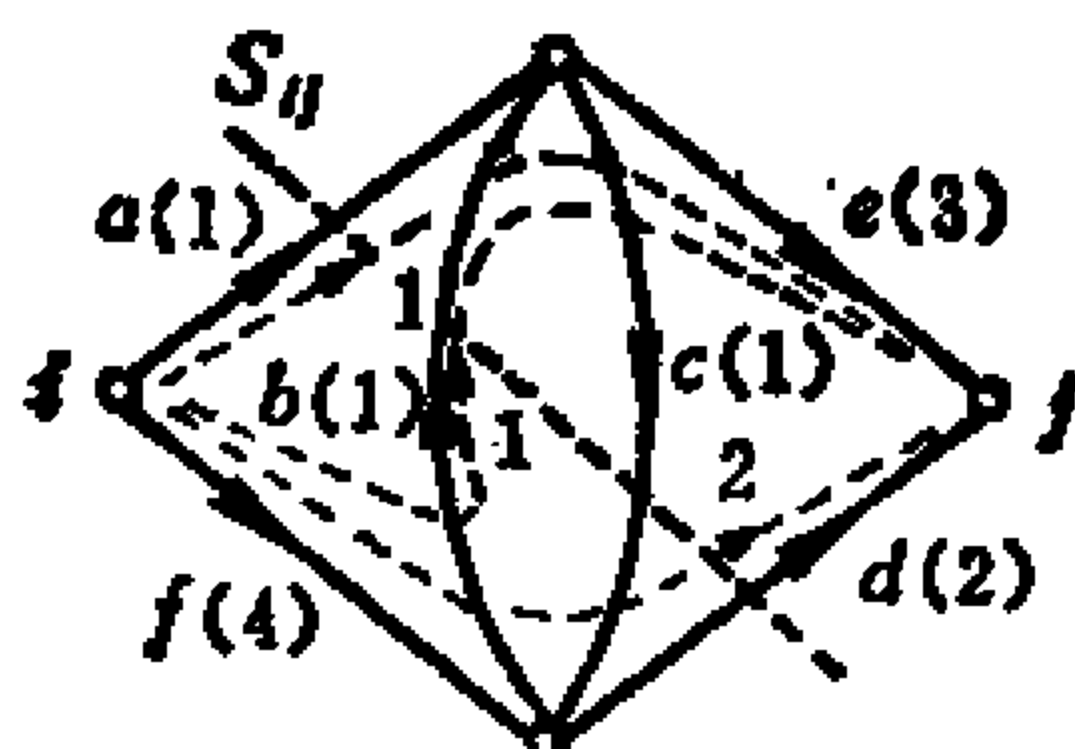


图12-5-2 在图12-5-1中的有向 EWC 网之内分配流 ψ_{ij} 的不同方式

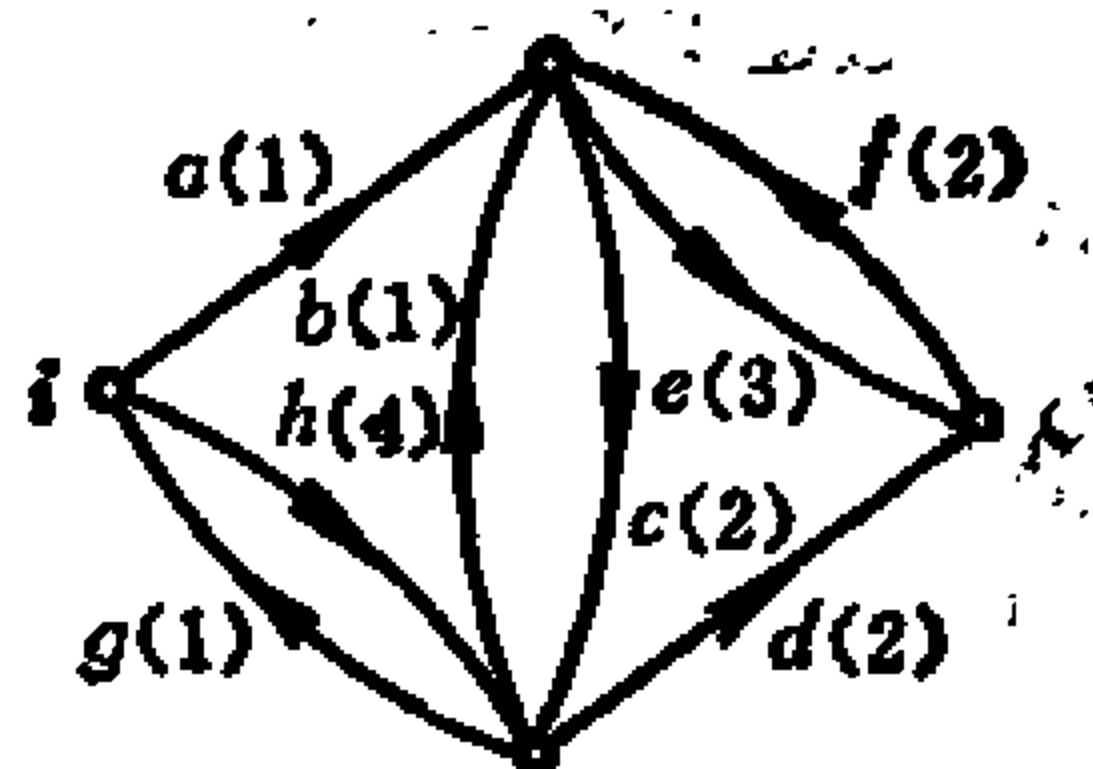


图12-5-3 有向 EWC 网 G

例12-5-1 在图12-5-3的有向 EWC 网 G 中, $\{S(i; j)\}$ 由以下分离 i 和 j 的割集组成:

$$\begin{aligned} S_{1,ij} &= (a, g, h), & S_{2,ij} &= (a, b, c, d), \\ S_{3,ij} &= (d, e, f), & S_{4,ij} &= (b, c, e, f, g, h) \end{aligned}$$

这些割集的半割 $s_{p_{ij}}$ 为

$$\begin{aligned} s_{1,ij} &= (a, h), & s_{2,ij} &= (a, b, d), \\ s_{3,ij} &= (d, e), & \text{and } s_{4,ij} &= (c, e, h) \end{aligned}$$

因此

$$t_{ij} = \min \{V(s_{p_{ij}})\} = \min(5, 4, 5, 9) = 4$$

另一方面

$$\begin{aligned} s_{1,ji} &= (g), & s_{2,ji} &= (c), \\ s_{3,ji} &= (f), & \text{and } s_{4,ji} &= (b, f, g) \end{aligned}$$

所以

$$t_{ji} = \min \{V(s_{p_{ji}})\} = \min(1, 2, 2, 4) = 1$$

显然, 一个有向 EWC 网的端限容量矩阵一般是不对称的。但是, 利用证明定理12-2-1中条件的必要性时所采用的步骤, 我们

可以求得端限容量矩阵的主分块以及所有包含一个以上元素的结果主子阵的主分块。

定理12-5-3 一个有向 EWC 网的端限容量矩阵可以作主分块划分，并且所有包含一个以上元素的结果主子阵也可以作主分块划分。

例12-5-2 图12-5-4中有向 EWC 网的端限容量矩阵 T 以及所有的结果主子阵都可以作主分块划分，如下所示：

$$T = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & d & 2 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 6 & d & 3 & 3 \\ \hline 3 & 4 & 4 & d & 3 \\ \hline 4 & 6 & 7 & 5 & d \end{array}$$

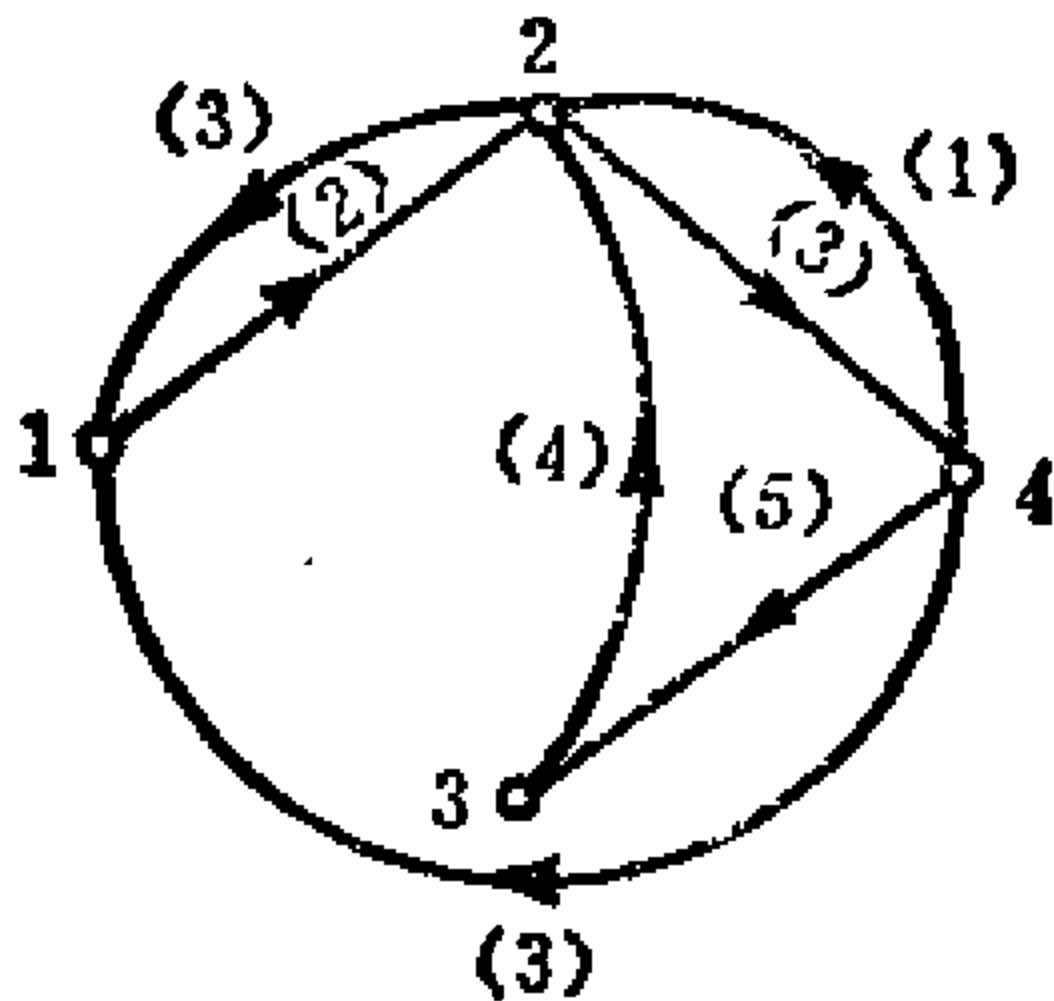


图12-5-4 有向EWC网

在无向 EWC 网的情况下，端限容量矩阵是对称的。因此，一个网络所能有的不同端限容量的最大数目为 n_v-1 ，其中 n_v 是该网络的顶点数。另一方面，不难看出，一个有向 EWC 网中不同端限容量的最大数目是大于 n_v-1 的。

考虑图12-5-5中的有向 EWC 网，其中 p 和 q 都是顶点。又

考虑一个由 $\psi_{1pq}, \psi_{2pq}, \psi_{3pq}, \psi_{4pq}$ 组成的流 $\psi_{pq} = t_{pq}$ (即 $\psi_{pq} = \psi_{1pq} + \psi_{2pq} + \psi_{3pq} + \psi_{4pq}$), 其中流 ψ_{1pq} 通过从 p 到 q 的边, 流 ψ_{2pq} 通

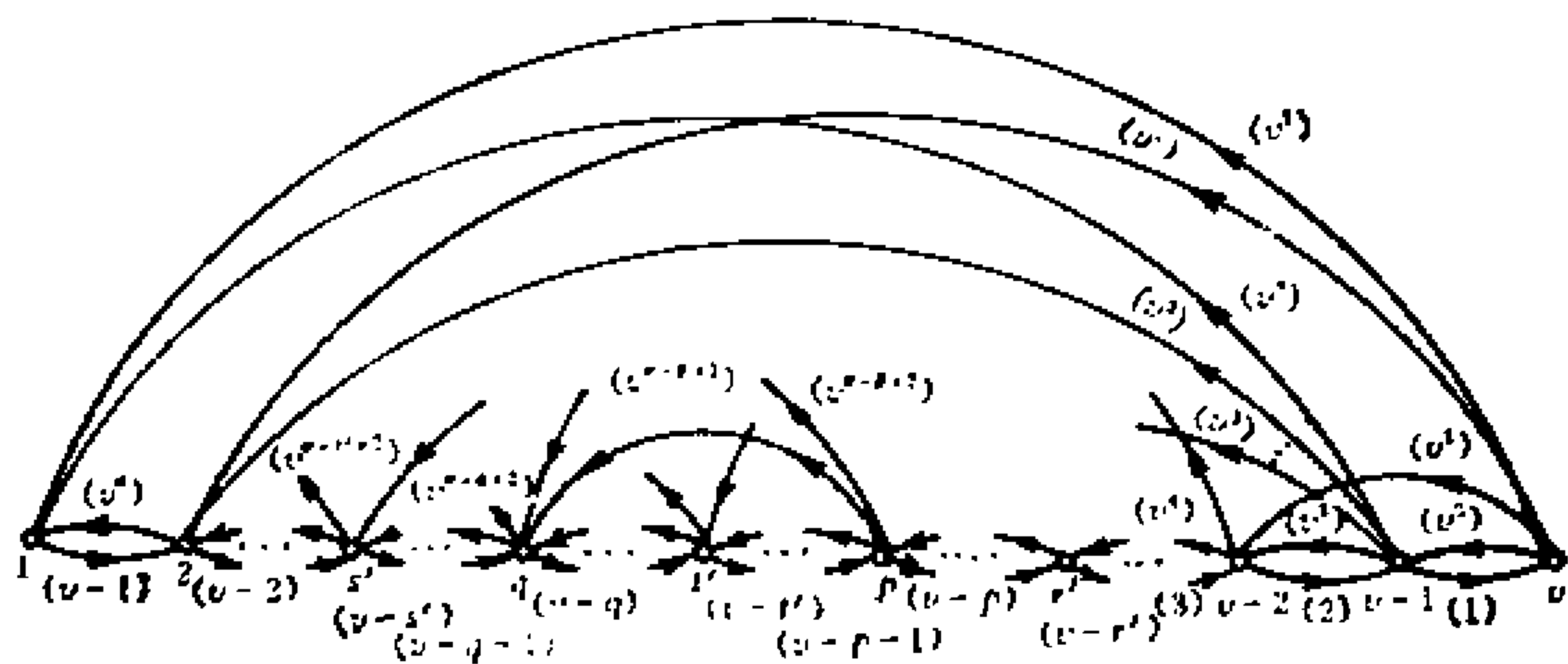


图12-5-5 有向EWC网

过从顶点 p 到顶点 $r' > p$ 的边, 流 ψ_{3pq} 通过从顶点 p 到顶点 $s' < q$ 的边, 流 ψ_{4pq} 通过从顶点 p 到顶点 t' ($q < t' < p$) 的边. 因为从顶点 p 到顶点 q 的边的边容量为 v^{p+2} , 所以 $\psi_{1pq} = v^{p+2}$. 流 ψ_{2pq} 一定要通过从顶点 p 到顶点 $p+1$ 的边, 而从顶点 $p+1$ 到顶点 p 的边的边容量大于从顶点 p 到顶点 $p+1$ 的边的边容量. 这一事实告诉我们, $\psi_{2pq} = v - p$. 对于 ψ_{3pq} , 考虑从 p 到 $s' (< q)$ 的所有有向路径. 因为这些路径都必包含从顶点 $q-1$ 到顶点 q 的边, 该边的边容量为 $v - q - 1$, 而从 p 到 $q-1$ 的边的边容量大于 $v - q - 1$, 所以 $\psi_{3pq} = v - q - 1$. 最后, 每一条从顶点 p 到顶点 q , 通过顶点 t' 而不过顶点 r' 和 s' 的有向路径, 包含从顶点 p 到顶点 t' 的边, 其边容量为 v^{p+2} , 而对于所有的 t' , 从 t' 到顶点 q 的边的边容量大于 v^{p+2} , 所以

$$\psi_{4pq} = (p - q - 1)v^{p+2}$$

因此 $t_{pq} = \psi_{pq}$. 而

$$\begin{aligned} t_{pq} &= (p - q)v^{p+2} + 2v - p - q - 1 \\ p &\neq v, \quad q \neq 1 \end{aligned} \tag{12-5-5}$$

当 $p = v$ 或 $q = 1$ 时, $\psi_{2,p,q}$ 或 $\psi_{2,p,q}$ 为零. 因而

$$t_{pq} = \begin{cases} (p-q)v^{v-p+2} + v - q - 1 & p = v, q \neq 1 \\ (p-q)v^{v-p+2} + v - p & p \neq v, q = 1 \\ (p-q)v^{v-p+2} & p = v, q = 1 \end{cases} \quad (12-5-6)$$

由此我们可以看出, 仅当 $p_1 = p_2$ 且 $q_1 = q_2$ 时,

$$t_{p_1q_2} = t_{p_2q_1} \quad (12-5-7)$$

还可以看出, 所有的 $t_{pq} (p > q)$ 都大于 v . 对于 t_{qp} 我们有

$$t_{qp} = t_{p-1,p} = v - p - 1 \quad (12-5-8)$$

它是小于 v 的. 因此, 我们得到图 12-5-5 中网络的端限容量矩阵, 矩阵的主对角线上方的元素由 $v-1$ 个不同的值组成, 而主对角线下方的元素都不相同. 现在我们可以说, 存在一个 n_v 个顶点的 (连通的) 有向 EWC 网, 正好有 $(n_v-1)(n_v+2)/2$ 个不同的端限容量.

端限容量矩阵有一种特殊子矩阵, 称为 S 子阵, 与 $\{S(i;j)\}$ 中的集合有密切的关系, 并且, 这种子阵对于研究一个矩阵作为有向 EWC 网的端限容量矩阵的可实现性是非常重要的.

定义 12-5-3 设 Ω_1 和 $\bar{\Omega}_1$ 是一对不相交的顶点集合, 且 $\Omega_1 \cup \bar{\Omega}_1 = \Omega$, 此处 Ω 是网络中所有顶点的集合. S 子阵是 T 的子阵, 是将 T 划去对应于 $\bar{\Omega}_1$ 中所有顶点的行与对应于 Ω_1 中所有顶点的列而得到的.

重要的是要注意在 S 子阵的元素中是不包含 d 的. 例如, 考虑例 12-5-2 中所给的端限容量矩阵, $\Omega = (1, 2, 3, 4)$. 设 $\Omega_1 = (1, 2)$, 则 $\bar{\Omega}_1 = (3, 4)$, 关于这两个集合的 S 子阵为

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

如果取 $\Omega_1 = (3, 4)$, $\bar{\Omega}_1 = (1, 2)$, 则我们有

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & \left[\begin{array}{cc} 4 & 4 \end{array} \right] \\ 4 & \left[\begin{array}{cc} 6 & 7 \end{array} \right] \end{array}$$

另一方面, 如果选择 $\Omega_1 = (2, 3, 4)$, 则 $\bar{\Omega}_1 = (1)$, 并且 S 子阵为

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \left[\begin{array}{c} 6 \end{array} \right] \\ 3 \left[\begin{array}{c} 4 \end{array} \right] \\ 4 \left[\begin{array}{c} 6 \end{array} \right] \end{array}$$

设 S 是有向 EWC 网中的一个割集。于是利用 $S = \mathcal{S}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1) \cup \mathcal{S}(\bar{\Omega}_1 \times \Omega_1)$ 之中的 Ω_1 和 $\bar{\Omega}_1$, 就可以得到 T 的一个 S 子阵。因此, 在 T 的端限容量及其 S 子阵之间有一定的关系, 这由下面的定理给出。

定理12-5-4 对于 T 除 d 外的每个元素, 至少存在一个 S 子阵, 使这个元素成为该 S 子阵中最大的元素。

证明: 设 t_{pq} 是端限容量, 显然它是端限容量矩阵 T 中的一个元素。又设 $S_{pq} = \mathcal{S}(\Omega_p \times \bar{\Omega}_p) \cup \mathcal{S}(\bar{\Omega}_p \times \Omega_p)$ 是 t_{pq} 的对应割集, 其中 $p \in \Omega_p$, $q \in \bar{\Omega}_p$ 。很明显, 从 T 中划去对应于 $\bar{\Omega}_p$ 中所有顶点的行和对应于 Ω_p 中所有顶点的列, 所得到的 S 子阵必包含 t_{pq} 。假定在此 S 子阵中存在一个比 t_{pq} 大的元素 t_{ru} 。而要使 t_{ru} 在此 S 子阵中, r 一定在 Ω_p 中, u 一定在 $\bar{\Omega}_p$ 中, 因此割集 S_{pq} 分离 r 和 u 。这就意味着半割 s_{pq} 在式 (12-5-4) 中是确定 t_{ru} 的半割之一, 因而不可能有 $t_{ru} > t_{pq}$ (证毕)

定理 12-5-5 设 t_{pq} 是端限容量。如果对于 $k \geq 1$, 存在 k 个包含 t_{pq} 的 S 子阵, 并且 t_{pq} 在这 k 个 S 子阵的每一个子阵中都是最大元素, 那么在这 k 个 S 子阵中, 至少有一个确定 t_{pq} 的对应

割集。〔一个 S 子阵确定一个割集，如果 $\mathcal{S}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1) \cup \mathcal{S}(\bar{\Omega}_1 \times \Omega_1)$ 是一个割集，其中 Ω_1 是与 S 子阵的行对应的所有顶点的集合， $\bar{\Omega}_1$ 是与 S 子阵的列对应的所有顶点的集合。〕

这个定理的证明是明显的，因为我们知道，存在一个子阵，它是由 t_{pq} 的对应割集

$$S_{pq} = \mathcal{S}(\Omega_p \times \bar{\Omega}_q) \cup \mathcal{S}(\bar{\Omega}_p \times \Omega_q)$$

中的 Ω_p 和 $\bar{\Omega}_p$ 所得到的。

根据定理12-5-4和定理12-5-5所给出的 S 子阵的性质，我们可以证明，定理12-3-1所给的关于无向 EWC 网的端限容量矩阵的必要充分条件，对于有向 EWC 网并不正确。首先，我们注意到，在定理12-3-1中，对于任意三个顶点 i, j, k 所满足的

$$t_{ij} \geq \min(t_{ik}, t_{ki}) \quad (12-5-9)$$

对于有向 EWC 网是适用的。可以用与定理12-3-1几乎相同的方法来证明这一点。但是，式(12-5-9)给出的关系对于有向 EWC 网的端限容量矩阵的可实现性却不是充分的，这可以由证明下述矩阵不能实现为端限容量矩阵来阐明。

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a-d \\ b-t_2 \\ c-t_3 \\ d-t_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ t_2 & d & 1 & 1 \\ t_3 & t_1 & d & 2 \\ t_4 & t_0+e & t_0 & d \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (12-5-10)$$

在矩阵 R 中， $t_4 > t_3 > t_2 > t_1 > t_0 + e > t_0 > 3$ ，且 $0 < e < 1$ 。可以看出， R 满足定理12-5-4和式(12-5-9)给出的关系。以 1 为最大元素的 S 子阵只有一个，即

$$R_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (12-5-11)$$

与 R_1 对应的顶点集 Ω_1 和 $\bar{\Omega}_1$ 是

$$\Omega_1 = \{a, b\} \tag{12-5-12}$$

$$\bar{\Omega}_1 = \{c, d\} \tag{12-5-13}$$

它们给出对应的割集 $S_{ac} = \mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1) \cup \mathcal{E}(\bar{\Omega}_1 \times \Omega_1)$, 如图12-5-6所示。注意 $s_{ac} = \mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 是半割, 它的值等于 t_{ac}, t_{bc}, t_{ad} 和 t_{bd} 。

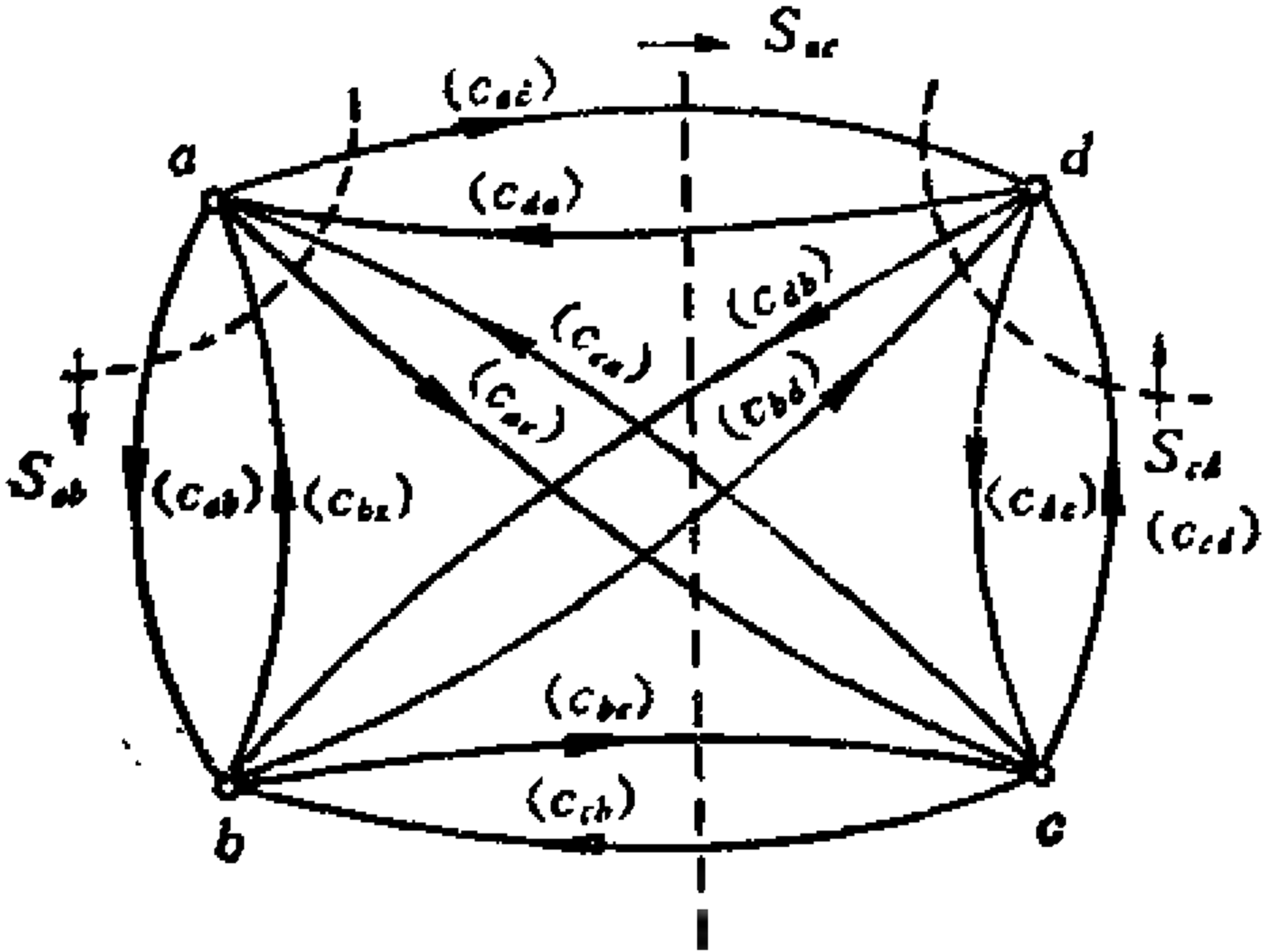


图12-5-6 与 R 对应的有向EWC网

同样, 以 2 为最大元素的 S 子阵只有一个, 即 R_2 , 以 3 为最大元素的 S 子阵也只有一个, 即 R_3 , 它们分别为

$$R_2 = \begin{matrix} & d \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{matrix} \tag{12-5-14}$$

和

$$R_3 = \begin{matrix} & b & c & d \\ a & [3 & 1 & 1] \end{matrix} \tag{12-5-15}$$

这两个 S 子阵给出割集 S_{cd} 和 S_{ab} , 如图12-5-6所示, 其中 $V[s_{cd}] = 2$, $V[s_{ab}] = 3$. 因此

$$t_{ac} = 1 = c_{ad} + c_{ac} + c_{bc} + c_{bd} \quad (12-5-16)$$

$$t_{ab} = 3 = c_{ab} + c_{ad} + c_{ac} \quad (12-5-17)$$

由于下面的 S 子阵 R_4 是 R 中唯一的以 t_0 为最大元素的 S 子阵, 因此 t_0 的对应割集必定是 $S_{dc} = \mathcal{S}(\Omega_d \times \bar{\Omega}_d)$, 其中 $\Omega_d = (a, b, d)$, $\bar{\Omega}_d = (c)$, 如图12-5-7所示。

$$R_4 = \begin{matrix} & c \\ \begin{matrix} a \\ b \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (12-5-18)$$

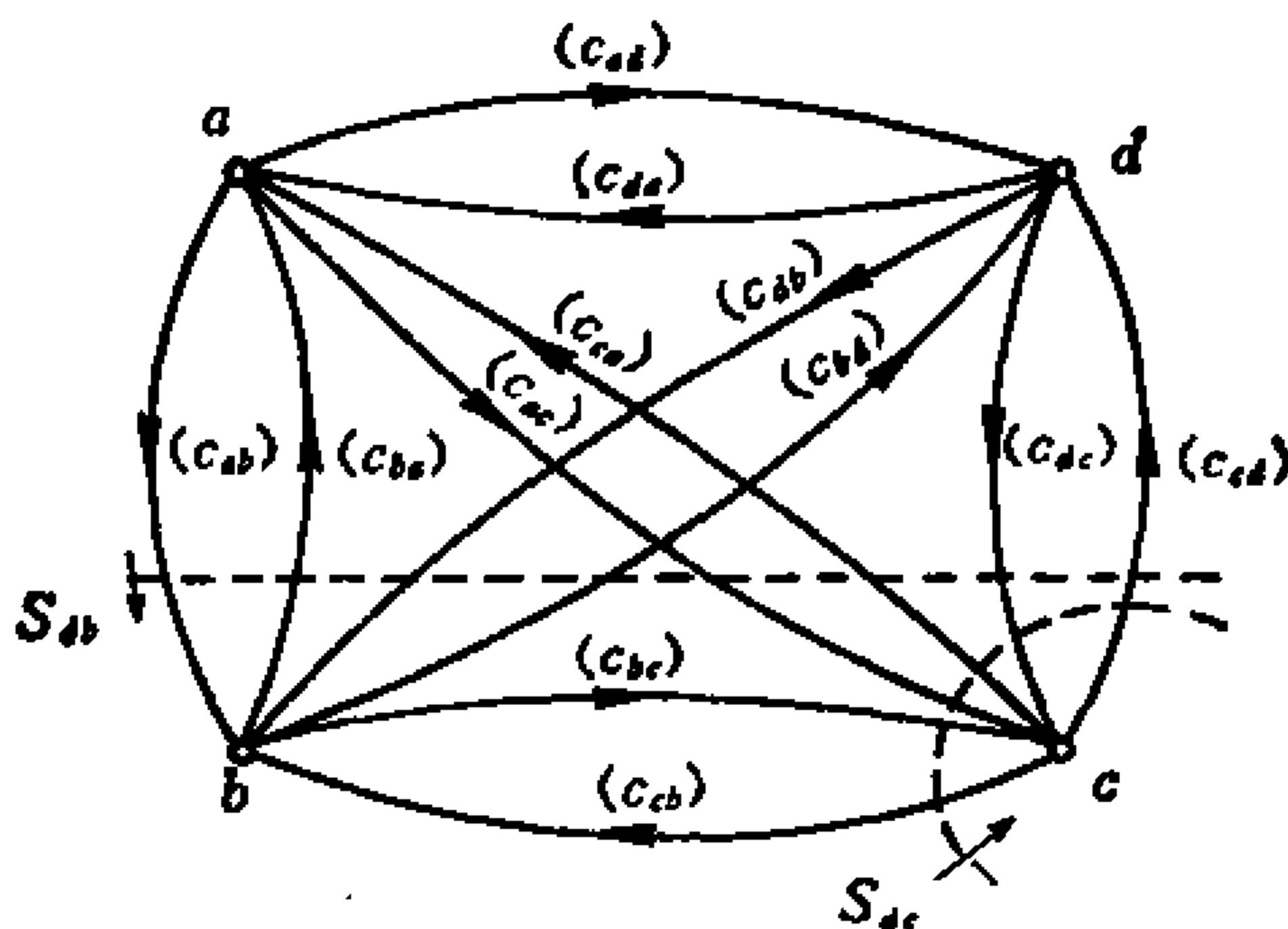


图12-5-7 EWG网以及 S_{dc} , S_{ab}

因此
$$t_0 = c_{ac} + c_{bc} + c_{dc} \quad (12-5-19)$$

又由于只有一个 S 子阵 R_5 以 $t_0 + e$ 为其最大元,

$$R_5 = \begin{matrix} & b & c \\ \begin{matrix} a \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ t_0 + e & t_0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (12-5-20)$$

于是图12-5-7中的 S_{ab} 是 $t_0 + e$ 的对应割集。因此

$$t_0 + e = c_{ab} + c_{ac} + c_{db} + c_{dc} \quad (12-5-21)$$

由式(12-5-19)和式(12-5-21), 我们有

$$\sigma = c_{ab} + c_{db} - c_{bc} \quad (12-5-22)$$

因为每一个边容量都是非负的, 故由式(12-5-16)得

$$c_{ad} + c_{ac} \leq 1 \quad (12-5-23)$$

于是由式(12-5-17)和式(12-5-23), 得

$$3 \geq c_{ab} \geq 2 \quad (12-5-24)$$

由式(12-5-16)得

$$c_{bc} \leq 1 \quad (12-5-25)$$

因此, 由式(12-5-24), (12-5-25)和(12-5-22), 我们有

$$\sigma \geq c_{ab} + 1 \quad (12-5-26)$$

因为 c_{ab} 是非负的, 故 $\sigma \geq 1$, 这与 $0 < \sigma < 1$ 的假设矛盾, 所以 R 不能实现成为有向 EWC 网的端限容量矩阵。因此, 式(12-5-9)给出的端限容量之间的关系对于有向 EWC 网的端限容量矩阵并不是可实现性的充分条件。

为了得到有向 EWC 网的端限容量矩阵的可实现性条件, 我们介绍一种修改 EWC 网的特殊方法, 称为移量算法。为了便于说明这种算法, 我们规定用符号 $\Omega(g)$ 表示线图 g 中作为边的端点的所有点的集合。例如, 考虑图 12-5-7 所示的有向 EWC 网, 设 g 是由边容量分别为 c_{cb} , c_{bd} 和 c_{dc} 的那些边组成的子图, 则

$$\Omega(g) = (b, c, d).$$

为了看出怎样用移量算法来修改一个 EWC 网, 我们设 $C = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ 是有向 EWC 网的一个有向回路, 又设 $C' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_p)$ 是另一个有向回路, 使得对于 $r = 1, 2, \dots, p$, 边 e_r 和 e'_r 是相互平行且反向的, 如图 12-5-8 所示。可以看出, 有向回路 C 和 C' 的性质是: (1) $\Omega(C) = \Omega(C')$; (2) C 和 C' 的定向相反。现在, 从有向回路 C 的每一条边的边容量减去容量 δ , 在有向回路 C' 的每一条边的边容量中加上 δ , 就得到一个新的 EWC 网 G' , 如图 12-5-9 所示, 其中, c_r 和 c'_r 分别为边 e_r 和 e'_r 的

边容量, $r = 1, 2, \dots, p$. 这种改变边容量的算法称为移量算法. 利用这种算法, 可以证明, G 和 G' 的任意两顶点间的端限容量均相同.

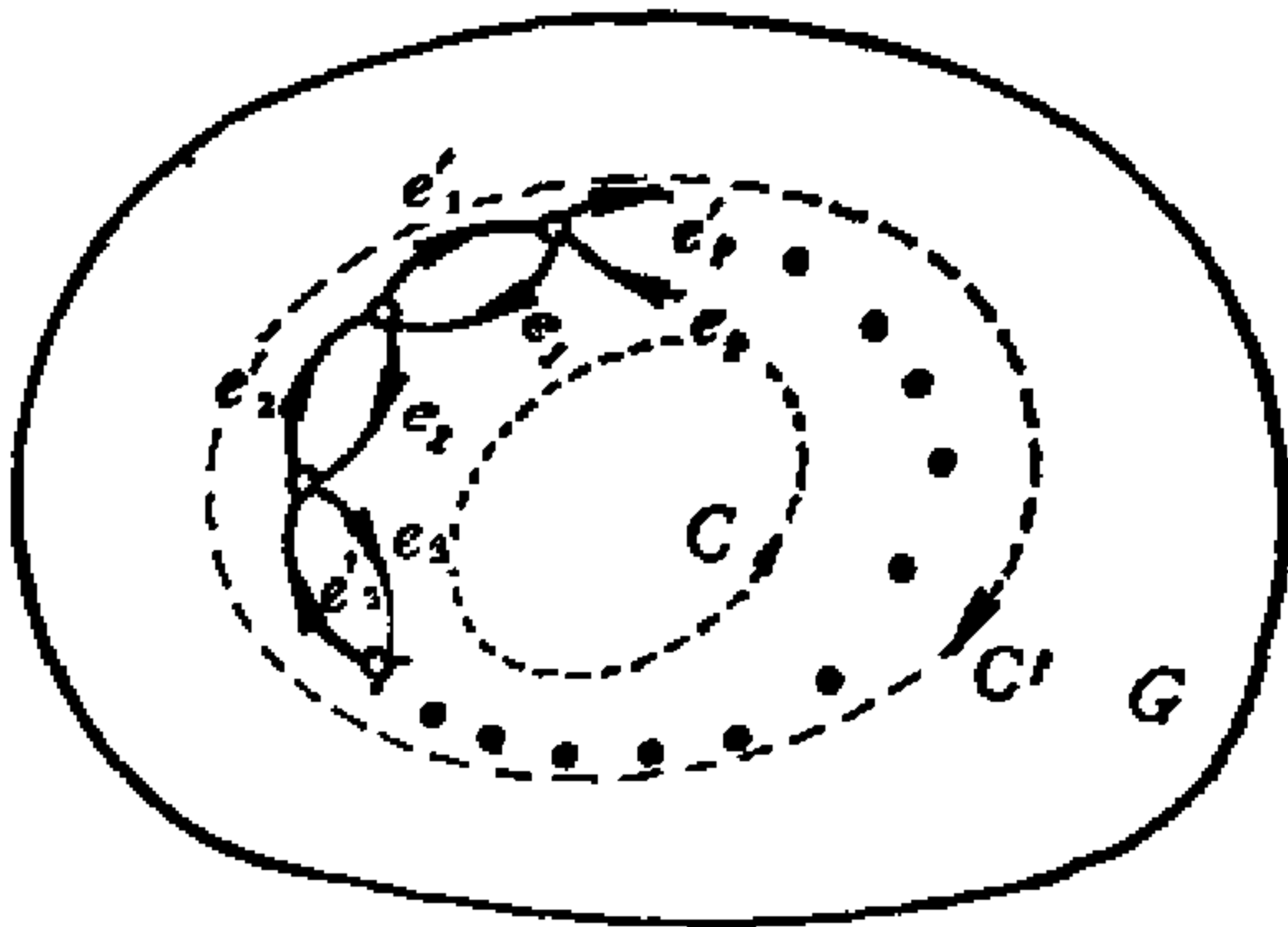


图12-5-8 有向EWC网 G

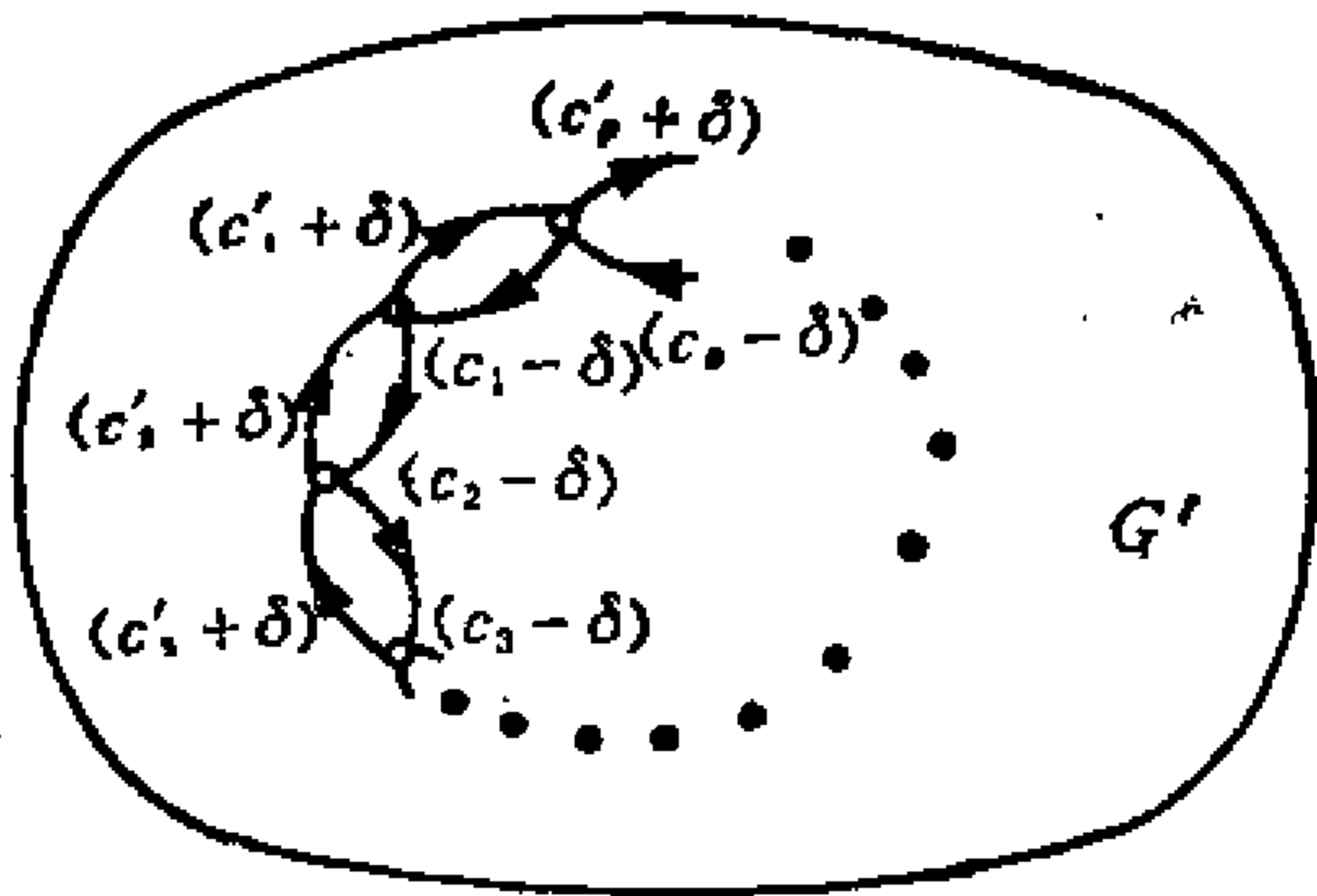


图12-5-9 有向EWC网 G'

根据式(12-5-4), 如果我们能证明 G 中每一个半割的值等于 G' 中对应半割的值, 那么就可以保证, G 和 G' 中任意两顶点间的端限容量都是相同的. 任取一个半割 s , 若 C 中的边都不在 s 中, 则 G 和 G' 中半割的值 $V(s)$ 显然是相同的. 现在, 设 S 是割

集, s 是 S 的两个半割之一。因为 C 是一个回路, 故 C 中有偶数 $(2k)$ 条边在 S 中, 又因 C 是一个有向回路, 故这些边有一半在半割 s 中, 即 C 有 k 条边在 s 中。同样, C' 中有 $2k$ 条边在 S 中, 有 k 条边在 s 中。因此, s 中容量增加 δ 的边的数目与容量减少 δ 的边的数目相等。这就说明, G 和 G' 中半割 s 的值 $V(s)$ 相等。

定理12-5-6 移量算法保持端限容量不变。

可以看出, 运用移量算法可以把一个 EWC 网的边容量变为负数。然而根据定义, 任何以负数为边容量的网络都不能称为 EWC 网, 因此我们引入伪 EWC 网的概念。

定义12-5-4 一个线图 G 是伪 EWC 网, 如果: (1) 在 G 中每条边 (被称为边容量) 的权都是实数; (2) 缺少一条边就相当于该边的权为零; (3) 对于 G 中每对顶点 i 和 j , 从 i 到 j 的端限容量 t_{ij} 非负, 其中 t_{ij} 定义为

$$t_{ij} = \min \{V(s_{p_{ij}}); \text{对于所有分离 } i \text{ 和 } j \text{ 的割集 } S_{ij} \text{ 的半割}\} \quad (12-5-27)$$

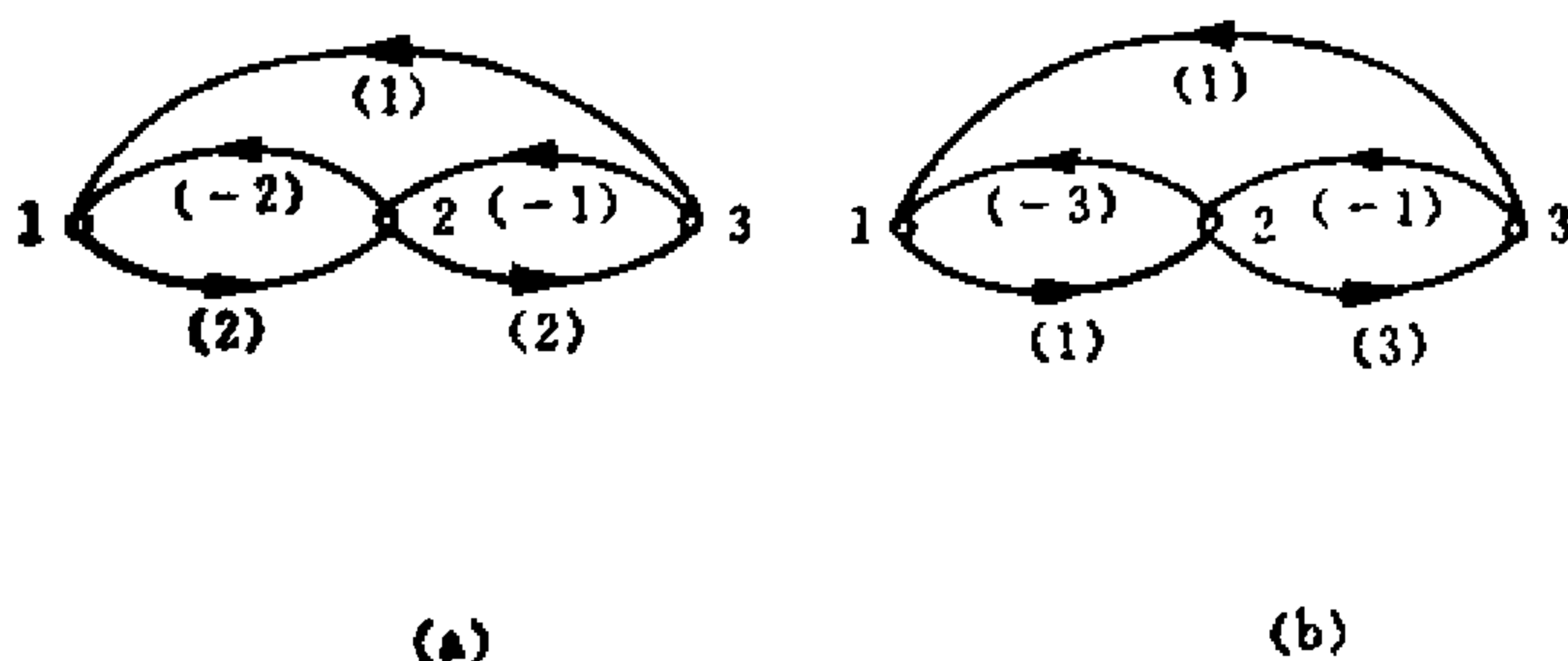


图 12-5-10

(a) 伪 EWC 网, (b) 非伪 EWC 网

例如, 图12-5-10(a)中的线图是一个伪 EWC 网; 图12-5-10(b)中的线图不是伪 EWC 网, 因为有一个半割 s_{21} 的值是负数。

伪 EWC 网的性质将导出端限容量矩阵的可实现性条件。在

研究该性质之前，我们来看看，是否可以通过逐次运用移量算法来使任一伪 EWC 网变成传输网络。换句话说，能用移量算法使一个伪 EWC 网中负的边容量变成非负数吗？答案是否定的，因为如图 12-5-11 所示的伪 EWC 网便不能用移量算法变成 EWC 网。但是，下面的定理说明，任何一个满足一简单约束条件的伪 EWC 网，可以用对移量算法作简单限制的方法来变成传输网络。

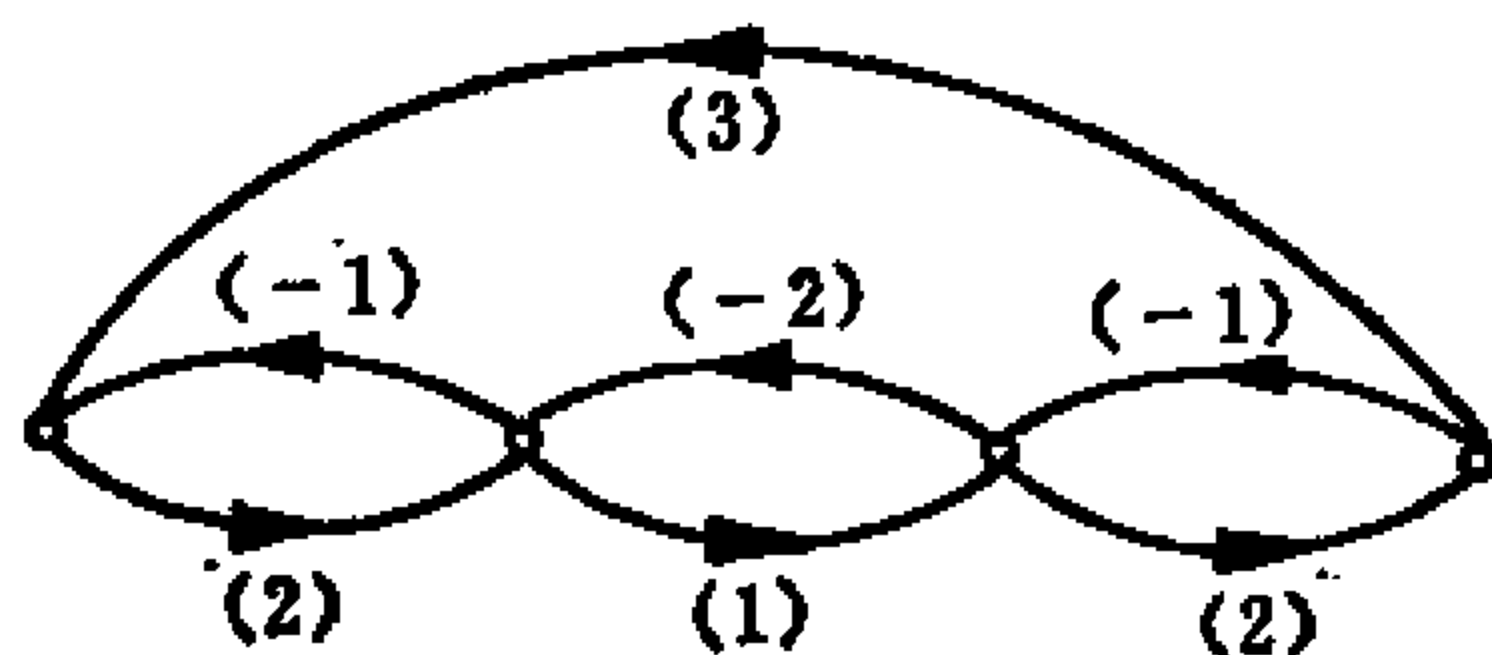


图12-5-11 伪 EWC 网

定理12-5-7 当且仅当伪 EWC 网 G 满足

$$c_{pq} + c_{qp} \geq 0 \quad \text{对所有的顶点 } p \text{ 和 } q \quad (12-5-28)$$

则 G 就可以用移量算法变成 EWC 网。

证明： 根据移量算法的定义，必要性是显然的，也就是说，从一个 EWC 网出发，经过移量算法得到的任何伪 EWC 网都满足上述条件。

为证明充分性，我们定义伪 EWC 网的伪指标 I 为

$$I = - \left(\sum_{(r)} c_r \right) \quad (12-5-29)$$

其中 c_r 是负的边容量， $\sum_{(r)}$ 表示“对所有的可能性求和”。换句话说， $-I$ 是所有负边容量之和。采用这个定义，若能证明，用移量算法由任一具有非零伪指标 I 的伪 EWC 网 G 产生伪 EWC 网 G' ，并使得 G' 的伪指标 I' 小于 I ，那么就能证明定理。

设 e_{pq} 是一条边容量为负数的边。则存在一条从顶点 p 到顶

点 q 的有向路径 P , 使每条边的边容量都为正数。如若不然, 就会有一个半割 s_{pq} , 其值为负数。设 $P = (e_{p1}, e_{12}, \dots, e_{kp})$, 如图 12-5-12 所示。又设 $c_{p1}, c_{12}, \dots, c_{kp}$ 分别为边 $e_{p1}, e_{12}, \dots, e_{kp}$ 的边容量。注意据假设 c_{qp} 是正的。由于 $c_{p1}, c_{12}, \dots, c_{kp}$ 和 c_{qp} 都是正的, 于是存在正数 δ , 使得

$$\delta = \min(c_{p1}, c_{12}, \dots, c_{kp}, c_{qp}) > 0 \quad (12-5-30)$$

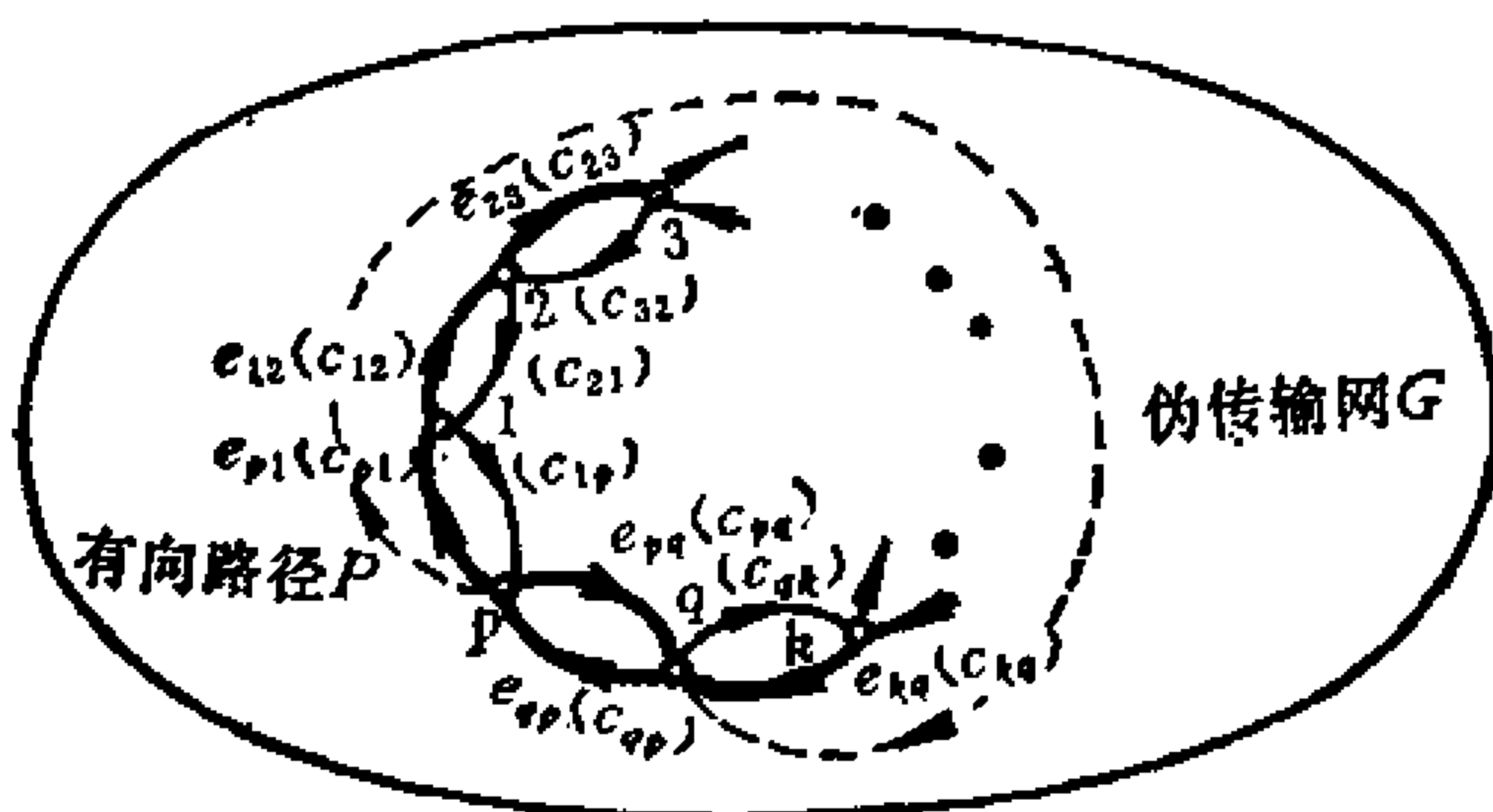


图12-5-12 伪 EWC 网和路径 P

现在, 我们可以把各边 $e_{qp}, e_{p1}, e_{12}, \dots, e_{kp}$ (它们组成一个有向回路) 的所有边容量都减去 δ , 而将各边 $e_{pq}, e_{qk}, \dots, e_{21}, e_{1p}$ (它们组成对应的有向回路) 的所有边容量都加上 δ , 如图 12-5-13 所示。以上的步骤就是移量算法, 而所得网络的伪指标显然小于原网络的伪指标。注意我们所考虑的伪 EWC 网的边数是有限的, 因而有向回路的数目也是有限的。因此, 若逐次将移量算法应用有限次, 就可以把伪指标减到零。 (证毕)

由定理 12-5-7, 我们就可叙述定理 12-5-8。

定理 12-5-8 如果存在一个满足式 (12-5-28) 的伪 EWC 网, 其端限容量矩阵为 T , 则 T 可以实现为有向 EWC 网的端限容量矩阵。

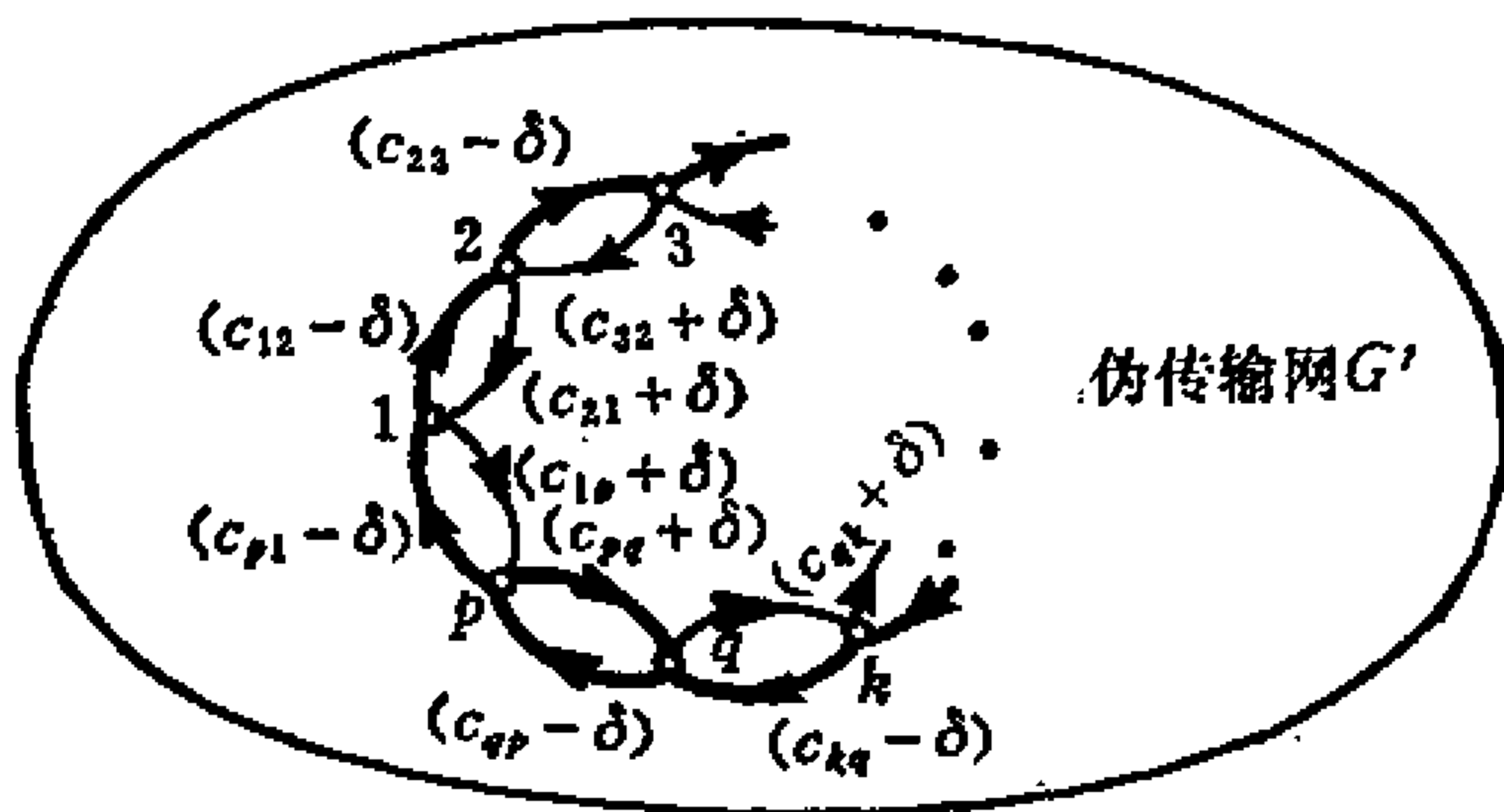


图12-5-13 用移量算法所得的网络

为了证明定理12-5-8的逆也是正确的，我们采用一种特殊的伪EWC网，称为基本结构网络 (fundamental structure). 为定义这种网络，我们用符号 e_{pq} 表示从顶点 p 到顶点 q 的边 (注意边的定向是从 p 到 q)。同样地，符号 c_{pq} 用来表示边 e_{pq} 的边容量。我们说顶点为 $1, 2, \dots, n$ 的伪EWC网 G 是基本结构网络 (或基本伪EWC网)，如果 G 满足以下条件：

1. 对于 $p < q$ ，不存在从 p 到 q ($q > p+1$) 的边。
2. 除了边 $e_{p+1,p}$ ($p=1, 2, \dots, n-1$) 外，所有的边容量都是正的。

3. 对于 $p=1, 2, \dots, n-1$ ， $c_{p+1,p} + c_{p,p+1} \geq 0$ 。例如，图12-5-14(a)的网络是基本结构网络，而图12-5-14(b)和(c)的网络却不是。这是因为，对于(b)中的网络， $c_{21} + c_{12} < 0$ ，这就违反了条件3；对于(c)中的网络，存在一条边 e_{13} ，这违反了条件1，而 e_{31} 的边容量是负的，违反了条件2。注意一个有向EWC网同时也是伪EWC网。

根据上面的定义，一个有 n 个顶点的基本伪EWC网必定有图12-5-15所示的结构。注意这个结构正好与图12-5-5中的有向

EW C网相同。

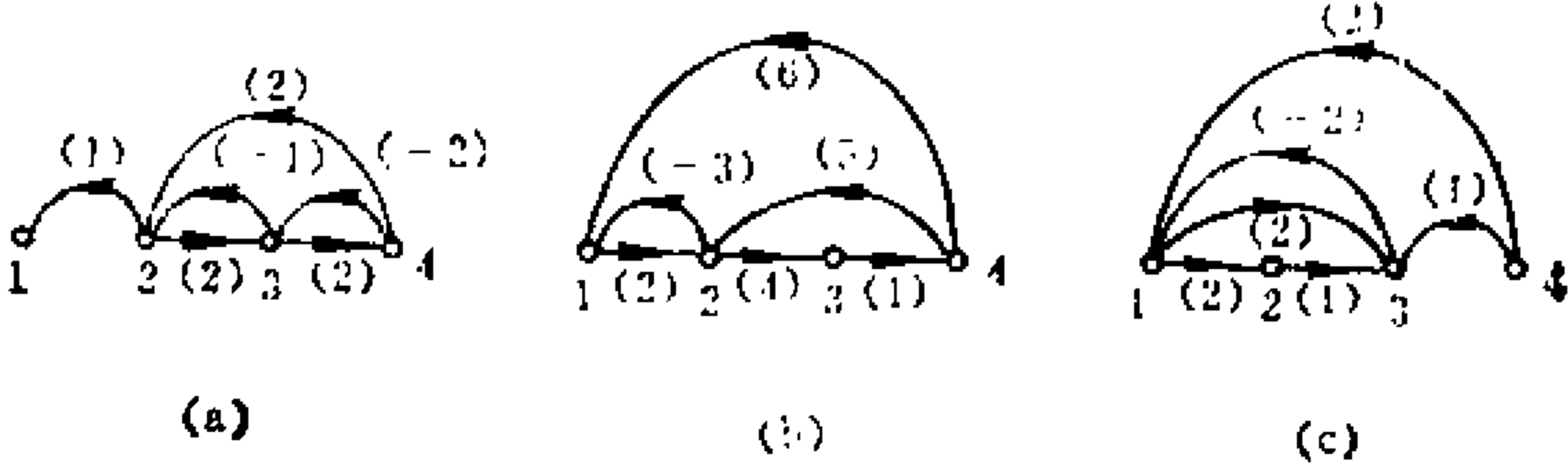


图12-5-14 伪传输网的例子

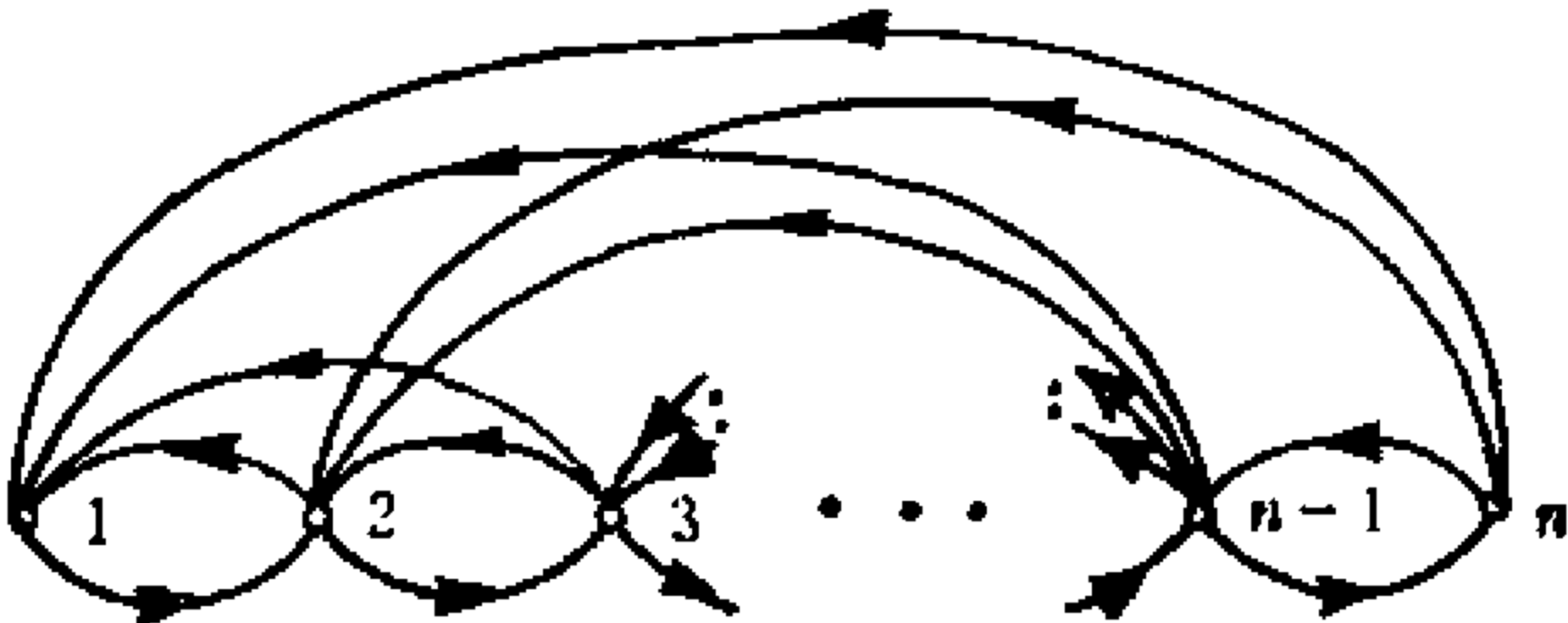


图12-5-15 基本结构网络

为了说明任何一个有向 EW C 网都可以用移量算法变成基本伪 EW C 网，首先回忆一下，我们可以对端限容量矩阵 T 和所有结果主子阵施行主分块划分。假定有向 EW C 网 G 的端限容量矩阵 T 已被主分块划分为

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n-1 \\ n \end{matrix} & \begin{bmatrix} \overline{d} & \overline{} & \overline{} & & & \\ \overline{} & \overline{d} & \overline{} & & & \\ \overline{} & \overline{} & \overline{d} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \overline{d} & \overline{} & \overline{} \\ & & & & & & \overline{} & \overline{d} & \overline{} \\ & & & & & & \overline{} & \overline{} & \overline{d} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

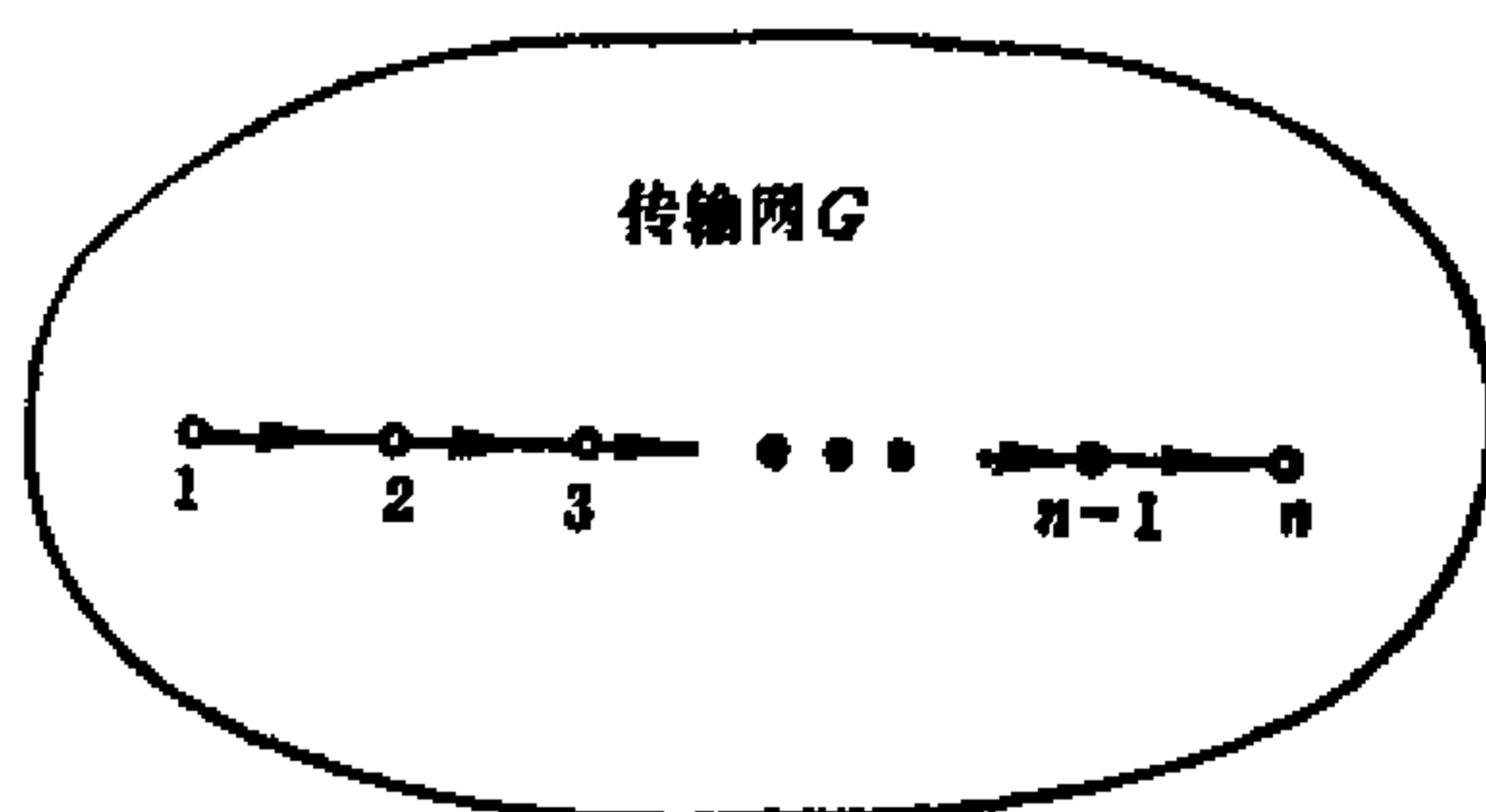


图12-5-16 一种画出 G 的特殊方法

我们这样来画出 EWC 网 G ，将其所有顶点画在一条直线上，顶点排列顺序与上面矩阵的列序一致，如图 12-5-16 所示。

例12-5-3 考虑图12-5-17中的有向 EWC 网 G 。 G 的端限容量矩阵划分的主分块为

$$T = \begin{array}{c|c|c|c|c} & i & j & k & p \\ \hline i & d & 5 & 4 & 2 \\ \hline j & 7 & d & 4 & 2 \\ \hline k & 6 & 6 & d & 2 \\ \hline p & 5 & 5 & 5 & d \end{array}$$

若按照端限容量矩阵的列序把网络重画出，则上面的 EWC 网就变成图 12-5-18 所示的样子。

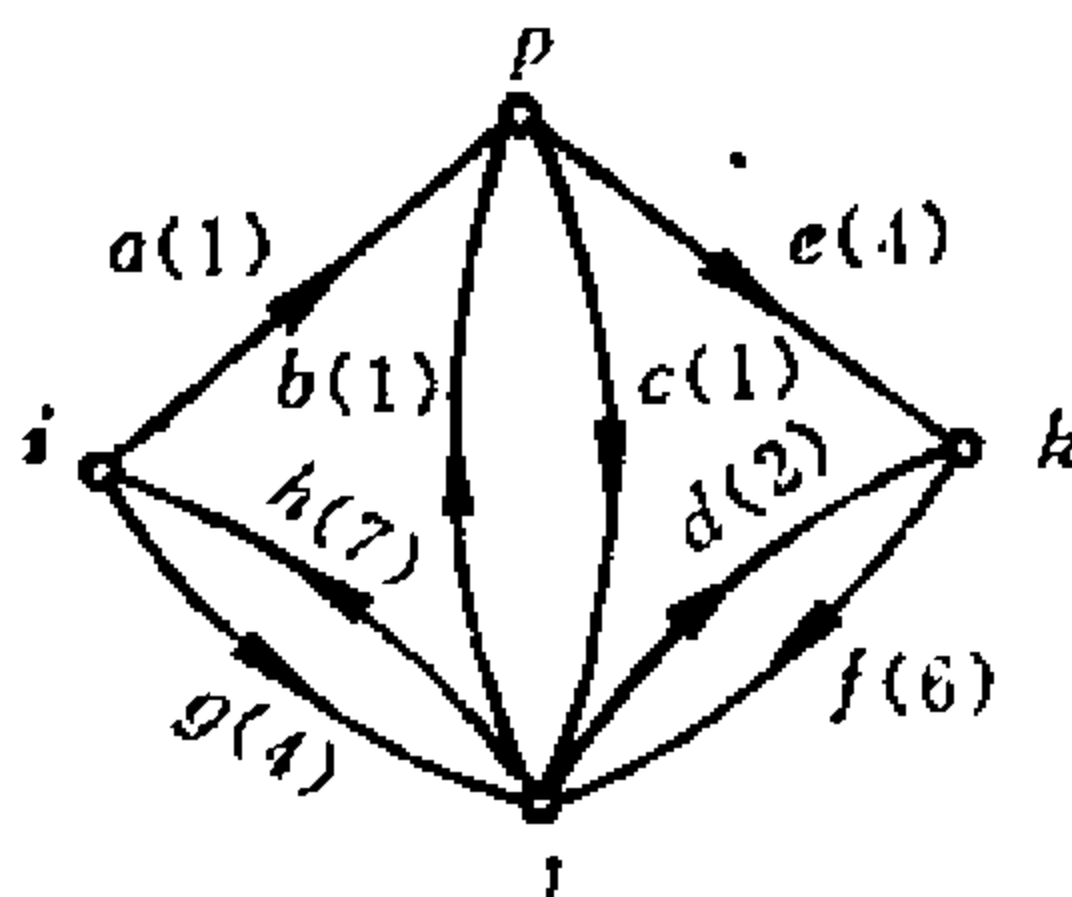


图12-5-17 一个有向EWC网

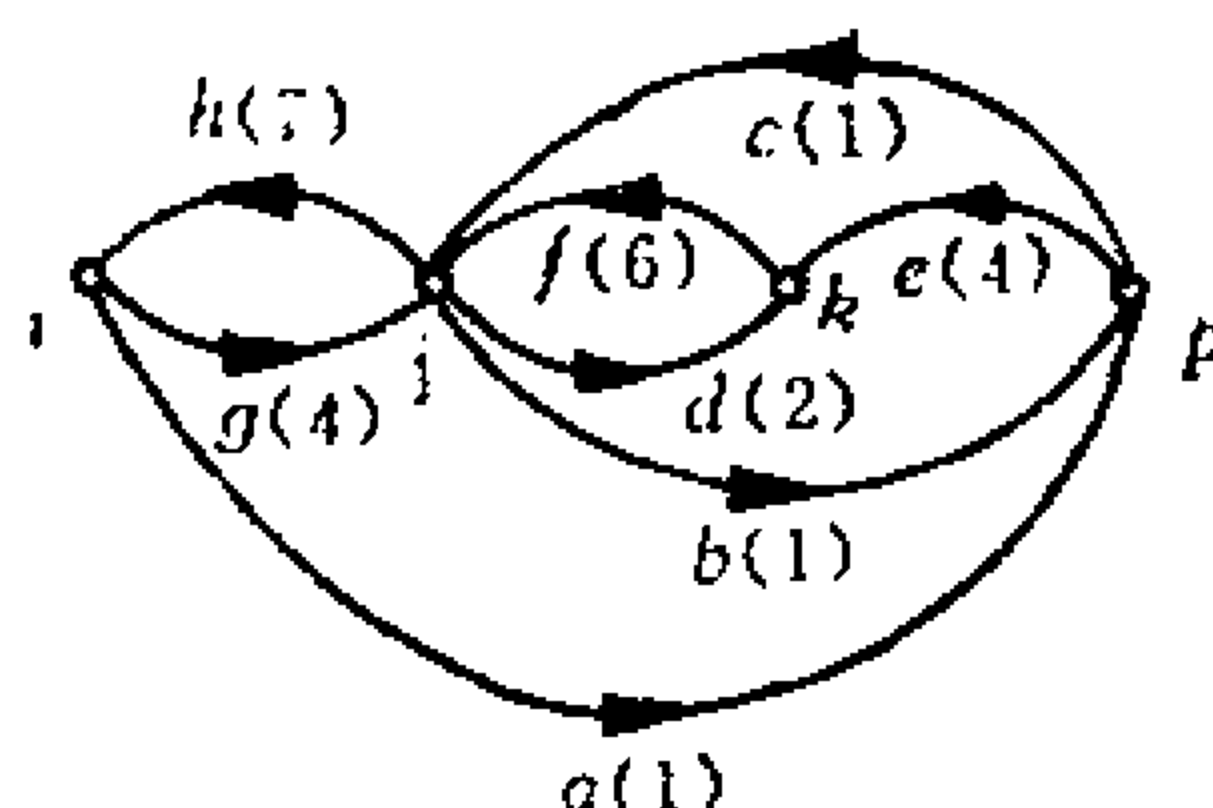


图12-5-18 G 的一种画法，其顶点顺序由 T 的列序给出

在图 12-5-16 的 EWC 网 G 中, 我们任取一条边 e_{pq} , 其中 $q > p+1$, 该边的边容量大于零. 为了进行移量算法, 我们选择回路 C 为 $(e_{pq}, e_{qq-1}, e_{q-1, q-2}, \dots, e_{p+1, p})$, 如图 12-5-19 所示.

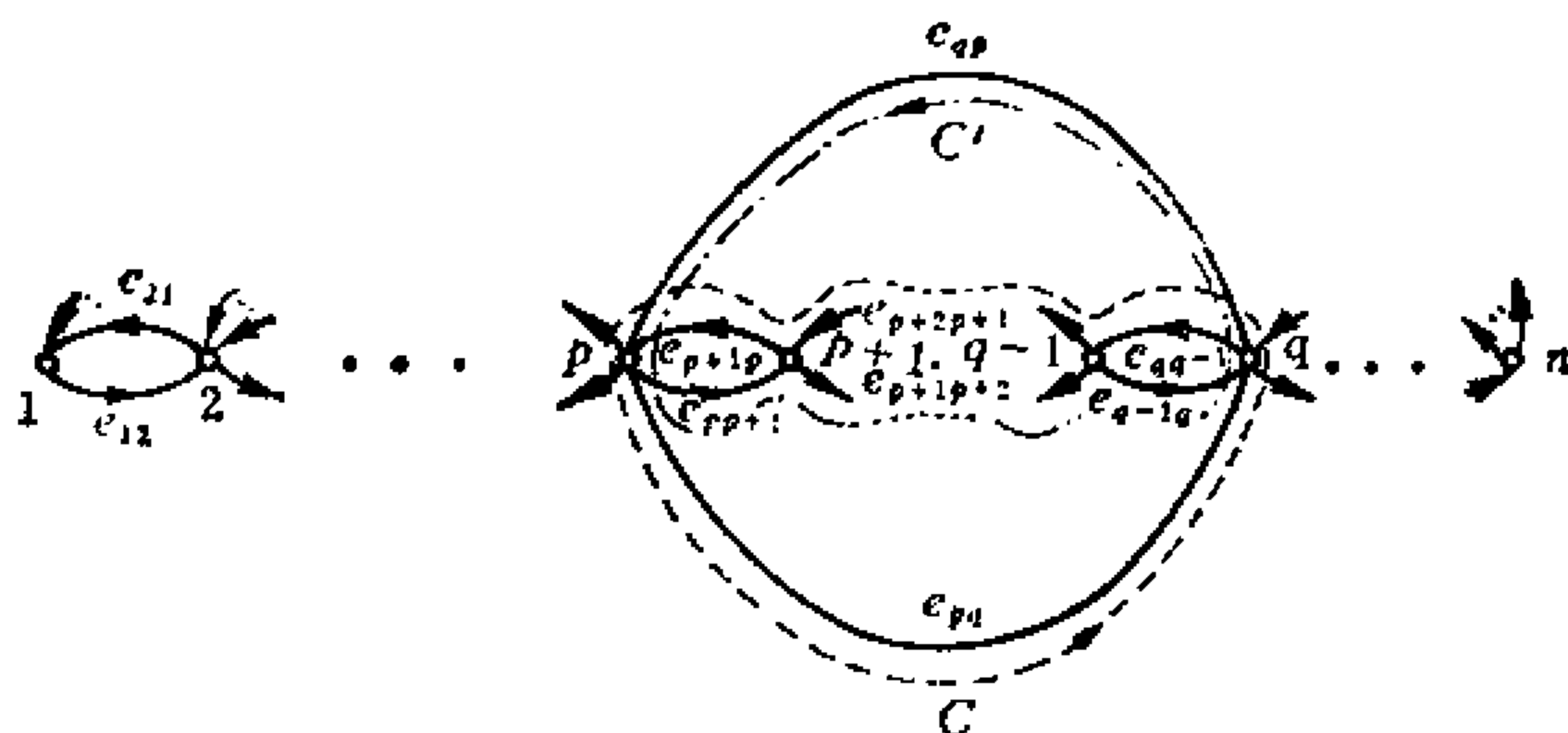


图12-5-19 有向回路 C 和对应有向回路 C'

对应的有向回路 C' 也示于图中. 现在我们运用移量算法, 从 C 的每条边的边容量中减去 c_{pq} , 使边 e_{pq} 的边容量变为零, 如图 12-5-19 所示. 注意, 我们同时在 C' 的每条边的边容量上加 c_{pq} . 按照这个步骤, 我们可以从网络中删去任意的边 e_{pq} , $q > p+1$. 反复运用上述步骤, 我们就可以删去所有边 e_{pq} , ($q > p+1$), 从而得到一个伪 EWC 网. 注意, 在运用该步骤时, 网络中有可能产生负的边容量. 然而, 容量为负数的边仅是从顶点 p 连接到顶点 $p-1$ 的边, $p=2, 3, \dots, n$. 并且, 在一个有向 EWC 网中, 边 e_{pp-1} 和 $e_{p-1, p}$ 的边容量之和 $S = c_{pp-1} + c_{p-1, p}$ 是非负的. 而且, 按照上述步骤, 当 e_{pp-1} 的边容量减去 $\delta (>0)$ 时, 边 $e_{p-1, p}$ 的边容量就要增加 δ , 因此总和 S 不变, 而所得的伪 EWC 网就是基本结构网络了.

定理12-5-9 任何一个有向 EWC 网 G 都可以变成基本伪 EWC 网 G' , 并且 G 和 G' 中边 e_{pq} 和 e_{qp} 的边容量之和相等.

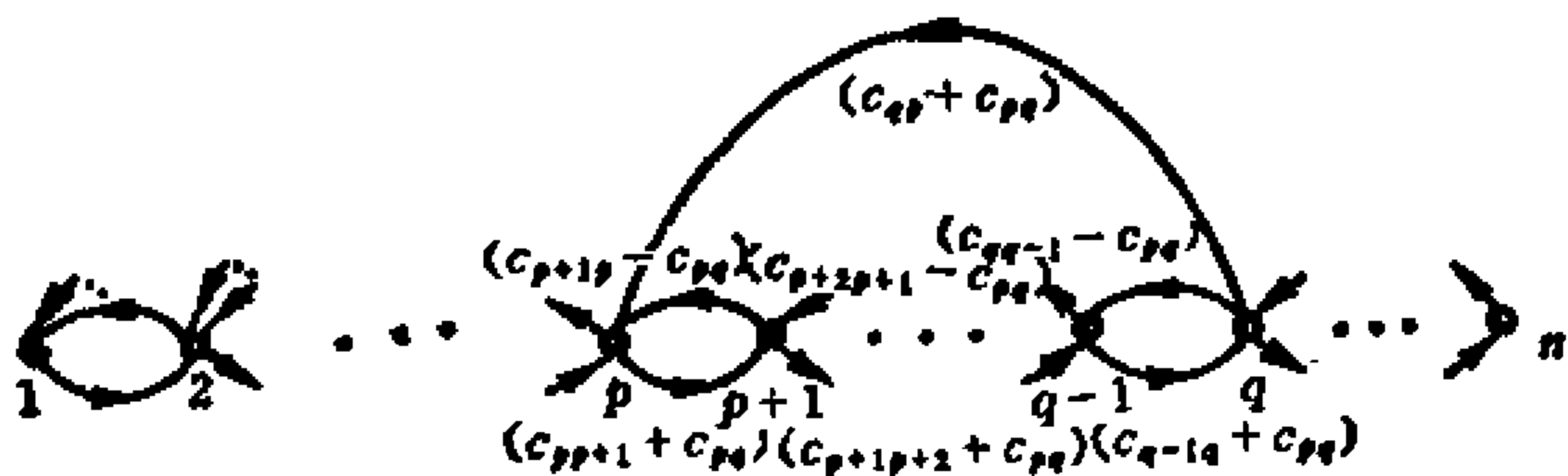


图12-5-20 移量算法的结果

例12-5-4 考虑图 12-5-18 中的EWC网 (例12-5-3). 取有向回路 C 和 C' 如图12-5-21所示, 我们可以用移量算法删去边 b , 如图 12-5-22 所示 (注意图中边容量的变化). 现在利用如图所示的有向回路 C_1 和 C'_1 , 就可以通过移量算法删去边 a , 得到如图12-5-23所示的基本伪EWC网.

我们知道, 任何一个有向EWC网都可以变成基本

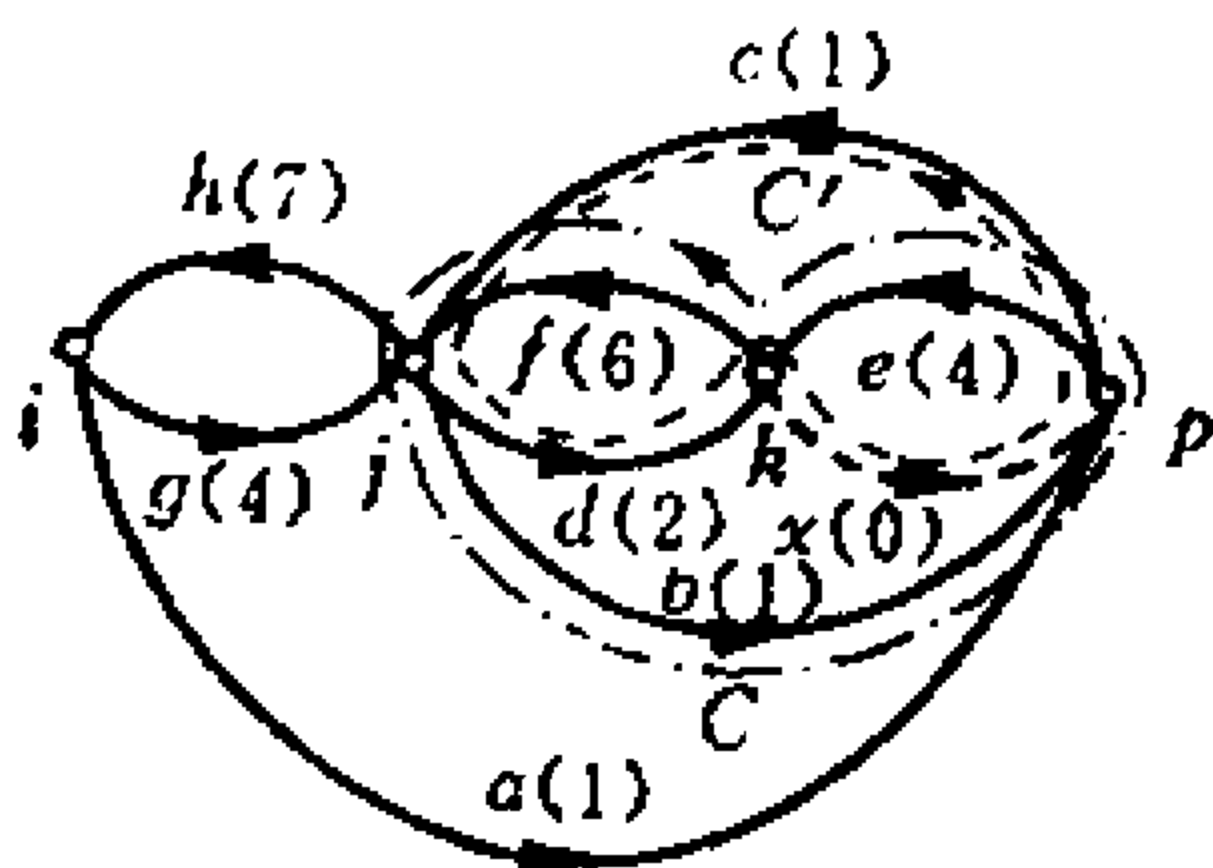


图12-5-21 有向回路 C 和 C'

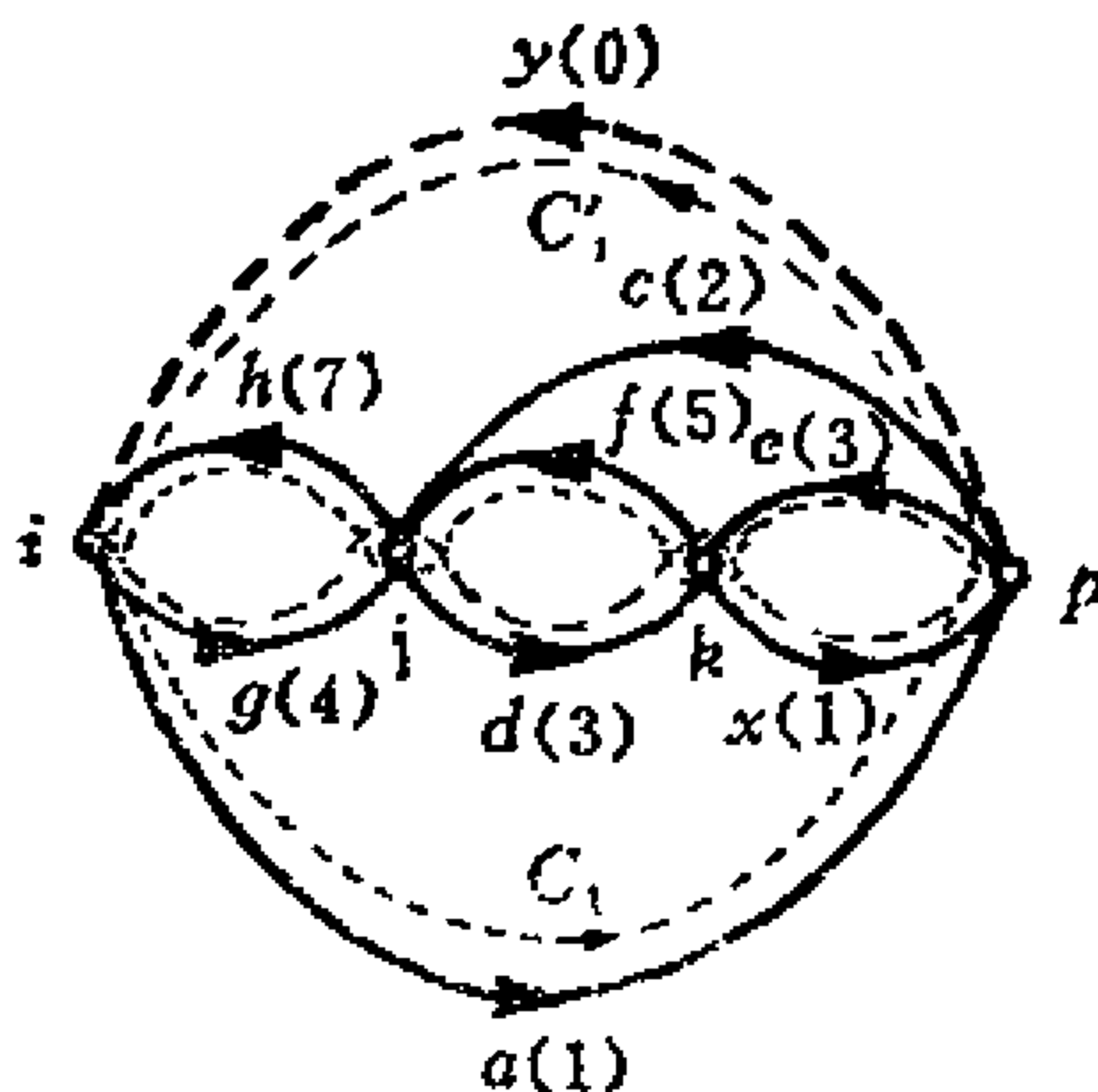


图12-5-22 有向回路 C_1 和 C'_1

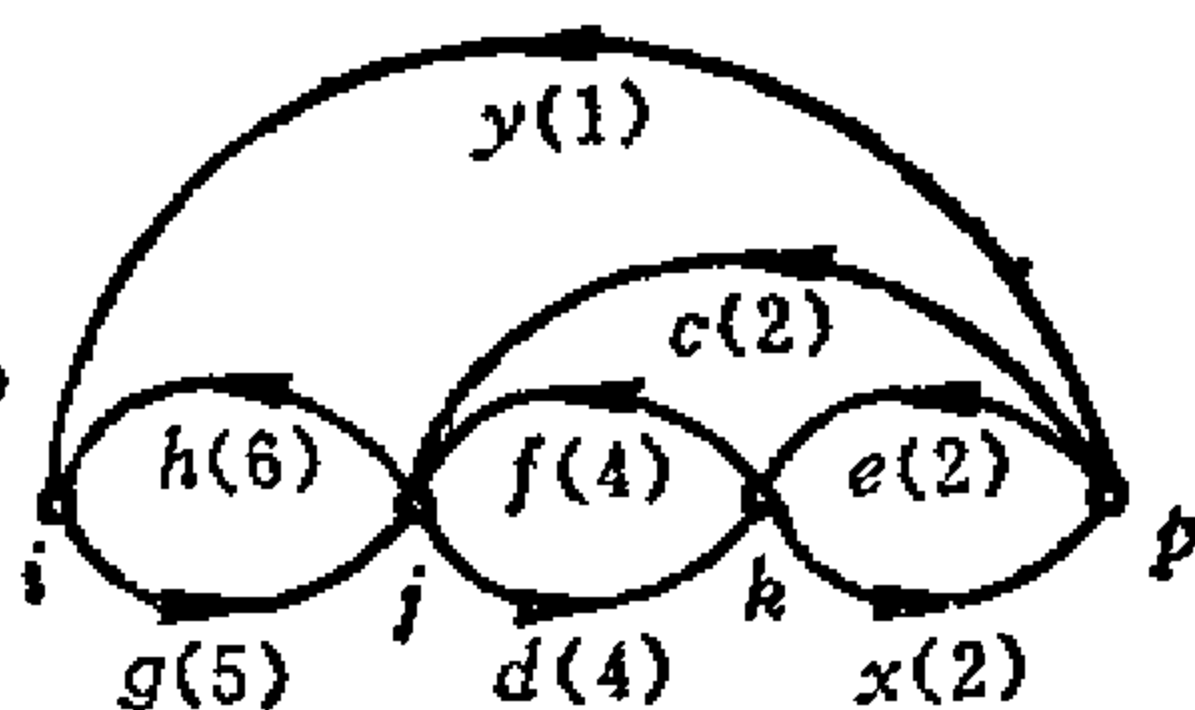


图12-5-23 一个基本伪EWC网

伪 EWC 网，因此可以将定理12-5-8修改为以下定理。

定理12-5-10 当且仅当存在一个满足式 (12-5-28) 的伪 EWC 网，其端限容量矩阵为给定矩阵 T 时，则 T 可实现为有向 EWC 网的端限容量矩阵。

12-6 损耗 EWC 网

在某些物理系统中，并非所有的流都能到达其终点。一个原因是，在系统中可能有亏损存在，例如管道的泄漏。为了表示这样的系统，我们来定义损耗有向 EWC 网，网络的每一条边赋以边效率 α_p ($0 \leq \alpha_p \leq 1$)。为理解边效率 α_p 的含义，我们假设边 e_p 是连接在顶点 k 和 m 之间的，其定向是由 k 到 m 。若流 ψ 由顶点 k 进入 e_p ，那么流 $\alpha_p \psi$ 经过边 e_p 后到达顶点 m 。因此，流 $(1 - \alpha_p)\psi$ 就可以看成边 e_p 所损耗的流。

为讨论损耗 EWC 网的性质，我们定义半割 s 的值 $V[s(c)]$ 和 $V[s(\alpha c)]$ 如下：

$$V[s(c)] = \sum_{e_p \in s} c_p \quad (12-6-1)$$

$$V[s(\alpha c)] = \sum_{e_p \in s} \alpha_p c_p \quad (12-6-2)$$

其中 α_p 和 c_p 分别为边 e_p 的边效率和边容量。

由于流的损耗是在边中发生的，于是可对损耗 EWC 网 G 分配流如下，设 $P_{r,ij}$ 是 G 中一条从顶点 i 和顶点 j 的有向路径，其边列为 (e_1, e_2, \dots, e_n) ，则分配一个流 $\psi_{r,ij}$ 给路径 $P_{r,ij}$ 就意味着对边 e_p ($p = 1, 2, \dots, n$) 增加的边流 $\psi'(e_p)$ 为

$$\psi'(e_1) = \psi_{r,ij}, \psi'(e_2) = \alpha_1 \psi'(e_1), \dots, \psi'(e_n) = \alpha_{n-1} \psi'(e_{n-1}) \quad (12-6-3)$$

这里 $\psi'(e_p)$ 必须满足以下条件:

$$\psi'(e_p) \leq c_p - \psi_0(e_p) \quad p = 1, 2, \dots, n \quad (12-6-4)$$

其中 $\psi_0(e_p)$ 是原来已分配给边 e_p 的流。因此, 分配给边 e_p 的全部流变成 $\psi'(e_p) + \psi_0(e_p)$ 。

设 $P_{1ij}, P_{2ij}, \dots, P_{mij}$ 是 G 中从顶点 i 到顶点 j 的所有可能有向路径, 那么为分配总流 $\psi_{ij} = \sum_{p=1}^m \psi_{p(ij)}$, 就可以将流 $\psi_{1ij}, \psi_{2ij}, \dots, \psi_{mij}$ 分别分配给 $P_{1ij}, P_{2ij}, \dots, P_{mij}$ 。显然, 分配给 G 的任何流 ψ_{ij} 都可以分解为分别分配给有向路径 $P_{1ij}, P_{2ij}, \dots, P_{mij}$ 的流 $\psi_{1ij}, \psi_{2ij}, \dots, \psi_{mij}$ 。

因为若设一个损耗有向 EWC 网的所有边效率 $\alpha_p = 1$, 它就变成 (无损耗) 有向 EWC 网, 所以损耗 EWC 网的任何依赖于 α 的性质, 都与无损耗网络的性质密切相关。我们将要说明, 和无损耗网络一样, 在损耗 EWC 网中, 存在一个确定最大流的割集。在损耗 EWC 网中, 饱和边, 饱和割集和基本饱和割集的定义与无损耗 EWC 网的相应定义是一样的。也就是说, 若进入边 e 的总边流 $\psi(e)$ 等于该边的边容量, 则说这条边是饱和的。如果分离 i 和 j 的割 S_{ij} 的半割 s_{ij} 中每条边都是饱和的, 则说 S_{ij} 是饱和的。并且, 如果饱和割集 S_{ij} 的半割 s_{ij} 的各条边上所通过的流为零, 则说 S_{ij} 是基本饱和割集。利用这些定义, 我们就可以讨论损耗 EWC 网了。

定理12-6-1 假定已将从顶点 i 到顶点 j 的流 ψ_{ij} 分配给损耗 EWC 网 G 。如果不存在分离 i 和 j 的饱和割集, 那么必存在一条从 i 到 j 的有向路径, 使得可以将一个附加流 $\psi > 0$ 分配给这条路径。

这个定理的证明与引理12-1-1的证明正好相同。从该证明可清楚地知道, 当我们分配一个流 ψ_{ij} 时, 如果存在一个分离 i 和 j 的饱和割集, 那么就不能再分配任一从 i 到 j 的附加非零流。

定理12-6-2 存在一个从 i 到 j 的流 ψ_{ij} ，如果将它分配给一个损耗有向 EWC 网，那么至少会产生一个基本饱和割集。

证明： 假定把一个流 ψ_{ij} 分配给一个损耗有向 EWC 网 G ，得到一些饱和割集 S_{ij} ，但这些割集都不是基本饱和割集。那么，采用与定理 12-1-1 的证明相同的步骤，就可以修改分配流 ψ_{ij} 的方式，使我们能够分配从 i 到 j 的附加流。可以证明，我们能够增加从 i 到 j 的流，直到出现一个分离顶点 i 和 j 的基本饱和割集为止。 (证毕)

对于无损耗 EWC 网的情况，若我们得到一个基本饱和割集 S_{ij} ，那么流 ψ_{ij} 就是最大流。另一方面，如果 EWC 网是有损耗的，即使分配流 ψ_{ij} 产生了一个基本饱和割集，这个流也不一定是最大流。这一点容易从下面的例子看出。考虑图 12-6-1 所示的损耗 EWC 网，图中每条边的旁边括弧中的第一个数字是边容量，而第二个数字是边效率。通过分配一个如图所示的流，使割集 $S_{ij} = (c)$ 成为基本饱和割集。但是，无论是进入顶点 i 的流还是离开顶点 j 的流，都不是最大流，因此我们可以分配一个从 i 到 j 的更大的流，如图 12-6-2 所示。

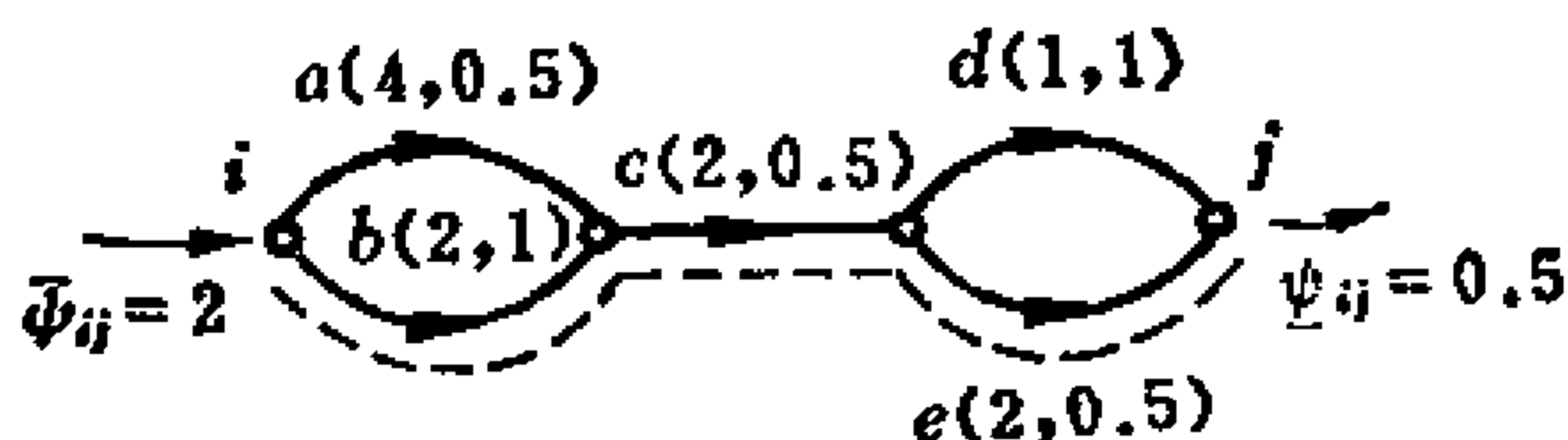


图12-6-1 损耗EWC网

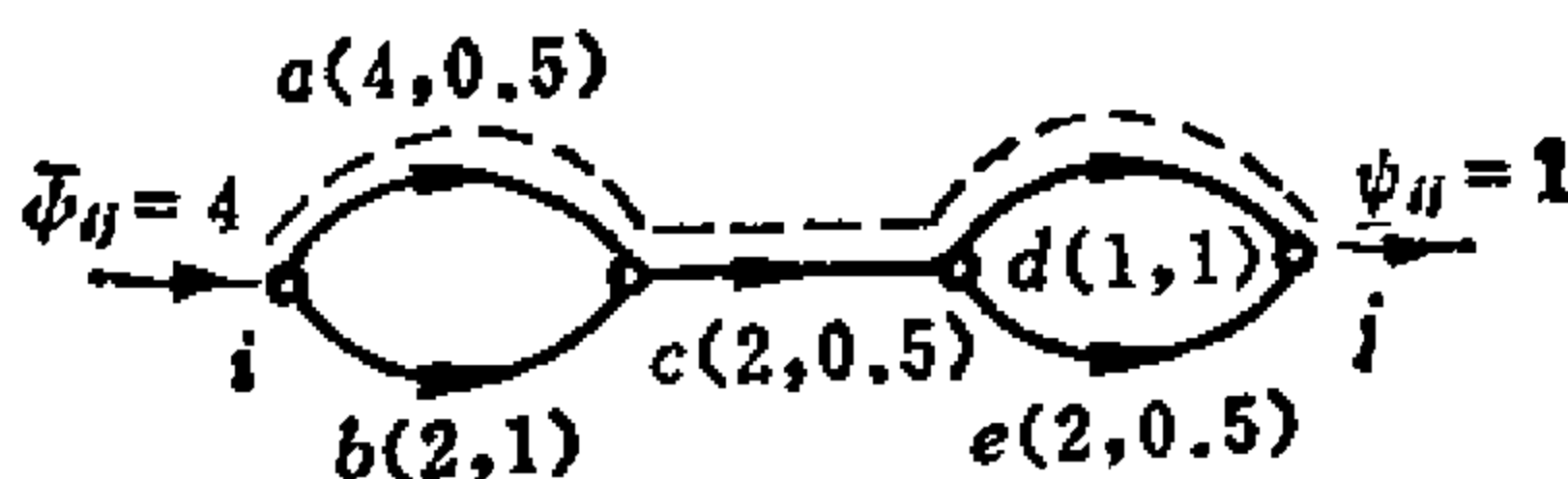


图12-6-2 分配给损耗EWC网的流 ψ_{ij}

这个例子表明，可以有許多种流 ψ_{ij} 可供分配，使我们都能得到基本饱和割集 S_{ij} ，并且，在分配流 ψ_{ij} 时，从顶点 i 进入的流 ψ_{ij} 与从顶点 j 出来的流不同。因此我们定义损耗 EWC 网的端限容量如下，它与无损耗 EWC 网的端限容量的定义稍有不同。

定义12-6-1 为了在顶点 j 接收到最大流，对网络 G 所能分配的从 i 到 j 的最大流 ψ_{ij} 称为源端限容量，记为 \bar{t}_{ij} 。当分配了一个最大流时，在顶点 j 所能接收到的最大流量称为汇端限容量，记为 \underline{t}_{ij} 。

必须注意，若网络中存在一个割集 S_{ij} ，以致在分配任何至少能产生一个基本饱和割集的流 ψ_{ij} 时，就可以使 S_{ij} 变成基本饱和割集，那么这个割集称为流 ψ_{ij} 的对应割集。因为在分配最大流 ψ_{ij} 时， S_{ij} 显然是一个基本饱和割集，所以我们说， S_{ij} 是源端限容量 \bar{t}_{ij} 和汇端限容量 \underline{t}_{ij} 的对应割集。根据这个定义，我们有另一个定理。

定理12-6-3 对于一个损耗有向 EWC 网的任意三顶点 i, j, k ：
有

$$\underline{t}_{ij} \geq \underline{t}_{ki} \quad (12-6-5)$$

或有

$$\bar{t}_{ij} \geq \bar{t}_{ik} \quad (12-6-6)$$

证明： 设 $S_{ij} = \mathcal{S}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1) \cup \mathcal{S}(\bar{\Omega}_1 \times \Omega_1)$ 是 \bar{t}_{ij} 和 \underline{t}_{ij} 的对应割集，其中 $i \in \Omega_1, j \in \bar{\Omega}_1$ 。设 $S_{ik} = \mathcal{S}(\Omega_2 \times \bar{\Omega}_2) \cup \mathcal{S}(\bar{\Omega}_2 \times \Omega_2)$ 是 \bar{t}_{ik} 的对应割集，其中 $i \in \Omega_2, k \in \bar{\Omega}_2$ 。又设 $S_{ki} = \mathcal{S}(\Omega_3 \times \bar{\Omega}_3) \cup \mathcal{S}(\bar{\Omega}_3 \times \Omega_3)$ 是 \underline{t}_{ki} 的对应割集，其中 $k \in \Omega_3, j \in \bar{\Omega}_3$ 。

情形 1 顶点 k 在 Ω_1 中。这里又分两种情况，取决于 $j \in \bar{\Omega}_2$ 或 $j \in \Omega_2$ 。

a. 当 $j \in \bar{\Omega}_2$ 时，有 $i \in \Omega_3$ 或 $i \in \bar{\Omega}_3$ ，如图 12-6-3 所示。对于

$i \in \Omega_3$, S_{ki} 和 S_{ji} 都必定是最大流 ψ_{ij} 的基本饱和割集, 因此

$$\underline{t}_{ij} = \underline{t}_{ki} \quad (12-6-7)$$

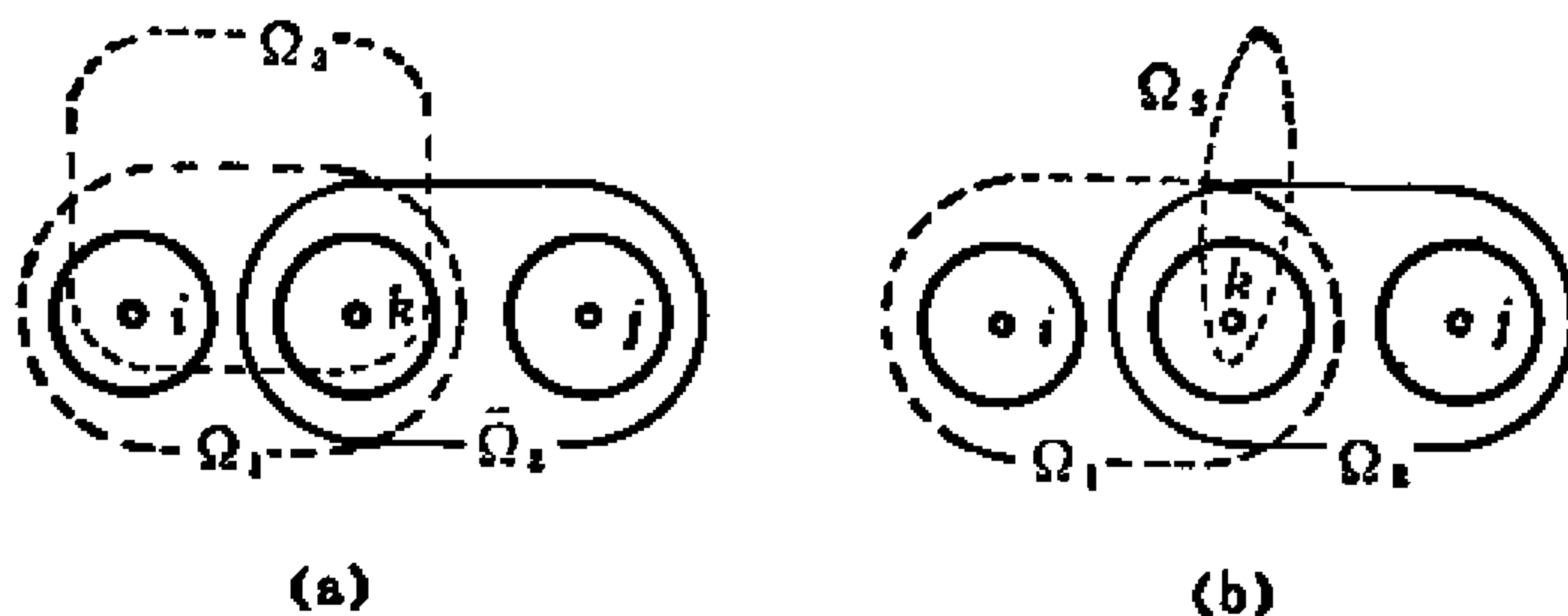


图12-6-3 饱和割集的位置

对于 $i \in \bar{\Omega}_3$, S_{ij} 可能是最大流 ψ_{ki} 的基本饱和割集, 但也可能不是. 因此

$$\underline{t}_{ij} \geq \underline{t}_{ki} \quad (12-6-8)$$

b. 当 $j \in \Omega_2$ 时, 情况取决于 $i \in \Omega_3$ 或 $i \in \bar{\Omega}_3$, 如图12-6-4所示. 对于 $i \in \Omega_3$, S_{ij} 必定也是最大流 ψ_{ki} 的基本饱和割集, 于是就有

$$\underline{t}_{ij} = \underline{t}_{ki} \quad (12-6-9)$$

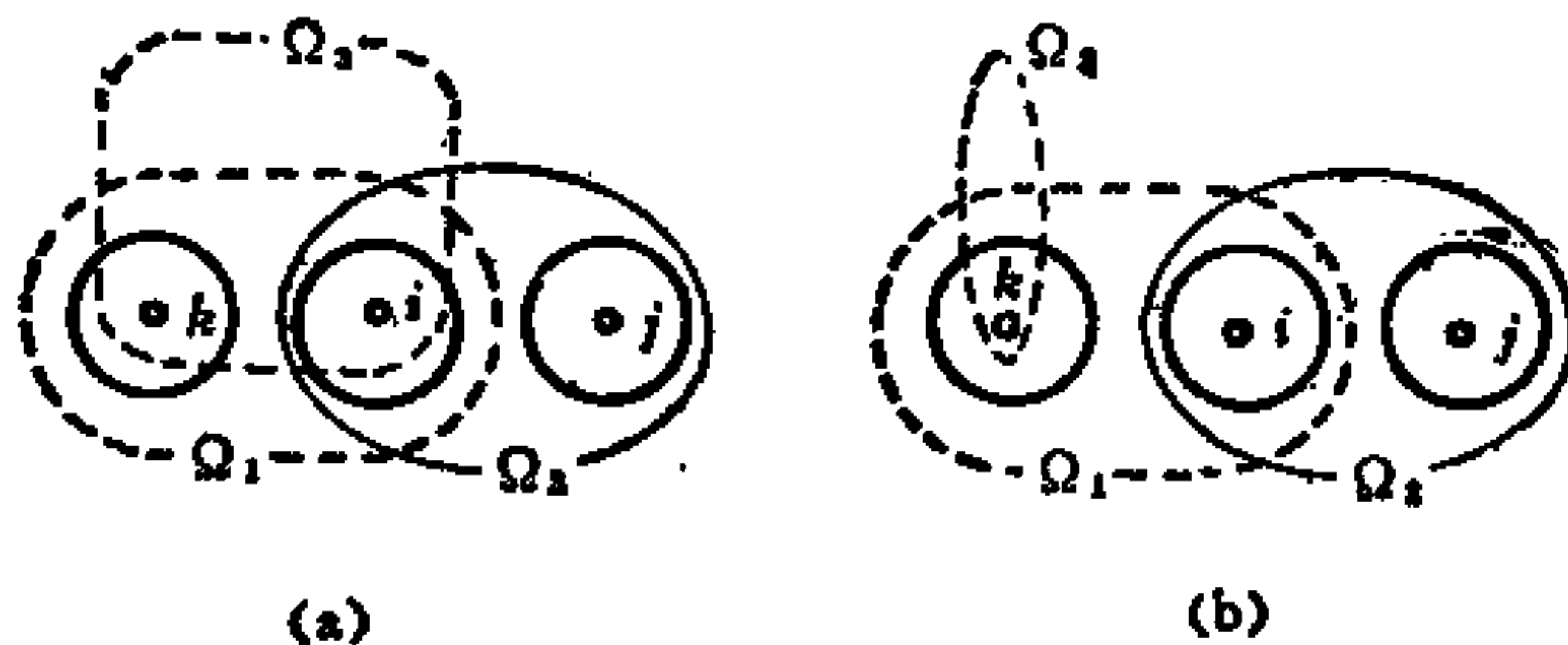


图12-6-4 饱和割集的位置

对于 $i \in \bar{\Omega}_3$, S_{ij} 不一定是 ψ_{kj} 的基本饱和割集, 因此

$$\underline{t}_{ij} \geq \underline{t}_{kj} \quad (12-6-10)$$

情形 2 顶点 k 在 $\bar{\Omega}_1$ 中. 我们只需考虑 $\bar{\Omega}_2 \subset \bar{\Omega}_1$ 的情形, 这样或有 $j \in \Omega_2$, 或有 $j \in \bar{\Omega}_2$. 假定 $j \in \Omega_2$, 如图 12-6-5 所示, 则 S_{ij} 不须是 ψ_{ik} 的基本饱和割集, 因此

$$\bar{t}_{ij} \geq \bar{t}_{ik} \quad (12-6-11)$$

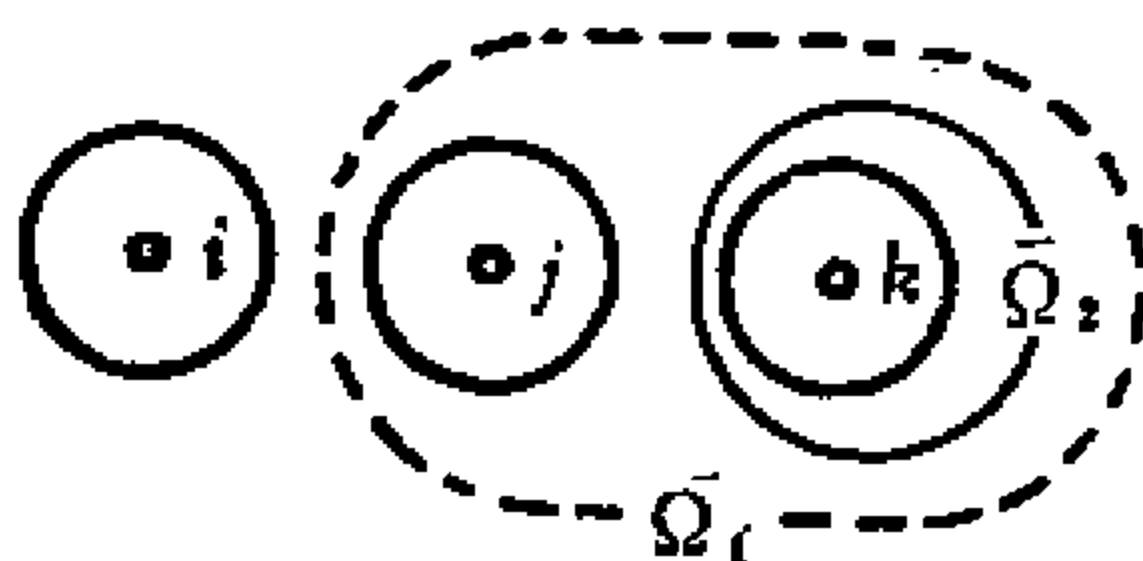


图12-6-5 基本饱和割集的位置

如果 $j \in \bar{\Omega}_2$, S_{ij} 也必定是对于 ψ_{ik} 的基本饱和割集, 因此

$$\bar{t}_{ij} = \bar{t}_{ik} \quad (12-6-12)$$

(证毕)

下面, 我们来定义与无损耗 EWC 网的端限容量矩阵类似的矩阵。

定义12-6-2 源端限容量矩阵 \bar{T} 定义为

$$\bar{T} = [\bar{t}_{ij}] \quad (12-6-13)$$

而汇端限容量矩阵 \underline{T} 定义为

$$\underline{T} = [\underline{t}_{ij}] \quad (12-6-14)$$

其中 $\bar{t}_{ii} = \underline{t}_{ii} = d$, 注意, 即使损耗 EWC 网是无向的, \bar{T} 和 \underline{T} 一般也不是对称的。

正如在无损耗 EWC 网中所定义的一样, 我们定义 \bar{T} 的 S 子阵 \bar{M} 为: 对所有的 i , 划去 \bar{T} 的 i 行或 i 列得到的子阵. 对 \underline{T} 的 S 子阵 \underline{M} 也可用同样的方法下定义. 我们把 S 子阵 \bar{M} 和 \underline{M} 称为 \bar{T} 和 \underline{T}

的“ S 子阵对”，如果它们满足：(1)若 \underline{T} 的 i 行在 \bar{M} 中，则 \underline{T} 的 i 行也在 \underline{M} 中；(2)若 \underline{T} 的 j 列在 \bar{M} 中，则 \underline{T} 的 j 列也在 \underline{M} 中。根据这些定义，我们可以得到源端限容量矩阵与汇端限容量矩阵的性质如下。

定理12-6-4 对于 \underline{T} 和 \bar{T} 的任何元素 $\underline{t}_{r,s}$ 和 $\bar{t}_{r,s}$ ，存在 \underline{T} 和 \bar{T} 的一对 S 子阵 \underline{M} 和 \bar{M} ，使得 $\underline{t}_{r,p}$ 是 \underline{M} 中 p 列（对所有的 p ）的最大元素， $\bar{t}_{q,s}$ 是 \bar{M} 中 q 行（对所有的 q ）的最大元素。

证明：设 $S_{r,s} = \mathcal{S}(\Omega_r \times \bar{\Omega}_s) \cup \mathcal{S}(\bar{\Omega}_s \times \Omega_r)$ 是 $\bar{t}_{r,s}$ 的对应割集，其中 $r \in \Omega_r$ ， $s \in \bar{\Omega}_s$ 。设 \underline{M} 和 \bar{M} 是 \underline{T} 和 \bar{T} 的 S 子阵对，它们的行对应于 Ω_r 中的顶点，它们的列对应于 $\bar{\Omega}_s$ 中的顶点。那么，由定理12-6-3的证明，我们有

$$\underline{t}_{r,s} \geq \underline{t}_{k,s} \quad \text{对所有 } k \in \Omega_r \quad (12-6-15)$$

以及

$$\bar{t}_{r,s} \geq \bar{t}_{r,k} \quad \text{对所有 } k \in \bar{\Omega}_s \quad (12-6-16)$$

因此，对 \underline{M} 的列 s 和 \bar{M} 的行 r ，定理是正确的。

考虑 $\underline{t}_{r,p}$ ，其中 $p \in \bar{\Omega}_r$ 。设 $S_{r,p} = \mathcal{S}(\Omega_{r'} \times \bar{\Omega}_p) \cup \mathcal{S}(\bar{\Omega}_p \times \Omega_{r'})$ 是 $\bar{t}_{r,p}$ 的对应割集，其中 $r \in \Omega_{r'}$ ， $p \in \bar{\Omega}_p$ 。如果 $S_{r,s}$ 不是对于 $\underline{t}_{r,p}$ 的基本饱和割集，那么 $\bar{\Omega}_p$ 是 $\bar{\Omega}_s$ 的子集。因而对所有 $k \in \Omega_r \subset \Omega_{r'}$ ， $\underline{t}_{r,p} \geq \underline{t}_{k,p}$ 。另一方面，如果 $S_{r,s}$ 是在 $\underline{t}_{r,p}$ 下的基本饱和割集，我们将 $S_{r,s}$ （而不是将 $S_{r,p}$ ）看作是 $\underline{t}_{r,p}$ 的对应割集，因此

$$\underline{t}_{r,p} \geq \underline{t}_{k,p} \quad \text{对所有 } k \in \Omega_r \quad (12-6-17)$$

所以 $\underline{t}_{r,p}$ 是 \underline{M} 中 p 列（对所有的 p ）的最大元素。对于 $\bar{t}_{q,s} \geq \bar{t}_{q,k}$ （对所有 $k \in \bar{\Omega}_s$ ）的证明与上面的证明几乎是相同的。（证毕）

注意，对于无损耗情况，定理12-6-4变为在定理12-5-4中所给出的端限容量矩阵的 S 子阵条件。

现在，我们已经介绍了损耗 EWC 网的一些基本性质。然而

还有许多问题尚待解决。其中最重要的问题之一是确定一个矩阵实现为损耗EWC网的 \underline{T} 或 \bar{T} 的可实现性条件。要计算 \underline{t}_{ij} 和 \bar{t}_{ij} 的值,还没有简单的方法。在某些损耗EWC网中,一个从 i 进入的,比 \bar{t}_{ij} 小的流,到达 j 时有可能变成与 \underline{t}_{ij} 相等的流。因此,我们可以定义 \bar{t}_{ij} 为使 j 点接收到的流等于 \underline{t}_{ij} ,在 i 点需进入的最小流。那么容易看出,定理12-6-3对 \bar{t}_{ij} 和 \underline{t}_{ij} 也是成立的。如果我们定义 $\bar{\bar{T}} = [\bar{t}_{ij}]$,则定理12-6-4对于 $\bar{\bar{T}}$ 和 \underline{T} 都将成立。

显然,本节给出的每个定理都可应用于无向损耗EWC网。但是,在定义上必须作某些修改。例如,基本饱和割集的定义就应修改。

12-7 EWC网的流可靠度

当一个EWC网的边在传输中可能失效时,就不能指望一个给定的流总能全部到达终点。但是,在大部分时间里,这个流中的一部分有可能到达终点。在网络可能失效的情况下,一个给定流可以期望它到达终点的部分所占的百分比叫做流可靠度,它依赖于EWC网的(拓扑)结构,边可靠度,流量以及所给流的起点和终点等因素。为了得到流可靠度的表达式,考虑一个代表实际系统的EWC网 G ,例如数据传输系统。在这样的系统中,流 ϕ_{ij} 表示单位时间内从 i 到 j 的数据传输量。假定 ϕ_{ij} 是由 G 在时期 T 内传输的流,则 G 在 T 时期内所处理的总流应为

$$\Phi_{ij} = T\phi_{ij} \quad (12-7-1)$$

如果 ϕ_{ij} 等于 G 中从 i 到 j 的最大流(即端限容量 t_{ij}),则总流为

$$\Phi_{ij} = Tt_{ij} \quad (12-7-2)$$

显然,这就是 T 时期内从 i 到 j 的最大流量。

假定在 T 时期内,有 ΔT 时段,边 e 因失效不能传输数据了,

而在同一时期 T 内其他所有边都工作正常。那么，在连续传输最大流的情况下，总流 $\Phi_{ij}(\bar{e})$ 为

$$\Phi_{ij}(\bar{e}) = T t_{ij} - \Delta T [t_{ij} - t_{ij}(\bar{e})] \quad (12-7-3)$$

其中 $t_{ij}(\bar{e})$ 是从 G 中去掉边 e 后由 i 到 j 的最大流。在 ΔT 时段内边 e 失效时的总流 $\Phi_{ij}(\bar{e})$ 与无失效的总流 Φ_{ij} 之比 $R(t_{ij})$ 为

$$R(t_{ij}) = 1 - \frac{\Delta T}{T} \left[1 - \frac{t_{ij}(\bar{e})}{t_{ij}} \right] \quad (12-7-4)$$

例12-7-1 考虑图 12-7-1 的 EWC 网，假定在 $T = 10$ 的时间内传输的流 $\phi_{ij} = t_{ij} = 3$ ，则总流 $\Phi_{ij} = 30$ 。假定边 a 在 T 时期内失效的时间 $\Delta T = 3$ ，则总流 $\Phi_{ij}(\bar{a}) = 27$ ，这种情况的 $R(t_{ij})$ 就是 0.9。

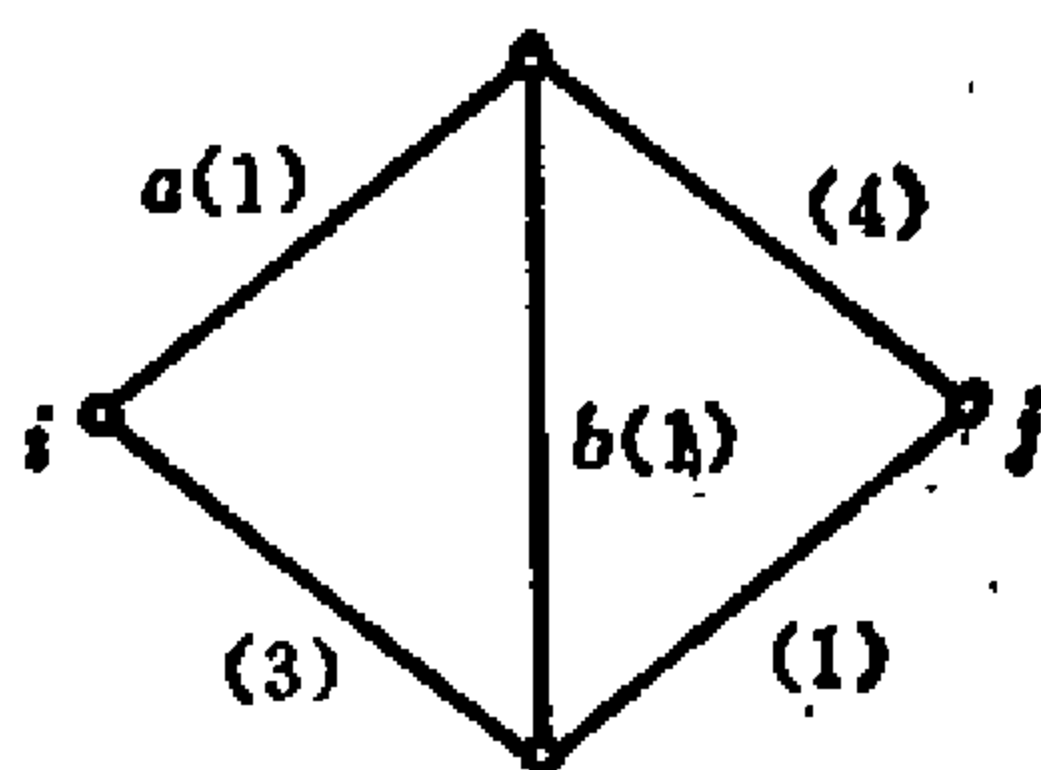


图12-7-1 EWC网

若用边 e 的失效概率 $f(e)$ 代替 $\Delta T/T$ ，式 (12-7-4) 就变为

$$R(t_{ij}) = 1 - f(e) [1 - T(\bar{e})] \quad (12-7-5)$$

其中

$$T(\bar{e}) = \frac{t_{ij}(\bar{e})}{t_{ij}} \quad (12-7-6)$$

这里 $T(\bar{e})$ 称为边 e 失效时的阈级。为了求出在若干条边都可能失效的情况下的 $R(t_{ij})$ ，我们定义符号 $T(\overline{e_{p_1} e_{p_2} \cdots e_{p_k}})$ 如下。

定义12-7-1 符号 $T(\overline{e_{p_1} e_{p_2} \cdots e_{p_k}})$ 表示边 $e_{p_1}, e_{p_2}, \cdots, e_{p_k}$ 失效时的阈级，它等于

$$T(\overline{e_{p_1} e_{p_2} \cdots e_{p_k}}) = \frac{t_{ij}(\overline{e_{p_1} e_{p_2} \cdots e_{p_k}})}{t_{ij}} \quad (12-7-7)$$

其中 $t_{ij}(\overline{e_{p_1} e_{p_2} \cdots e_{p_k}})$ 是在删去边 $e_{p_1}, e_{p_2}, \cdots, e_{p_k}$ 时从 i 到 j 的最大流。

例如, 在图12-7-1中, 边 a 失效时的阈级为 $T(\bar{a}) = \frac{2}{3}$. 在同一图中, 边 a 和 b 都失效时的阈级为 $T(\overline{ab}) = \frac{1}{3}$.

当网络 G 中每条边的失效概率为 $f(e_p)$ (或可靠度 $r(e_p) = 1 - f(e_p)$) 时, 传输最大流时的 $R(t_{ij})$ 为

$$R(t_{ij}) = 1 - \sum F(e_{p_1} e_{p_2} \cdots e_{p_k}) [1 - T(\overline{e_{p_1} e_{p_2} \cdots e_{p_k}})] \quad (12-7-8)$$

其中 $F(e_{p_1} e_{p_2} \cdots e_{p_k})$ 是恰有边 $e_{p_1}, e_{p_2}, \cdots, e_{p_k}$ 失效的概率, \sum 表示对边失效的所有可能情况求和. 式(12-7-8)称为“传输最大流下的流可靠度”.

例12-7-2 考虑图 12-7-2 中的EWC网, 设输入点为 i , 输出点为 j , 阈级为

$$T(\bar{a}) = \frac{1}{5}, \quad T(\bar{b}) = \frac{4}{5}, \quad T(\bar{c}) = 0, \quad T(\overline{ab}) = 0, \\ T(\overline{ac}) = 0, \quad T(\overline{bc}) = 0, \quad T(\overline{abc}) = 0$$

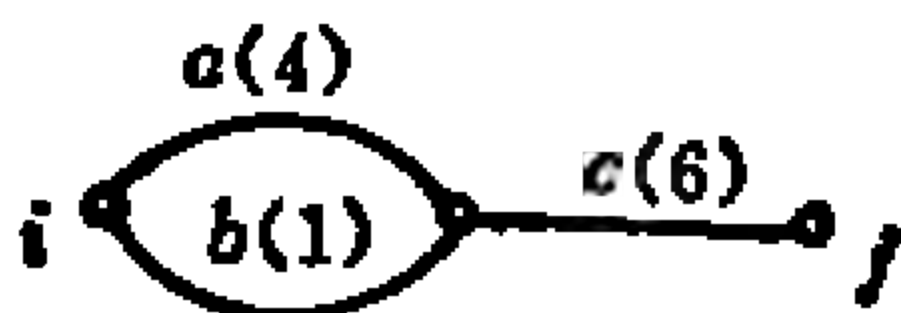


图12-7-2 EWC网

设每一条边的失效概率为

$$f(a) = 0.1, \quad f(b) = 0.2, \quad f(c) = 0.3$$

则在式(12-7-8)中用到的失效概率为

$$F(a) = 0.056, \quad F(b) = 0.126, \quad F(c) = 0.216$$

$$F(ab) = 0.014, \quad F(ac) = 0.024, \quad F(bc) = 0.054$$

$$F(abc) = 0.006$$

因此传输最大流 $t_{ij} = 5$ 下的流可靠度为

$$R(t_{ij}) = 0.616$$

假定我们不是传输最大流而是传输流 $\psi_{ij} \leq t_{ij}$ 。又假定只有一条边 e 在 ΔT 内失效。则式(12-7-3)变为

$$\Phi_{ij}(\bar{e}) = T\psi_{ij} - \Delta T[\psi_{ij} - \psi_{ij}(\bar{e})] \quad (12-7-9)$$

其中

$$\psi_{ij}(\bar{e}) = \min\{\psi_{ij}, t_{ij}(\bar{e})\} \quad (12-7-10)$$

此式之所以正确是因为若 $\psi_{ij} \leq t_{ij}(\bar{e})$ ，则再分配一个给定流时，边 e 的失效不会影响 ψ_{ij} 的传输。另一方面，若 $\psi_{ij} > t_{ij}(\bar{e})$ ，则网络除 e 外的剩余部分所能负荷的最大流显然就不是 ψ_{ij} ，而是 $t_{ij}(\bar{e})$ 。这个结果是假设网络中没有储存流的地方而得到的。换句话说，如果有储存流的地方，就可以把因边失效而不能传输的那一部分流储存起来，直到边 e 修复，那么只要 $\psi_{ij} < t_{ij}$ ，在修复边 e 后传输这些储存的流还是有可能的。因此，带有储存点的总流 $\Phi_{ij}(\bar{e})$ 比式(12-7-9)所给出的流要大些。但是在实际情况中，要储存的流量 $\Delta T[\psi_{ij} - \psi_{ij}(\bar{e})]$ 可能太大而处理不了。如果 $t_{ij} - \psi_{ij}$ 很小，在修复边 e 后，可能要用很长的时间传输 $\Delta T[\psi_{ij} - \psi_{ij}(\bar{e})]$ 。因此在本节中，我们假定没有储存的地方。根据这一假设，在传输给定流 ψ_{ij} 下，式(12-7-4)中的 $R(\psi_{ij})$ 为

$$R(\psi_{ij}) = 1 - \frac{\Delta T}{T} \left[1 - \min \left\{ 1, \frac{t_{ij}(\bar{e})}{\psi_{ij}} \right\} \right] \quad (12-7-11)$$

用边的失效概率来代替 $\Delta T/T$ ，上式变为

$$R(\psi_{ij}) = 1 - \sum F(e_{p_1} e_{p_2} \cdots e_{p_k}) \times \left[1 - \min \left\{ 1, \frac{t_{ij}}{\psi_{ij}} T(e_{p_1} e_{p_2} \cdots e_{p_k}) \right\} \right] \quad (12-7-12)$$

这是在传输流 ψ_{ij} 下的流可靠度。例如，若 $\psi_{ij} = 4$ ，则图12-7-2中 EWC 网的流可靠度 $R(\psi_{ij} = 4)$ 为

$$R(\psi_{ij} = 4) = 0.644$$

它比最大流下的流可靠度要大些。

从式 (12-7-12) 可以看出, 提高流可靠度有三种不同的方法。第一种方法是在网络中采用更可靠的介质, 使每条边的失效概率 $f(e)$ 较小。但是, 一般地说, 当一种介质的可靠度已经足够高时, 随着介质可靠性 $[1 - f(e)]$ 的进一步提高, 其价格将按指数律增长。因此用这种方法提高流可靠性是相当昂贵的。第二种方法是, 在式 (12-7-12) 中, 用减少 ψ_{ij} 的方法来增大 $\min\{1, (t_{ij}/\psi_{ij}) T(\overline{e_{p_1} e_{p_2} \cdots e_{p_k}})\}$ 的项, 也就是说, 减少网络传输的流量。但是, 这也不是经济的办法, 因为减少要传输的流就意味着提高单位流量的传输价格。

第三种方法是改变网络的配置。这里又有两种方法。一种是改变所给网络的结构, 换句话说, 就是重新设计一个网络, 使在某一给定规范下, 流可靠度变大一些。当一个网络正处于设计阶段时, 这种方法可能是很有用的。然而, 这对于实际改造一个现有网络来说可能是不现实的。另一种方法是保持其结构, 而交换一些边上分配的失效概率 $f(e)$ 。这相当于交换同类介质的位置。这种作法有可能改变

$$\sum F(e_{p_1} e_{p_2} \cdots e_{p_k}) [1 - \min\{1, (t_{ij}/\psi_{ij}) T(\overline{e_{p_1} e_{p_2} \cdots e_{p_k}})\}]$$

因而有可能利用这种方法来提高流可靠度。

例12-7-3 考虑图 12-7-3 的EWC网, 阈级为:

$$T(\bar{a}) = \frac{1}{4}, \quad T(\bar{b}) = \frac{3}{4}, \quad T(\bar{c}) = \frac{3}{4}, \quad T(\bar{d}) = \frac{2}{4}$$

$$T(\overline{ab}) = 0, \quad T(\overline{ac}) = \frac{1}{4}, \quad T(\overline{ad}) = \frac{1}{4}, \quad T(\overline{bc}) = \frac{3}{4}$$

$$T(\overline{bd}) = \frac{2}{4}, \quad T(\overline{cd}) = 0, \quad T(\overline{abc}) = 0, \quad T(\overline{abd}) = 0$$

$$T(\overline{acd}) = 0, \quad T(\overline{bcd}) = 0, \quad \text{and} \quad T(\overline{abcd}) = 0$$

由于各边的失效概率是

$$f(a) = 0.1, \quad f(b) = 0.2,$$

$$f(c) = 0.3, \quad f(d) = 0.4$$

故传输最大流时的流可靠度 $R(t_{ij})$ 为

$$R(t_{ij}) = 0.621$$

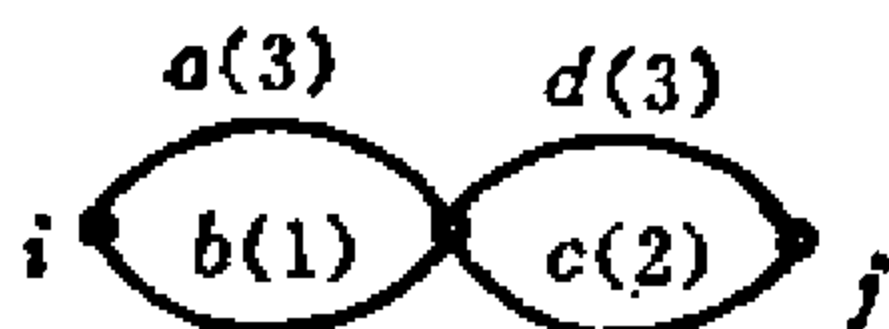


图12-7-3 EWC 网

如果把流量 ψ_{ij} 减少到 3，则流可靠度提高为

$$R(\psi_{ij} = 3) = 0.7273$$

进一步将 ψ_{ij} 分别减少到 2 和 1，得到

$$R(\psi_{ij} = 2) = 0.823$$

$$R(\psi_{ij} = 1) = 0.8582$$

如果不是减少 ψ_{ij} ，而是把边 a 换到一个新位置，如图12-7-4所示，则传输最大流时的流可靠度（各边仍有同样的失效概率）变为

$$\text{新网络的 } R(t_{ij}) = 0.8648$$

这是一个很大的改进。

如果我们不改变网络的结构，而只是交换边 a 和边 d 的失效概率，使 $f(a) = 0.4$ ， $f(d) = 0.1$ ，则最大流下的流可靠度变为

$$R(t_{ij}) = 0.704$$

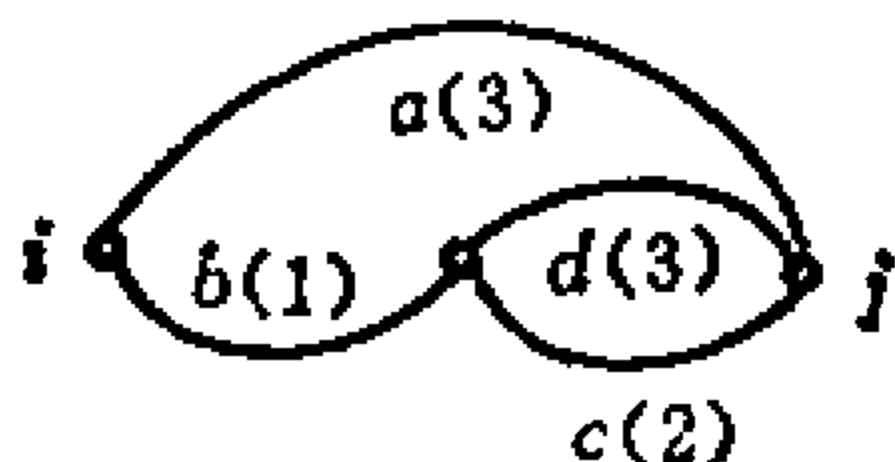


图12-7-4 调整边 a

与0.621相比，这也是一个相当可观的改进。

假定允许交换任何边失效概率，那么怎样才能得到

最大的流可靠度呢？这个问题的答案可能并不简单。但是，如果我们假设边的失效概率都很小，那么下面的定理所给出的答案就变得非常简单了。

定理12-7-1 设 e_r 是一个 EWC 网中的一条边， $r = 1, 2, \dots, n$ 。假定各边的失效概率 $f(e_r)$ 都很小。如果

$$f(e_1) \leq f(e_2) \leq \dots \leq f(e_n)$$

从而

$$T(\bar{e}_1) \leq T(\bar{e}_2) \leq \dots \leq T(\bar{e}_n)$$

那么流可靠度 $R(\psi_{ij})$ 是最大的。

例如，在图12-7-3所示的EWC网中，设 $f(a) = 0.1$, $f(b) = 0.2$, $f(c) = 0.25$, $f(d) = 0.15$ ，则 $f(a) \leq f(d) \leq f(b) \leq f(c)$ 。阈级为 $T(\bar{a}) = \frac{1}{4}$, $T(\bar{b}) = \frac{3}{4}$, $T(\bar{c}) = \frac{3}{4}$, $T(\bar{d}) = \frac{2}{4}$ 。故据上述定理，交换概率 $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ 和 $f(d)$ 不增加流可靠度 $R(\psi_{ij})$ 。为了说明这一点，设 $\psi_{ij} = 3$ ，则 $R(\psi_{ij} = 3) = 0.939$ 。如果我们交换 a 和 d 的失效概率，使 $f(a) = 0.15$, $f(d) = 0.1$ ，那么流可靠度 $R(\psi_{ij} = 3)$ 就变为 0.929。

定理12-7-1的证明：根据假设， $f(e_r)$ 都很小（对所有的 r ），式(12-7-12)可简化为

$$R(\psi_{ij}) \approx 1 - \sum F(e_p) [1 - Q(\bar{e}_p)] \quad (12-7-13)$$

其中

$$F(e_p) = f(e_p) \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq p}}^n [1 - f(e_r)] \quad (12-7-14)$$

$$Q(\bar{e}_p) = \min \left\{ 1, \frac{t_{ij}}{\psi_{ij}} T(\bar{e}_p) \right\} \quad (12-7-15)$$

从式(12-7-14)，显然由关系式

$$f(e_1) \leq f(e_2) \leq \dots \leq f(e_n)$$

得到

$$F(e_1) \leq F(e_2) \leq \dots \leq F(e_n)$$

由式(12-7-13)显然有， $\sum F(e_p) [1 - Q(\bar{e}_p)]$ 越小，可得到的 $R(\psi_{ij})$ 越大。因此，若我们能证明，当 $T(\bar{e}_1) \leq T(\bar{e}_2) \leq \dots \leq T(\bar{e}_n)$ 的关系满足时， $\sum F(e_p) [1 - Q(\bar{e}_p)]$ 最小，定理就得到了证明。

考虑两个正数的集合 $\{a_p; p=1, 2, \dots, n\}$ 和 $\{b_p; p=1, 2, \dots, n\}$. 设 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, $b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$.

设总和 S_j 定义为

$$S_j = \sum_{r=1}^n a_{j_r} b_r \quad (12-7-16)$$

其中 $(j_1 j_2 \dots j_n)$ 是 $(1 2 \dots n)$ 的置换. 设 $\{S_j\}$ 是用 $(1 2 \dots n)$ 的所有可能的置换所产生的总和 S_j 的集合. 设总和 S_0 为

$$S_0 = \sum_{r=1}^n a_r b_r \quad (12-7-17)$$

可以看出, $\{S_j\}$ 中除 S_0 外任一和 S_p 均可表为

$$S_p = \sum_{r=1}^m a_{j_r} b_r + \sum_{r=m+1}^n a_r b_r \quad (12-7-18)$$

其中 $(j_1 j_2 \dots j_m)$ 是 $(1 2 \dots m)$ 的置换, 且 $j_m \neq m$. 当 $m=n$ 时, 式 (12-7-18) 右端第二项将不存在. 设 $j_t (1 \leq t \leq m)$ 为 m , 则 S_p 可以改写为

$$S_p = \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq t}}^{m-1} a_{j_r} b_r + a_m a_t + a_{j_m} b_m + \sum_{r=m+1}^n a_r b_r \quad (12-7-19)$$

交换 a_{j_m} 和 a_m , 我们得到一个新的和 S'_p :

$$S'_p = \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq t}}^{m-1} a_{j_r} b_r + a_{j_m} b_t + a_m b_m + \sum_{r=m+1}^n a_r b_r \quad (12-7-20)$$

因为 $a_{j_m} \leq a_m$, $b_m \leq a_t$, 显然 $S'_p \leq S_p$. 同样如果 S'_p 不是 S_0 , 又可以得到另一个和 S''_p , 使得 $S'_p \leq S''_p$. 因此可以说, $\{S_j\}$ 中任一个和 S_j 都满足 $S_j \geq S_0$. 换句话说, 和 S_0 在 $\{S_j\}$ 中是最小的.

以 $a_r = F(e_r)$, $a_r = [1 - Q(\bar{e}_r)]$ 代入, 我们可以说, 若满足

$$[1 - Q(\bar{e}_1)] \geq [1 - Q(\bar{e}_2)] \geq \dots \geq [1 - Q(\bar{e}_n)]$$

则 $\sum F(e_r) [1 - Q(\bar{e}_r)]$ 就是最小的。因为 $[1 - Q(\bar{e}_r)]$ 是非负的，故上面结果给出

$$Q(\bar{e}_1) \leq Q(\bar{e}_2) \leq \dots \leq Q(\bar{e}_n)$$

由式(12-7-15)中 $Q(\bar{e}_r)$ 的定义，这个关系导出

$$T(\bar{e}_1) \leq T(\bar{e}_2) \leq \dots \leq T(\bar{e}_n)$$

这就证明了定理。

(证毕)

根据这个定理，我们可以分配边的失效概率，使流可靠度变得最大，在实际的系统中，并不是所有的边失效概率都是可以交换的。但是，如果我们只考虑可以交换的边，这个定理就是成立的。例如，如果边 e_1, e_2, \dots, e_k 的概率可以交换，在边 e'_1, e'_2, \dots, e'_m 中也有一些可交换的边概率。那么，我们可以先交换 e_1, e_2, \dots, e_k 的概率来求得此时可能达到的最大流可靠度，然后交换 e'_1, e'_2, \dots, e'_m 的概率来得到最大流可靠度。

为增加最大流，在网络中插入一个附加介质的办法是常采用的。现在我们来研究这样的插入法对流可靠度的影响。首先看一个例子。在图12-7-2 (例12-7-2)中有个EWC网，我们已算出，当 $t_{ij} = 5$ 时，这个网络的流可靠度为 0.616。假定在 i 和 j 之间插入一条边 d ，其边容量为 1，失效概率为 0.4，如图 12-7-5 所示。于是，流可靠度就变为 0.6091，说明流可靠度降低了。另一方面，要传输的流却增加到 6。如果我们保持所传输的流量不变，则流可靠度 $R(\psi_{ij} = 5)$ 为

$$R(\psi_{ij} = 5) = 0.6713$$

这说明流可靠度因边 d 的插入而增加。显然，只要所传输的流不变，插入一些边不会降低流可靠度。

插入一些边既能提高流可靠度，又增加流量吗？为了回答这个问题，

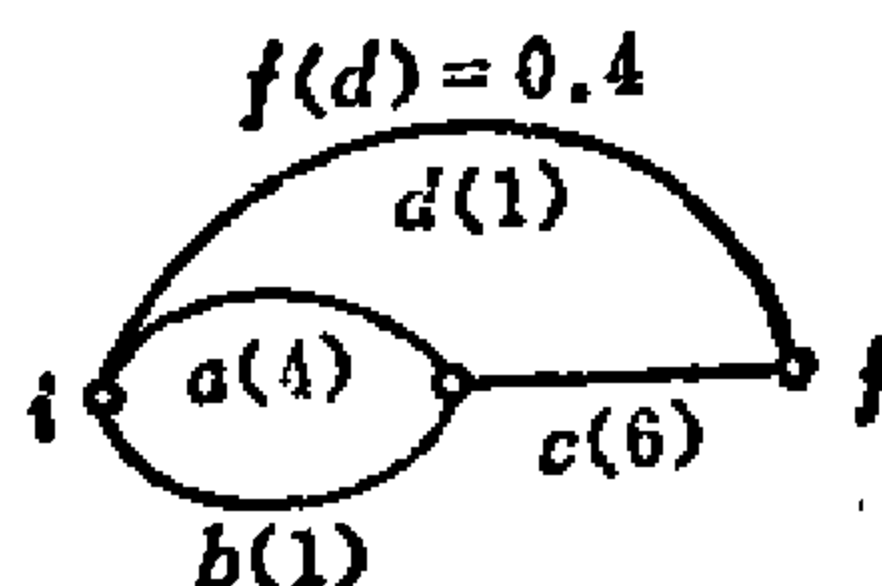


图12-7-5 插入边 d

我们来研究两个 EWC 网并联时的流可靠度。

定理12-7-2 在图12-7-6所示的并联网络中，设 R_1 和 R_2 分别为 EWC 网 G_1 和 G_2 在从 i 到 j 的最大流下的流可靠度。又设 t_1 和 t_2 分别为 G_1 和 G_2 的端限容量。则整个网络 G_0 在从 i 到 j 的最大流下的流可靠度 R_0 为

$$R_0 = \frac{[t_1 R_1 + t_2 R_2]}{t_1 + t_2} \quad (12-7-21)$$

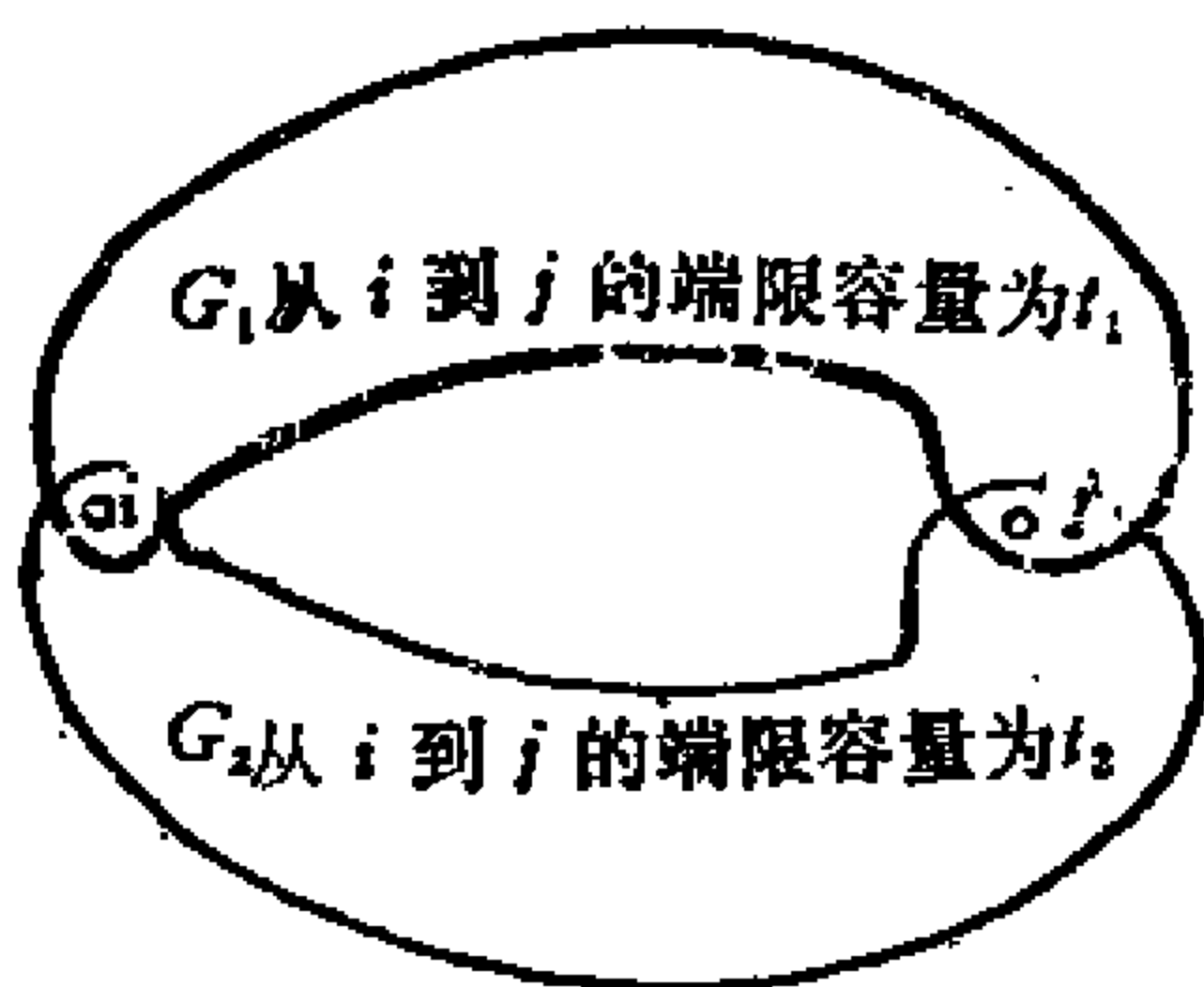


图12-7-6 两个网络并联

证明： 一个EWC网在流 ψ_{ij} 下的流可靠度由式 (12-7-12) 给出，又可以改写为

$$R(\psi_{ij}) = P + \sum F(e_{p_1} e_{p_2} \cdots e_{p_k}) \min \left\{ 1, \frac{t_{ij}(e_{p_1} e_{p_2} \cdots e_{p_k})}{\psi_{ij}} \right\} \quad (12-7-22)$$

其中

$$P = \prod_{e_p \in G} [1 - f(e_p)] \quad (12-7-23)$$

利用这个等式， G_0 ， G_1 ， G_2 在从 i 到 j 的最大流下的流可靠度 R_0 ， R_1 ， R_2 可以分别表示为

$$R_0 = P_0 + \sum \frac{F_{0n} t_{0n}}{t_0} \quad (12-7-24)$$

$$R_1 = P_1 + \sum \frac{F_{1n} t_{1n}}{t_1} \quad (12-7-25)$$

$$R_2 = P_2 + \sum \frac{F_{2n} t_{2n}}{t_2} \quad (12-7-26)$$

其中 t_0 是 G_0 的从 i 到 j 的端限容量, F_{rn} 和 t_{rn} ($r = 0, 1, 2$) 分别为以下两式的缩记表示:

$$F_{rn} = F(e_{p_1} e_{p_2} \cdots e_{p_k}) \quad (12-7-27)$$

$$t_{rn} = t_{ij}(\overline{e_{p_1} e_{p_2} \cdots e_{p_k}}) \quad (12-7-28)$$

注意, 对 $r = 0, 1, 2$,

$$P_r = \prod_{e_p \in G_r} [1 - f(e_p)] \quad (12-7-29)$$

因为

$$P_0 = P_1 P_2 \quad (12-7-30)$$

$$\sum F_{0n} = P_2 \sum F_{1n} + P_1 \sum F_{2n'} + \sum F_{1n} \sum F_{2n'} \quad (12-7-31)$$

$$t_{0n} = t_{1n} + t_{2n'} \quad (12-7-32)$$

所以流可靠度 R_0 可以表示为

$$\begin{aligned} R_0 = & P_1 P_2 + P_2 \sum F_{1n} \left(\frac{t_{1n} + t_2}{t_0} \right) + P_1 \sum F_{2n} \left(\frac{t_{2n} + t_1}{t_0} \right) \\ & + \sum F_{1n} \sum F_{2n'} \left(\frac{t_{1n} + t_{2n'}}{t_0} \right) \end{aligned} \quad (12-7-33)$$

我们可以看出, 整个网络 G_0 的端限容量 t_0 可以表示为

$$t_0 = t_1 + t_2 \quad (12-7-34)$$

因此式 (12-7-33) 变成

$$\begin{aligned}
R_0 &= \frac{(t_1 + t_2)}{t_0} P_1 P_2 + P_2 \sum F_{1u} \frac{t_2}{t_0} + P_2 \sum F_{1u} \frac{t_{1u}}{t_0} \\
&\quad + P_1 \sum F_{2u} \frac{t_1}{t_0} + P_1 \sum F_{2u} \frac{t_{2u}}{t_0} + \sum F_{1u} \sum F_{2u} \frac{t_{1u}}{t_0} \\
&\quad + \sum F_{1u} \sum F_{2u} \frac{t_{2u}}{t_0} \\
&= \frac{t_1 P_1 P_2}{t_0} + \frac{t_2 P_1 P_2}{t_0} + \frac{t_1 P_1 \sum F_{2u}}{t_0} + \frac{t_2 P_2 \sum F_{1u}}{t_0} \\
&\quad + \frac{t_1}{t_0} \sum F_{1u} \frac{t_{1u}}{t_1} + \frac{t_2}{t_0} \sum F_{2u} \frac{t_{2u}}{t_2} \\
&= \frac{t_1}{t_0} \left(P_1 + \sum F_{1u} \frac{t_{1u}}{t_1} \right) + \frac{t_2}{t_0} \left(P_2 + \sum F_{2u} \frac{t_{2u}}{t_2} \right) \\
&= \frac{t_1 R_1 + t_2 R_2}{t_1 + t_2} \tag{12-7-35}
\end{aligned}$$

(证毕)

如果我们把 G_1 看成给定的网络，把 G_2 看成要插入的网络，那么据式(12-7-35)，适当地选择 R_2 和 t_2 ，就有可能在增加流的同时得到较高的流可靠度。这就回答了我们在上面提出的问题。

例12-7-4 图 12-7-7(a) 中的 EWC 网 G_0 可以看作如图 12-7-7(b) 所示的两个网络 G_1 和 G_2 的并联。

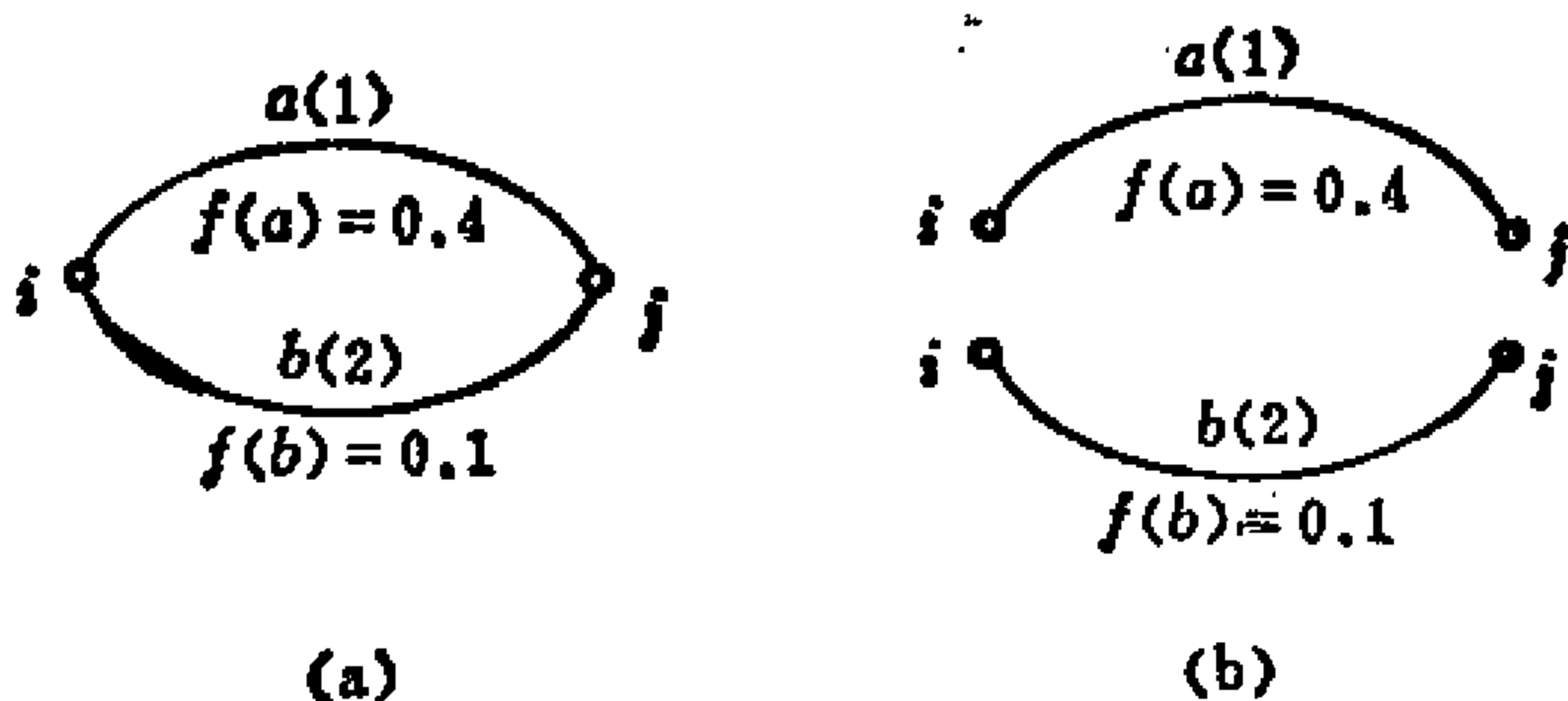


图12-7-7 由两个网络并联组成的网络

(a) 一个 EWC 网络; (b) 两个网络 G_1, G_2

G_1 和 G_2 在从 i 到 j 的最大流下的流可靠度 R_1 和 R_2 分别为

$$R_1 = 0.6$$

$$R_2 = 0.9$$

G_1 和 G_2 的端限容量为

$$t_1 = 1$$

$$t_2 = 2$$

因此据定理 12-7-2, 所给网络在从 i 到 j 的最大流 $t_0 = 3$ 下的流可靠度 R_0 为

$$R_0 = \frac{[0.6(1) + 0.9(2)]}{3} = 0.8$$

当两个 EWC 网 G_1 和 G_2 串联时, 整个网络的流可靠度与 G_1 和 G_2 的流可靠度之间的关系由以下定理给出。

定理 12-7-3 在图 12-7-8 所示的串联网络中, 设 R_1 是 G_1 在流 ψ_{ik} 下的流可靠度, R_2 是 G_2 在流 ψ_{kj} 下的流可靠度, 且 $\psi_{ik} = \psi_{kj}$. 则整个网络 G_0 在流 $\psi_{ij} = \psi_{ik}$ 下的流可靠度 R_0 满足下面的不等式

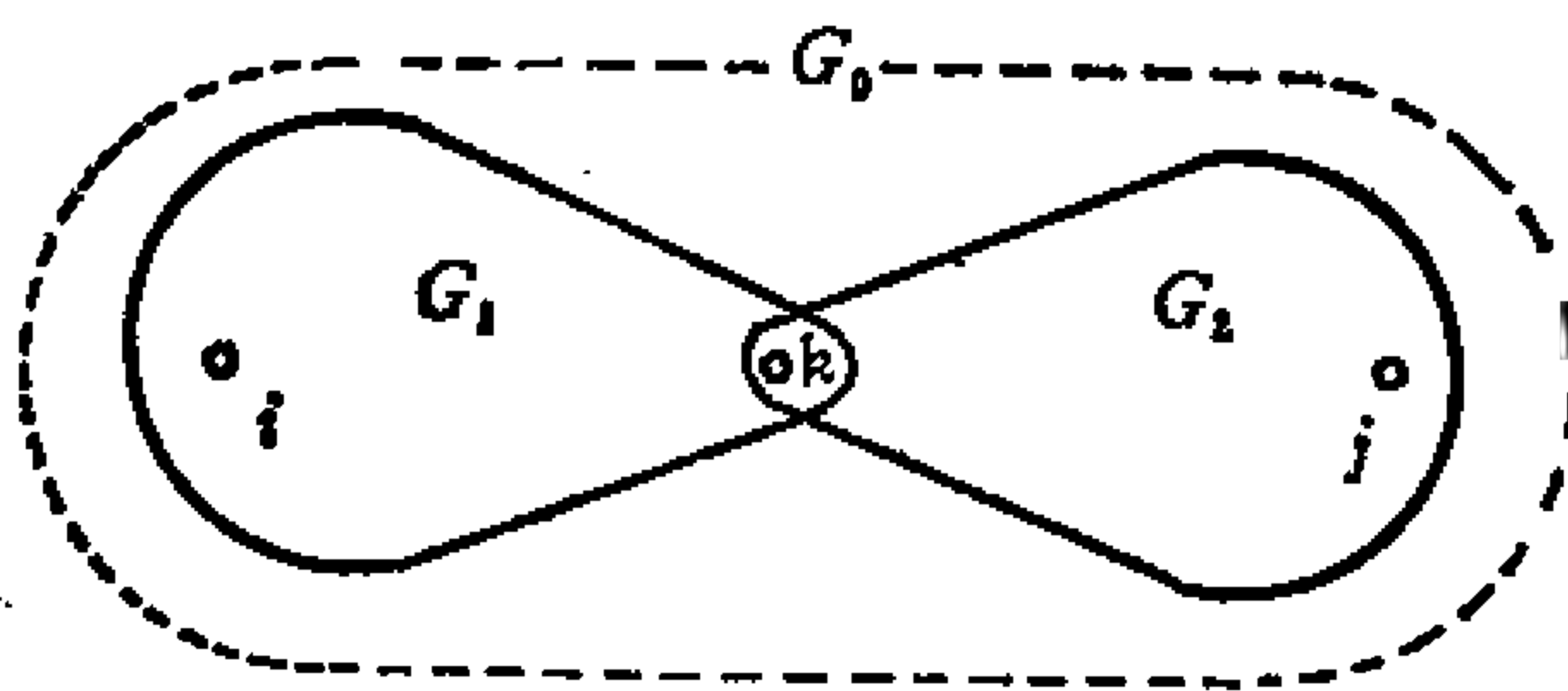


图 12-7-8 两个网络串联

$$R_1 R_2 \leq R_0 \leq \min \{R_1 + (R_2 - 1)P_1, R_2 + (R_1 - 1)P_2\} \quad (12-7-36)$$

其中

$$P_r = \prod_{e_p \in G_r} [1 - f(e_p)] \quad r = 1, 2 \quad (12-7-37)$$

证明： 在串联网络中，整个网络在流 ψ_{ij} 下的流可靠度 R_0 可以表示为

$$\begin{aligned} R_0 = & P_1 P_2 + P_1 \sum F_{2u} \min\left(1, \frac{t_{2u}}{\psi_{kj}}\right) \\ & + P_2 \sum F_{1u} \min\left(1, \frac{t_{1u}}{\psi_{ik}}\right) \\ & + \sum F_{1u} \cdot \sum F_{2u'} \min\left(1, \frac{t_{1u}}{\psi_{ik}}, \frac{t_{2u'}}{\psi_{kj}}\right) \end{aligned} \quad (12-7-38)$$

因为

$$\min\left(1, \frac{t_{2u}}{\psi_{kj}}\right) \cdot \min\left(1, \frac{t_{1u}}{\psi_{ik}}\right) \leq \min\left(1, \frac{t_{1u}}{\psi_{ik}}, \frac{t_{2u}}{\psi_{kj}}\right) \quad (12-7-39)$$

其中据假设 $\psi_{ik} = \psi_{kj} = \psi_{ij}$ ，所以式 (12-7-38) 可以变为

$$\begin{aligned} R_0 \geq & P_1 P_2 + P_1 \sum F_{2u} \min\left(1, \frac{t_{2u}}{\psi_{kj}}\right) + P_2 \sum F_{1u} \min\left(1, \frac{t_{1u}}{\psi_{ik}}\right) \\ & + \left[\sum F_{1u} \min\left(1, \frac{t_{1u}}{\psi_{ik}}\right) \right] \cdot \left[\sum F_{2u} \min\left(1, \frac{t_{2u}}{\psi_{kj}}\right) \right] \\ = & R_1 R_2 \end{aligned} \quad (12-7-40)$$

这就证明了式 (12-7-36) 的左端。

由于

$$\min\left(1, \frac{t_{1u}}{\psi_{ik}}\right) \geq \min\left(1, \frac{t_{1u}}{\psi_{ik}}, \frac{t_{2u}}{\psi_{kj}}\right) \quad (12-7-41)$$

式 (12-7-38) 变为

$$\begin{aligned} R_0 \leq & P_1 P_2 + P_1 \sum F_{2u} \min\left(1, \frac{t_{2u}}{\psi_{kj}}\right) + P_2 \sum F_{1u} \min\left(1, \frac{t_{1u}}{\psi_{ik}}\right) \\ & + \sum F_{2u'} \sum F_{1u} \min\left(1, \frac{t_{1u}}{\psi_{ik}}\right) \\ = & P_1 P_2 + P_1 \sum F_{2u} \min\left(1, \frac{t_{2u}}{\psi_{kj}}\right) + \sum F_{1u} \min\left(1, \frac{t_{1u}}{\psi_{ik}}\right) \\ = & P_1 (R_2 - 1) + R_1 \end{aligned} \quad (12-7-42)$$

交换下标，式 (12-7-42) 变为

$$R_0 \leq P_2(R_1 - 1) + R_2 \quad (12-7-43)$$

既然以上两式都必须满足，故式 (12-7-36) 右端是正确的，这就证明了定理。 (证毕)

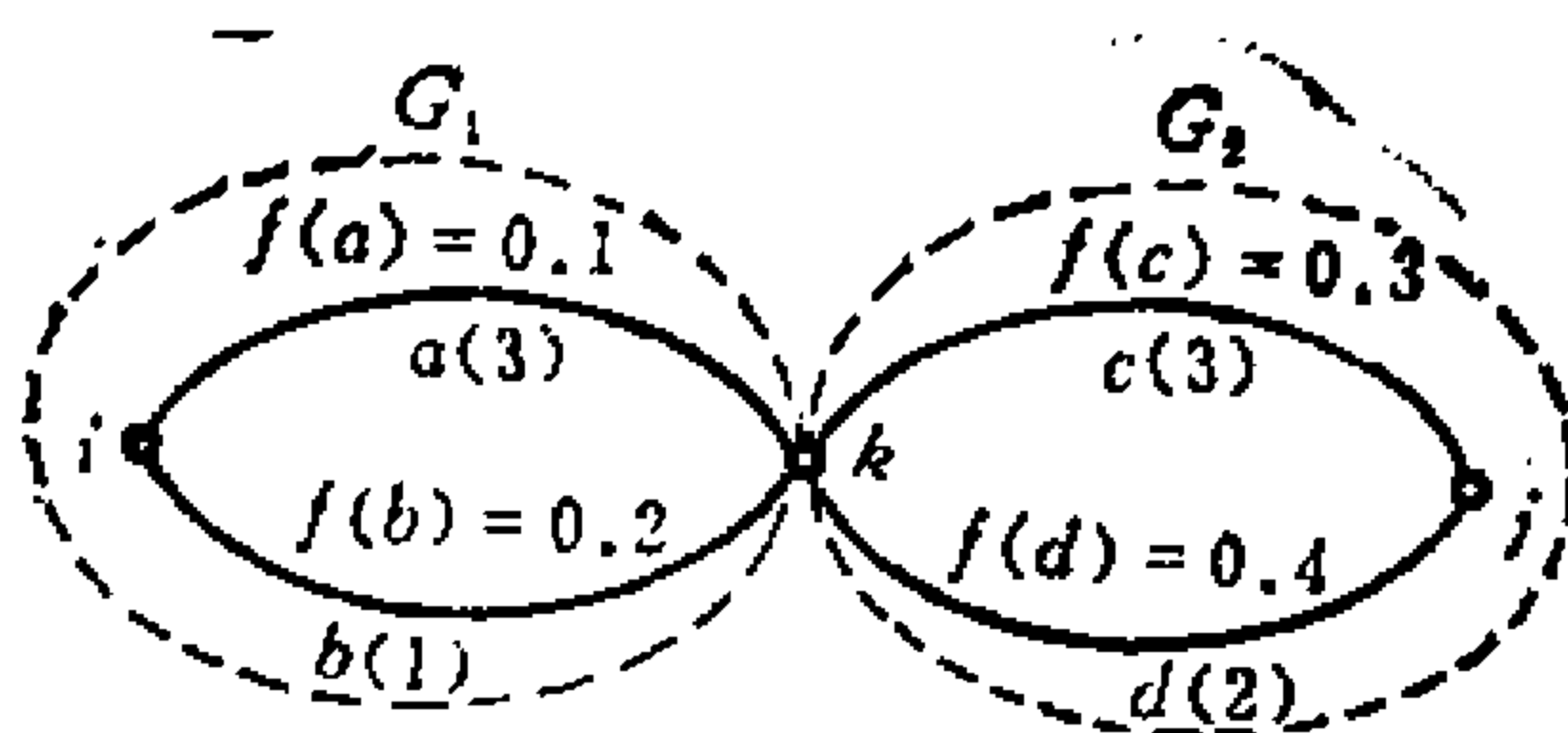


图12-7-9 两个网络 G_1 和 G_2 串联

例12-7-5 图12-7-9中的EWC网 G_0 由两个网络 G_1 和 G_2 串联组成。计算 G_1 在流 $\psi_{ik} = 4$ 下的流可靠度 R_1 得

$$R_1 = 0.875$$

在 $\psi_{kj} = 4$ 下的流可靠度 R_2 为

$$R_2 = 0.72$$

因此 R_1 和 R_2 的积为

$$R_1 R_2 = 0.63$$

由于

$$P_1 = 0.72$$

$$P_2 = 0.42$$

我们有

$$P_1(R_2 - 1) + R_1 = 0.6734$$

$$P_2(R_1 - 1) + R_2 = 0.6675$$

因此所给网络 G_0 在 $\psi_{ij} = 4$ 下的流可靠度满足下面不等式 (据定理12-7-3)：

$$0.63 \leq R_0 \leq 0.6675$$

我们从式 (12-7-12) 和式 (12-7-22) 可以看出, 计算一个 EWC 网的流可靠度是一项非常费时的工作。定理 12-7-2 给出了可将一个网络看作两个网络并联时, 求流可靠度的一种方法, 而却没有给出在分配的流小于最大流时求流可靠性的方法。另一方面, 定理 12-7-3 给出了可将一个网络看作是两个网络串联时, 流可靠性的上界和下界。同样地, 这个定理不一定能帮助我们得到一个足够精确的流可靠度。况且, 一个网络不一定能分解为串联或并联网络。因此, 这两个定理对于求网络流可靠度的近似值不一定有多少帮助。到目前为止, 还没有求网络流可靠性的简单方法。但是, 在某些约束条件下, 我们可以如下面定理所给的那样, 求得流可靠度的合理近似值。

定理 12-7-4 设 R 是 EWC 网 G 在从 i 到 j 的流 ϕ_{ij} 下的流可靠度。设 $S = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 是 G 的端限容量 t_{ij} 的对应割集。设 (e_1, e_2, \dots, e_m) 是 $G - S$ 的所有边的集合 (即 G 去掉 S 的边后所余边的集合)。假定以下条件满足:

1. 对 $r = 1, 2, \dots, m$, 边 e_r 的失效概率 $f(e_r)$ 很小。
2. 删去任何边 e_r , 不减少从 i 到 j 的端限容量。

那么, G 在 ϕ_{ij} 下的流可靠度非常接近于 G' 在 ϕ_{ij} 下的流可靠度, 其中 G' 是将 G 中边 e_r 的失效概率 $f(e_r)$ 置零 ($r = 1, 2, \dots, m$) 后得到的网络。

除满足条件 1, 2 外, 如果对 $s = 1, 2, \dots, n$, 边 b_s 的失效概率 $f(b_s)$ 也很小, 则 G 在最大流下的流可靠度可近似为

$$R \approx \sum_{i=1}^n \frac{r(b_i)c_i}{\sum_{i=1}^n c_i} \quad (12-7-44)$$

其中 $r(b_i)$ 是边 b_i 的可靠度, 它等于 $1 - f(b_i)$ 。

例 12-7-6 考虑 12-7-10 所示的 EWC 网。我们可以看出,

对于这个网络，条件 1 和条件 2 是满足的。注意端限容量 t_{ij} 的对应割集 S 由边 a, b, c 组成。因为边 a, b, c 的失效概率很小，可用式(12-7-44)作为从 i 到 j 的最大流下的流可靠度 R_0 的近似值：

$$R_0 \approx \frac{0.9(1) + 0.85(2) + 0.95(3)}{1 + 2 + 3} = 0.909$$

用式(12-7-12)计算 R_0 的实际值为 0.9047。因此式(12-7-44)给出的近似式可求得合理的流可靠度值。

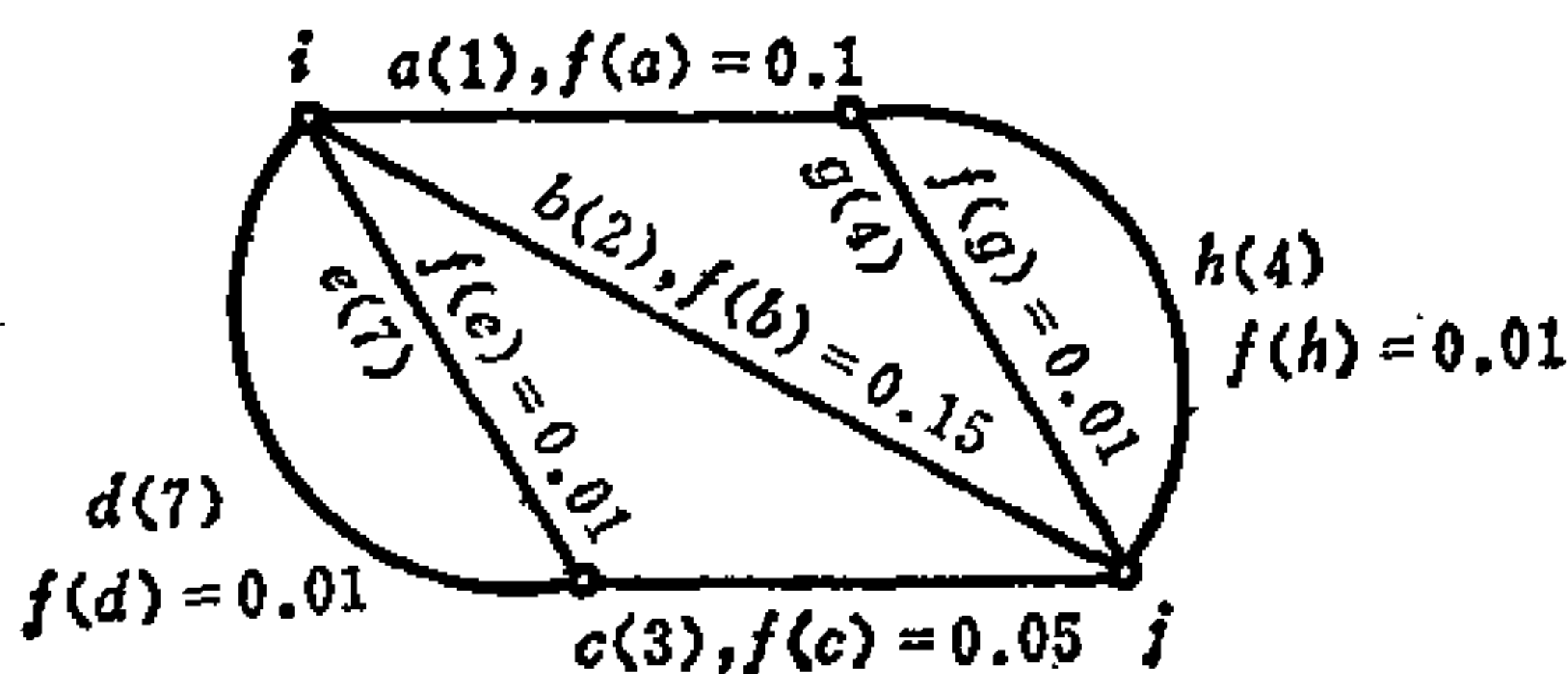


图 12-7-10 EWC 网

定理12-7-4的证明：据条件 1，我们有

$$\begin{aligned} & \sum F(e_{p_1} e_{p_2} \cdots e_{p_k}) \left[1 - \min \left\{ 1, \frac{t_{ij}}{\psi_{ij}} T(\overline{e_{p_1} e_{p_2} \cdots e_{p_k}}) \right\} \right] \\ & \approx \sum_{b_p \in S} F(b_{p_1} b_{p_2} \cdots b_{p_m}) \left[1 - \min \left\{ 1, \frac{t_{ij}}{\psi_{ij}} T(\overline{b_{p_1} b_{p_2} \cdots b_{p_m}}) \right\} \right] \\ & + \sum_{e_u \in (G-S)} f(e_u) \left[1 - \min \left\{ 1, \frac{t_{ij}}{\psi_{ij}} T(\overline{e_u}) \right\} \right] \quad (12-7-45) \end{aligned}$$

并且据条件 2， $t_{ij}(\overline{e_u}) = t_{ij}$ 。因此

$$f(e_u) \left[1 - \min \left\{ 1, \frac{t_{ij}}{\psi_{ij}} T(\overline{e_u}) \right\} \right] = 0 \quad (12-7-46)$$

须注意

$$T(\bar{e}_u) = \frac{t_{ij}(\bar{e}_u)}{t_{ij}} \quad (12-7-47)$$

因而由式 (12-7-12) 给出的流可靠度 R 变为

$$R \approx 1 - \sum_{b_p \in S} F_s(b_{p_1} b_{p_2} \cdots b_{p_n}) \left[1 - \min \left\{ 1, \frac{t_{ij}}{\psi_{ij}} T(\bar{b}_s) \right\} \right] \quad (12-7-48)$$

这就是将所有 e_r 边的失效概率 $f(e_r)$ 置零后所得的网络 G 的流可靠度，于是定理第一部分得证。

当 S 中所有的边 b_i 的 $f(b_i)$ 也很小时，式 (12-7-48) 还可进一步简化为：

$$\begin{aligned} R &\approx 1 - \sum F_s(b_s) \left[1 - \min \left\{ 1, \frac{t_{ij}}{\psi_{ij}} T(\bar{b}_s) \right\} \right] \\ &\approx 1 - \sum f(b_s) \left[1 - \min \left\{ 1, \frac{t_{ij}}{\psi_{ij}} T(\bar{b}_s) \right\} \right] \end{aligned} \quad (12-7-50)$$

当 $\psi_{ij} = t_{ij}$ (即最大流) 时，

$$T(\bar{b}_u) = 1 - \frac{c_u}{\sum_{r=1}^n c_r} \quad (12-7-51)$$

其中 c_u 和 c_r 分别为边 b_u 和 b_r 的边容量，须注意

$$t_{ij} = \sum_{r=1}^n c_r \quad (12-7-52)$$

因此在最大流下的流可靠度 $R(t_{ij})$ 为

$$R(t_{ij}) \approx 1 - \sum f(b_u) \left[1 - \left(1 - \frac{c_u}{\sum_{r=1}^n c_r} \right) \right]$$

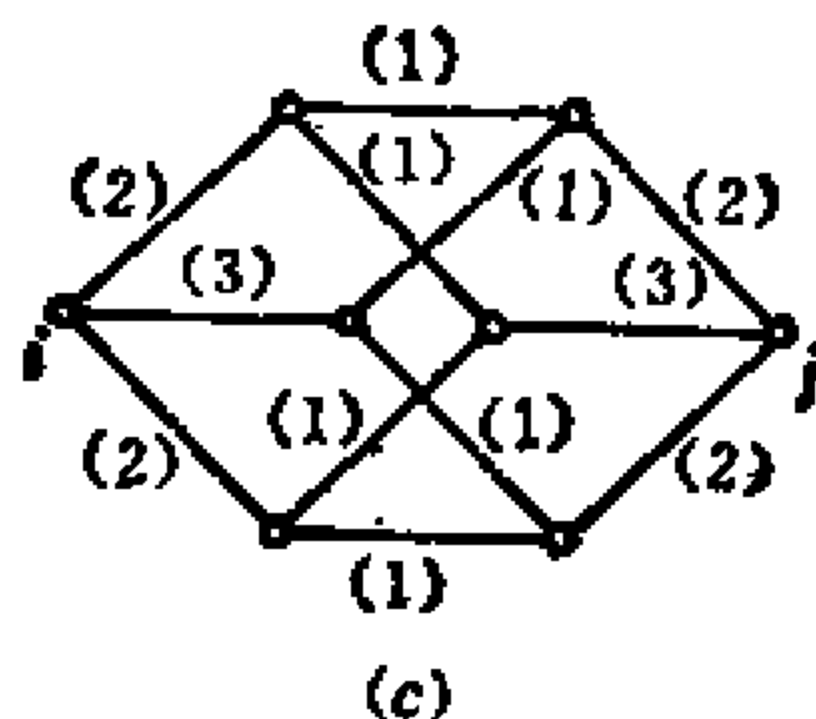
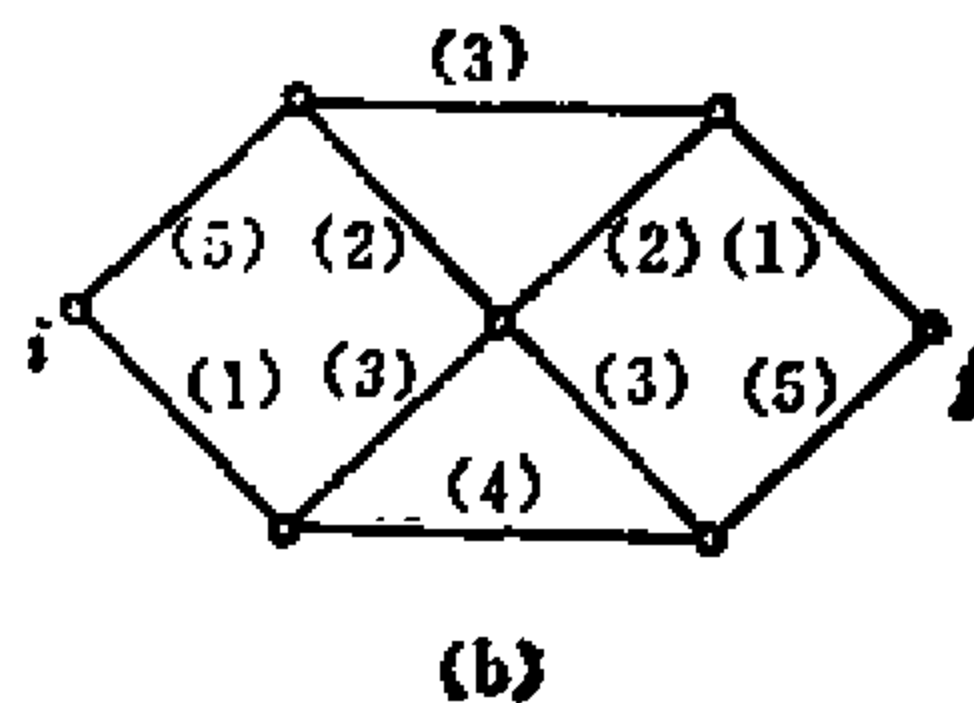
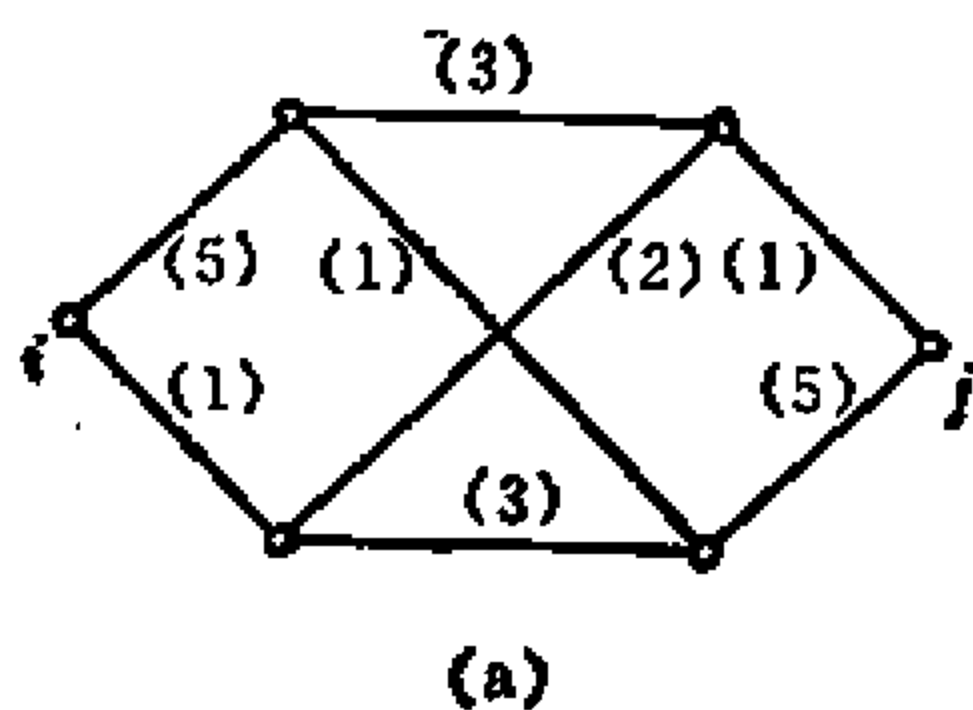
$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{\sum_{u=1}^n f(b_u) c_u}{\sum_{r=1}^n c_r} = \frac{\sum_{u=1}^n [1 - f(b_u)] c_u}{\sum_{r=1}^n c_r} \\
&= \frac{\sum_{u=1}^n r(b_u) c_u}{\sum_{r=1}^n c_r} \quad (12-7-53)
\end{aligned}$$

这就证明了定理。

(证毕)

习 题

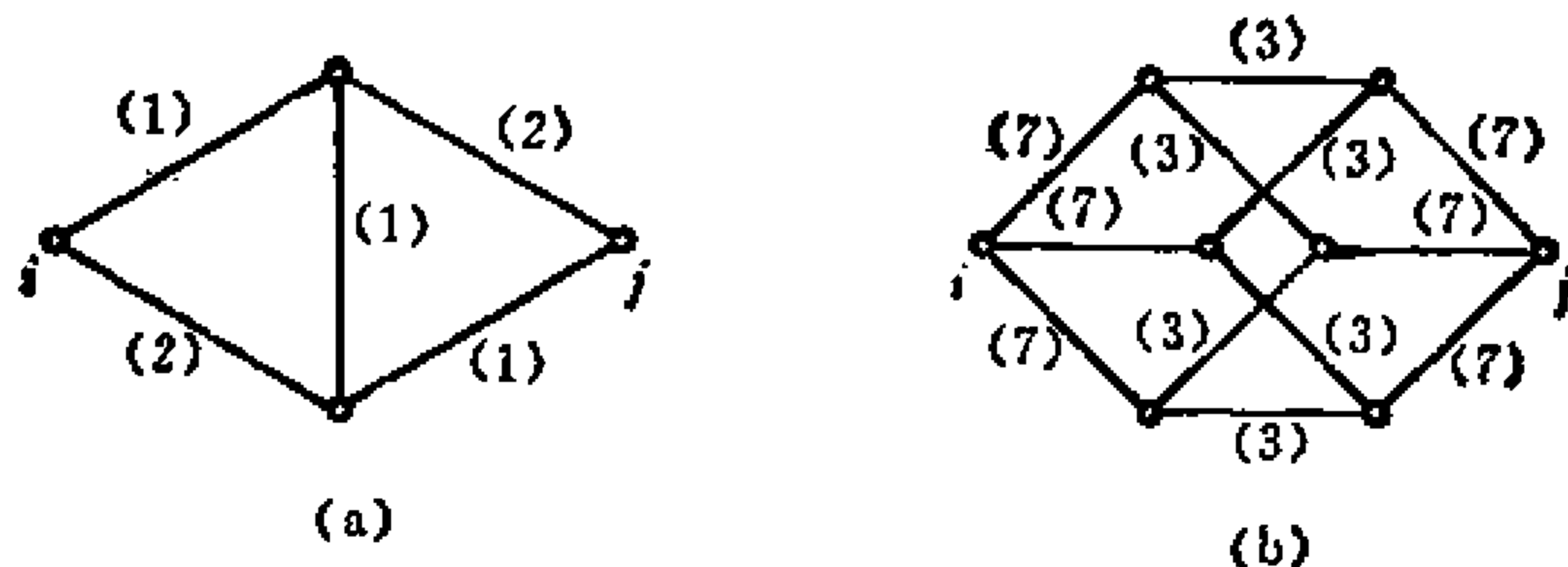
1. 对图P-12-1中的EWC网, 求从 i 到 j 的流 $\psi_{ij} = 6$ 的一个分配方式。



图P-12-1 EWC网

(a) G_1 ; (b) G_2 ; (c) G_3

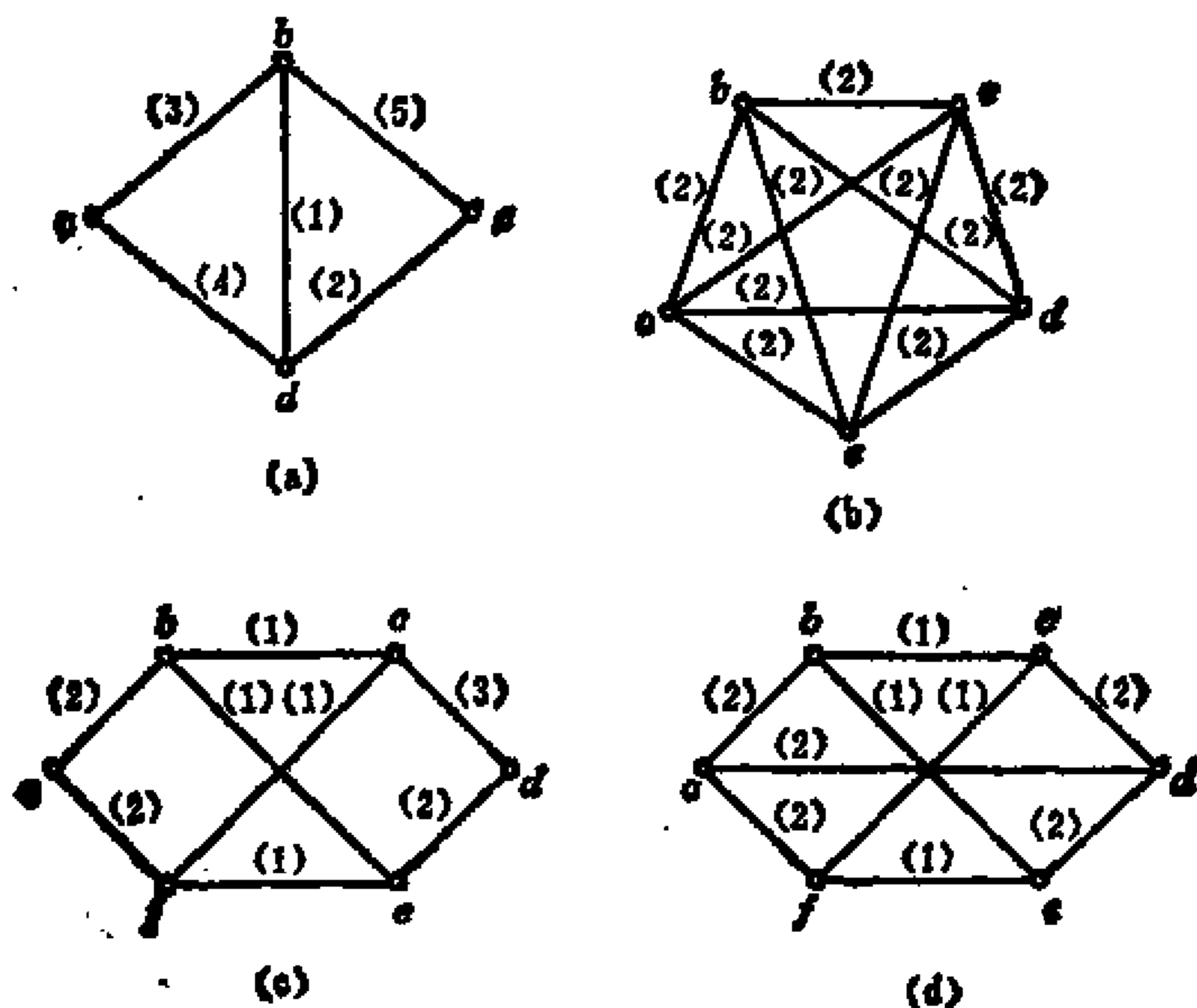
2. 在图P-12-2的EWC网中, 从 i 到 j 能够传送的最大流是多少?



图P-12-2 EWC网

(a) G_1 , (b) G_2

3. 求出图P-12-3中每个EWC网的端限容量矩阵.



图P-12-3 EWC网

(a) G_1 , (b) G_2 , (c) G_3 , (d) G_4

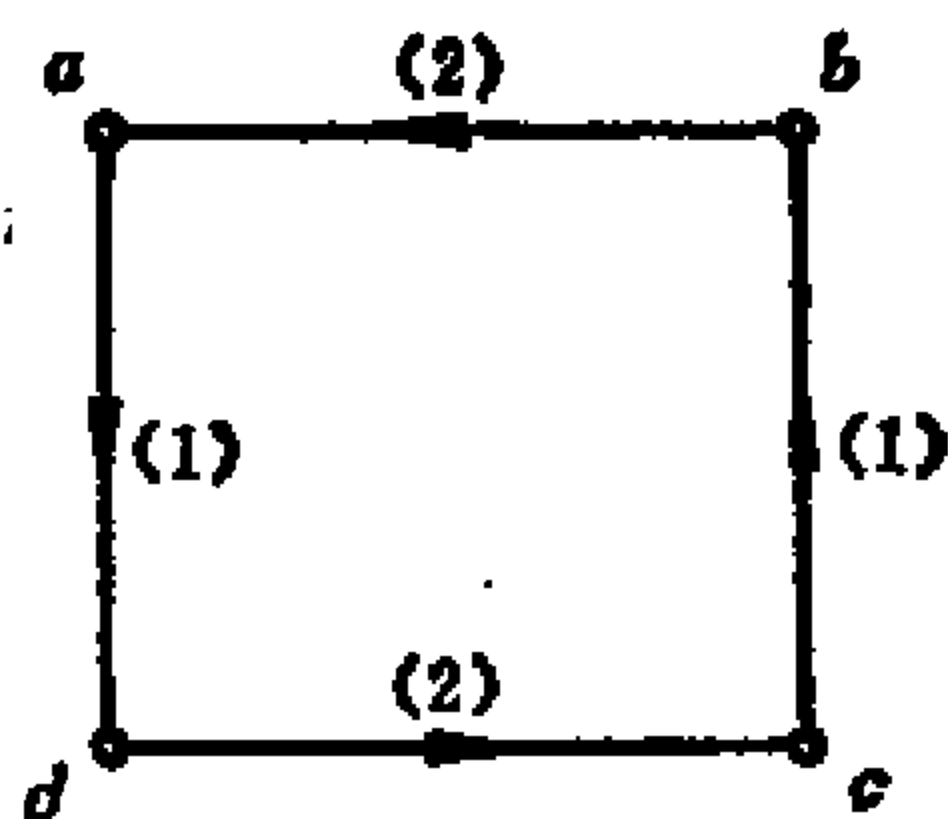
4. 综合无向 EWC 网, 其端限容量矩阵为

$$(a) \quad T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} d & 2 & 1 & 2 \\ 2 & d & 1 & 3 \\ 1 & 1 & d & 1 \\ 2 & 3 & 1 & d \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (b) \quad T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} d & 2 & 3 & 2 \\ 2 & d & 2 & 4 \\ 3 & 2 & d & 2 \\ 2 & 4 & 2 & d \end{bmatrix} \end{matrix}$$

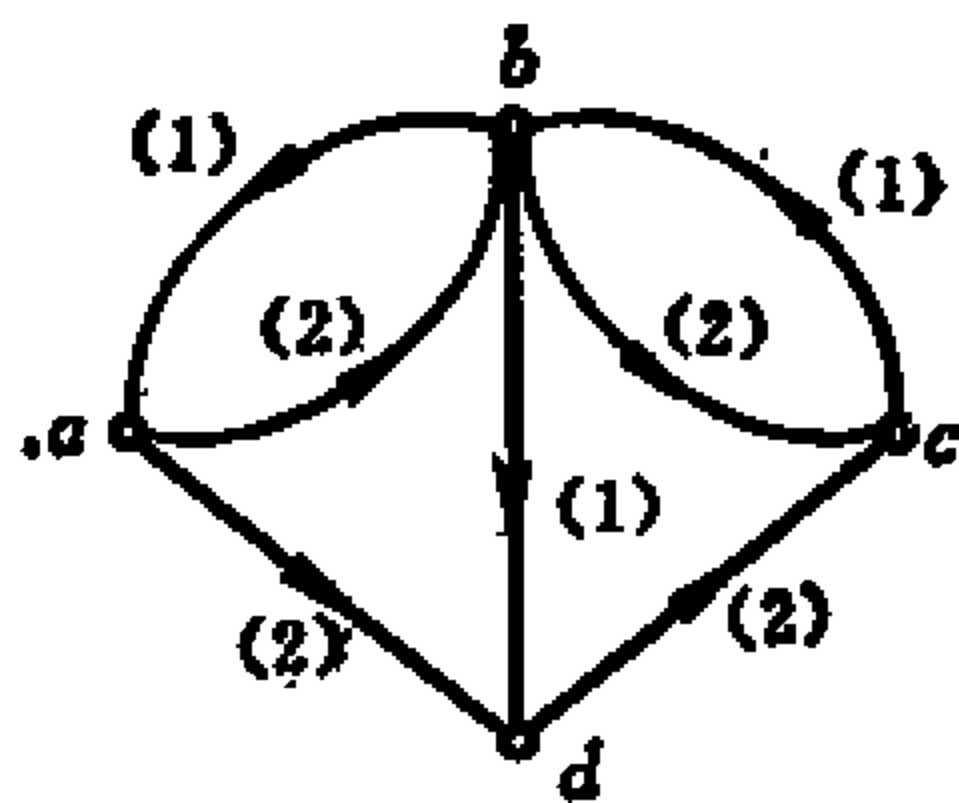
5. 在以下各端限容量矩阵的单位价格相同的条件下, 由它们综合最廉价的无向 EWC 网.

$$(a) \quad T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} d & 1 & 1 & 5 \\ 1 & d & 3 & 1 \\ 1 & 3 & d & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (b) \quad T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} d & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & d & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & d & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & d & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & d \end{bmatrix} \end{matrix}$$

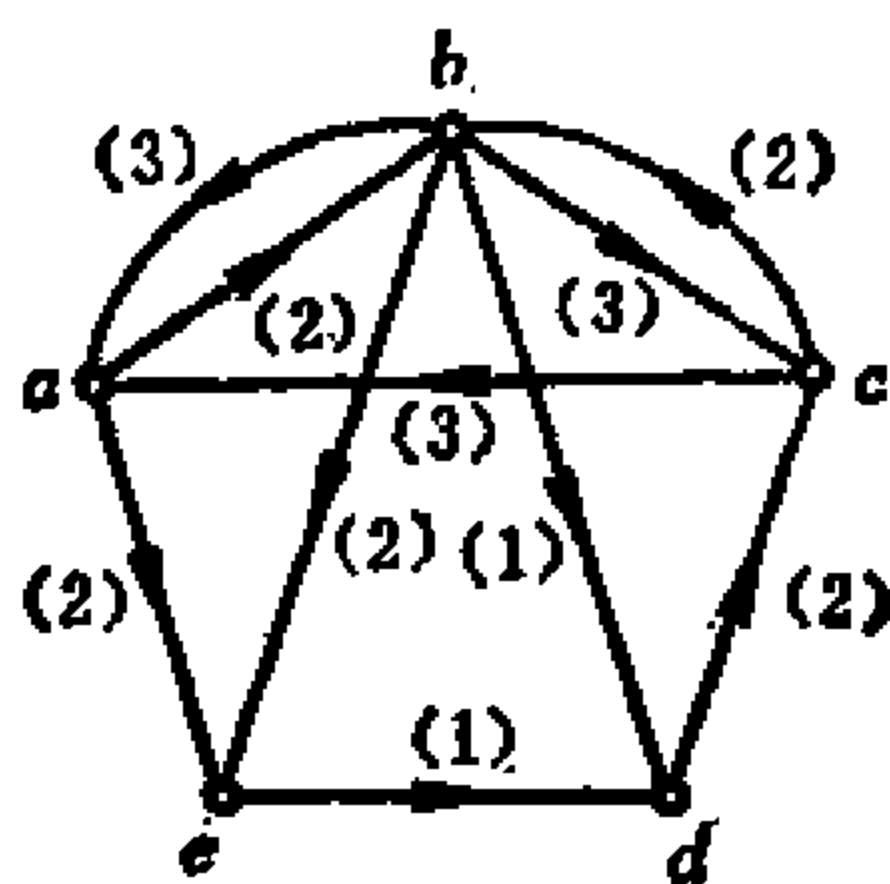
6. 求出图 P-12-6 中每个有向 EWC 网的端限容量矩阵.



(a)



(b)

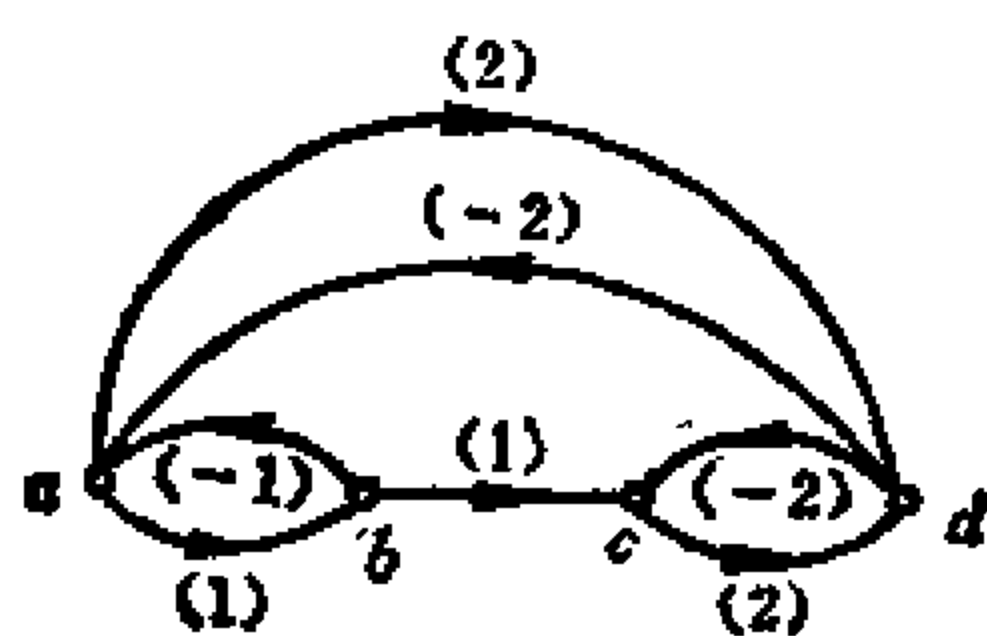


(c)

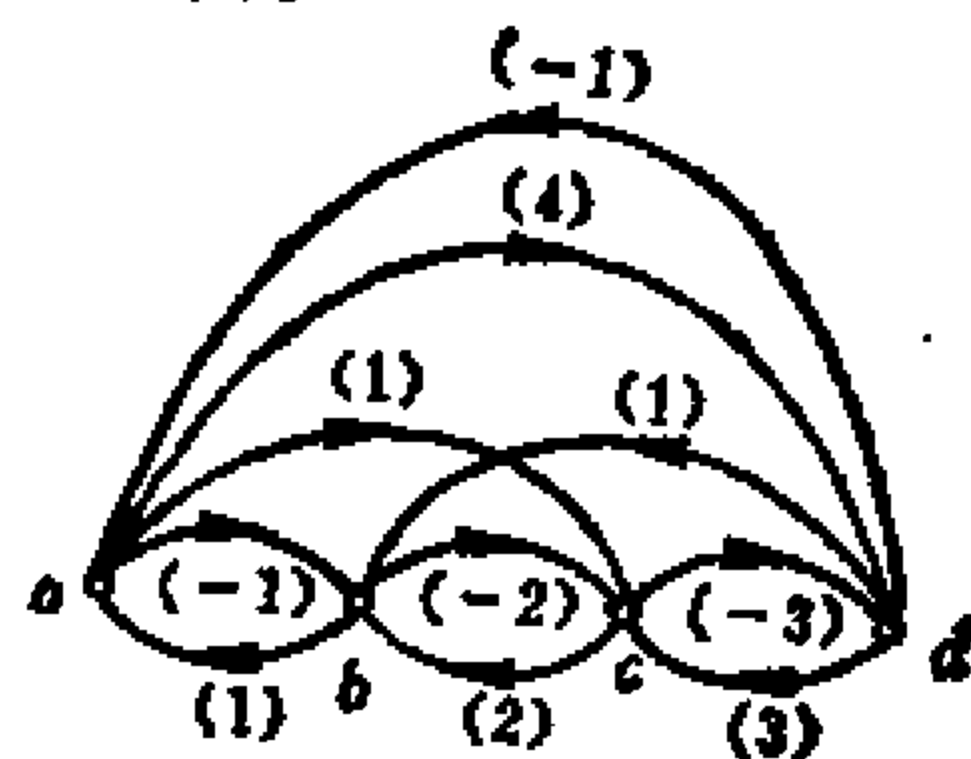
图P-12-6 有向EWC网

(a) G_1 ; (b) G_2 ; (c) G_3

7. 图P-12-7中哪一个网络是伪EWC网?



(a)

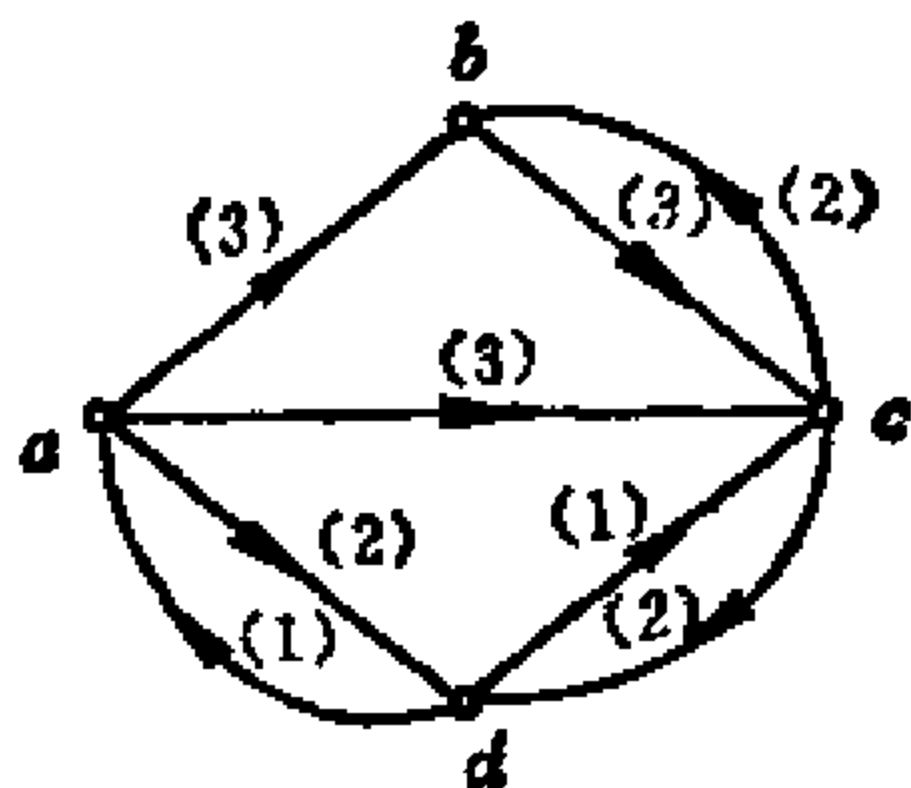


(b)

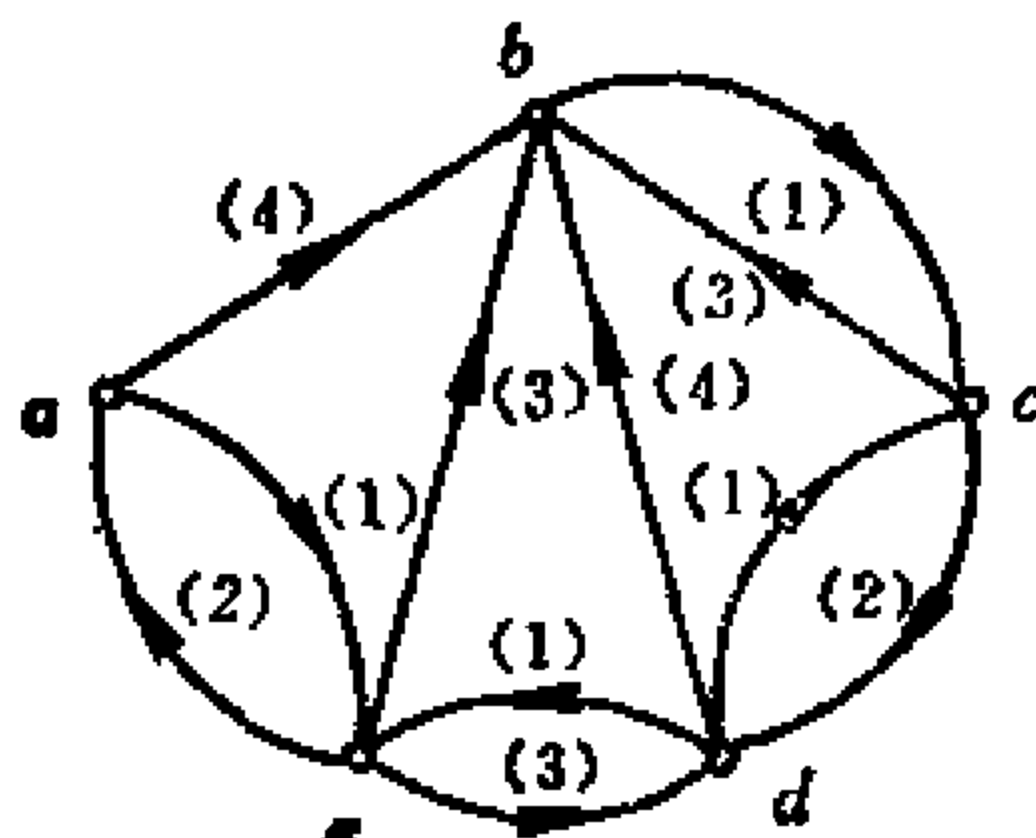
图P-12-7 网络

(a) G_1 ; (b) G_2

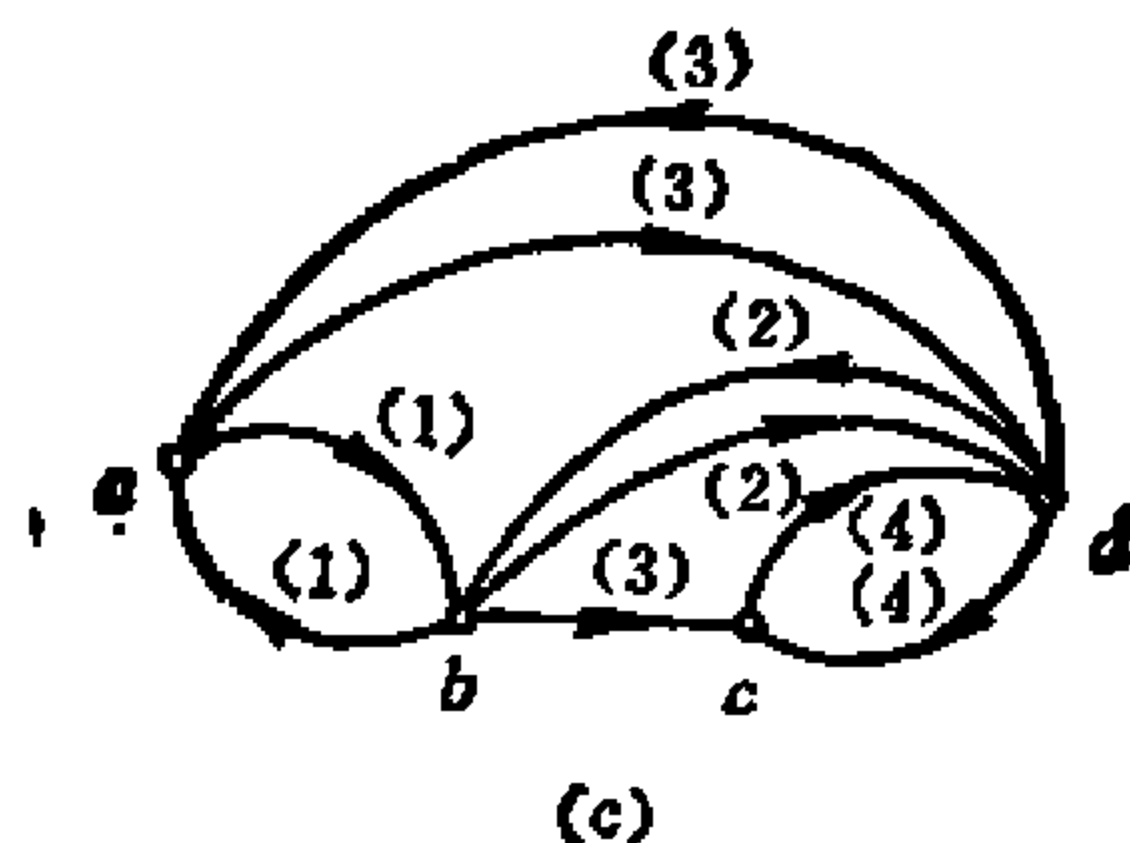
8. 求出图P-12-8中每个有向EWC网的基本伪EWC网.



(a)

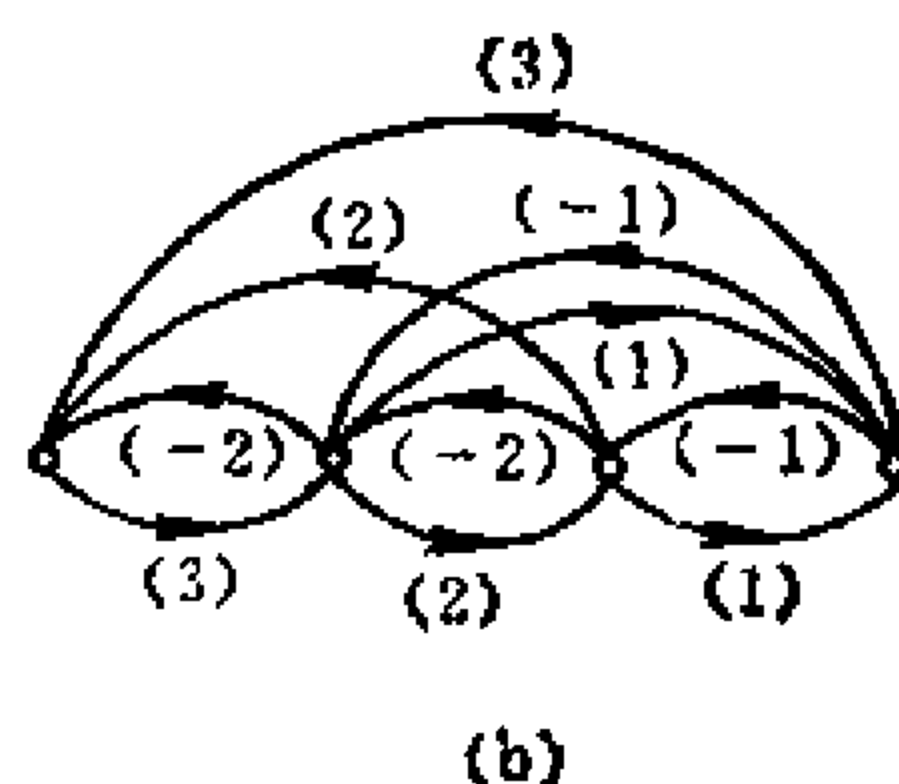
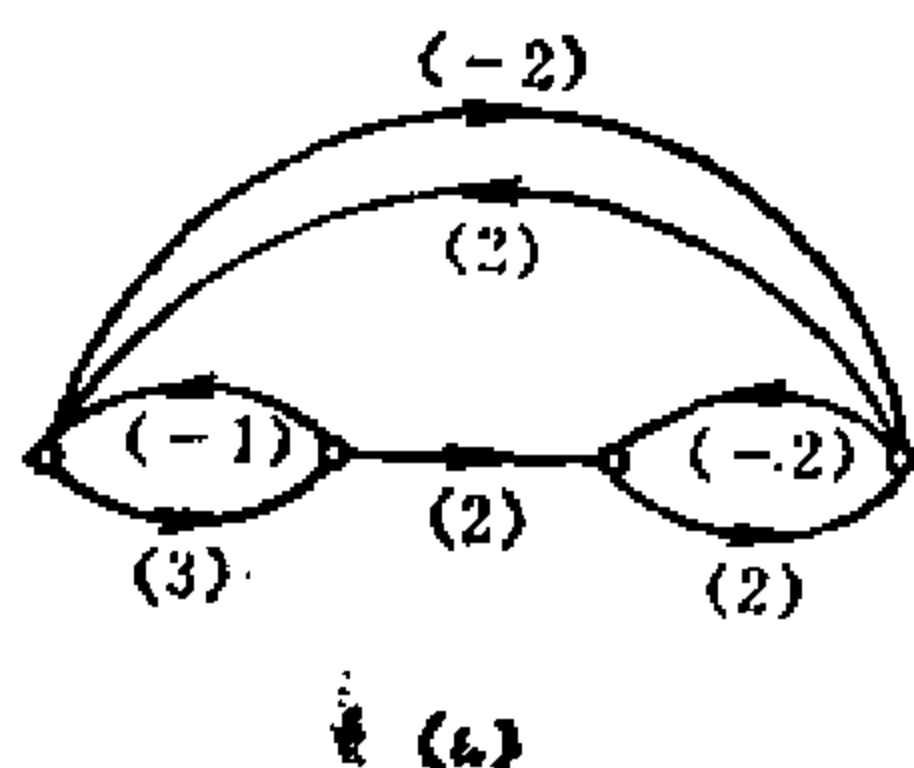


(b)



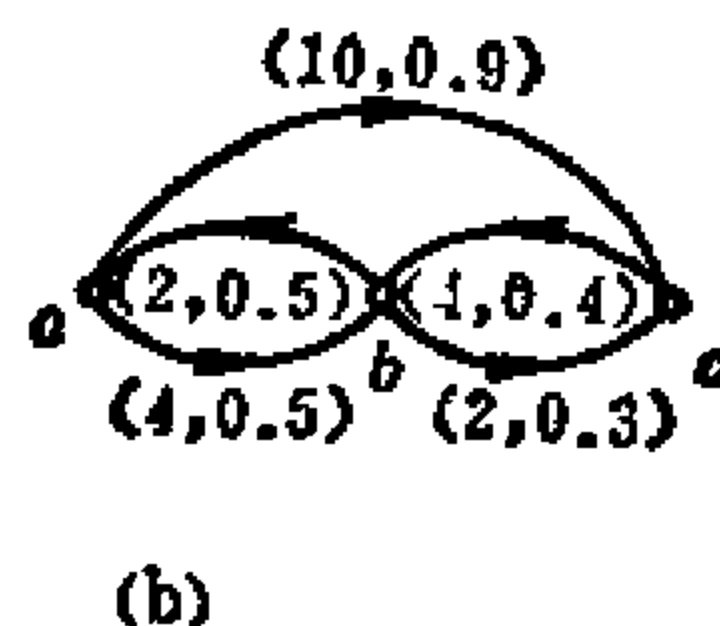
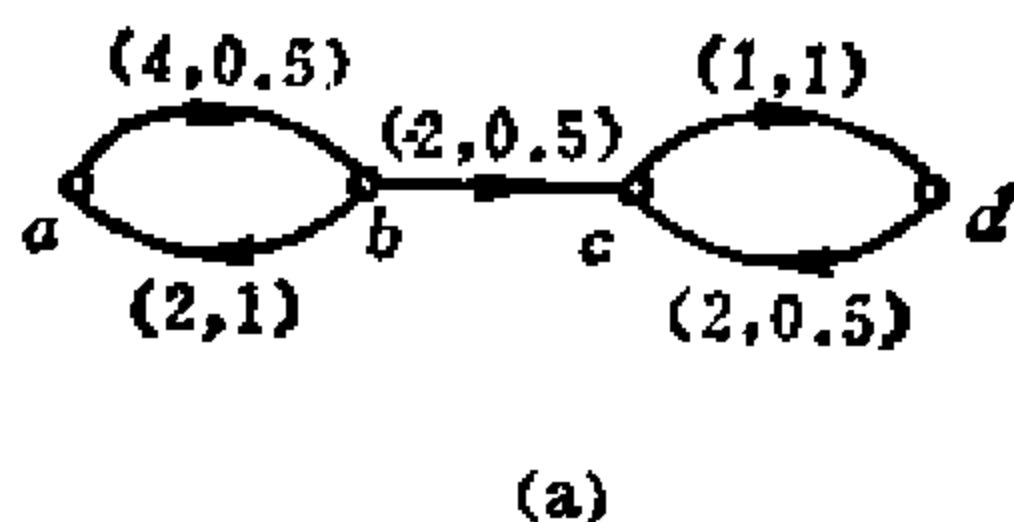
(c)
图P-12-8 有向EWC网
(a) G_1 ; (b) G_2 ; (c) G_3

9. 用移量算法从图 P-12-9 的各伪 EWC 网, 求出有向 EWC 网。



图P-12-9 伪EWC网
(a) G_1 ; (b) G_2

10. 求出图 P-12-10 中损耗 EWC 网的端限容量矩 \bar{T} 和 \underline{T} 。



图P-12-10 损耗EWC网
(a) G_1 ; (b) G_2

11. 设 R 是 EWC 网 G 在流 ψ_{ij} 下的流可靠度, 设 G' 是在 G 中添加边 e 得到的 EWC 网. 证明当边 e 的容量非零, 且边 e 的失效概率 $f(e)$ 小于 1 时, G' 在 ψ_{ij} 下的流可靠度 R' 不小于 R .
12. 计算图 P-12-12 中 EWC 网在从 i 到 j 分配最大流时的流可靠度 R , 其中括号内第一个数字是边容量, 第二个数字是边的失效概率.

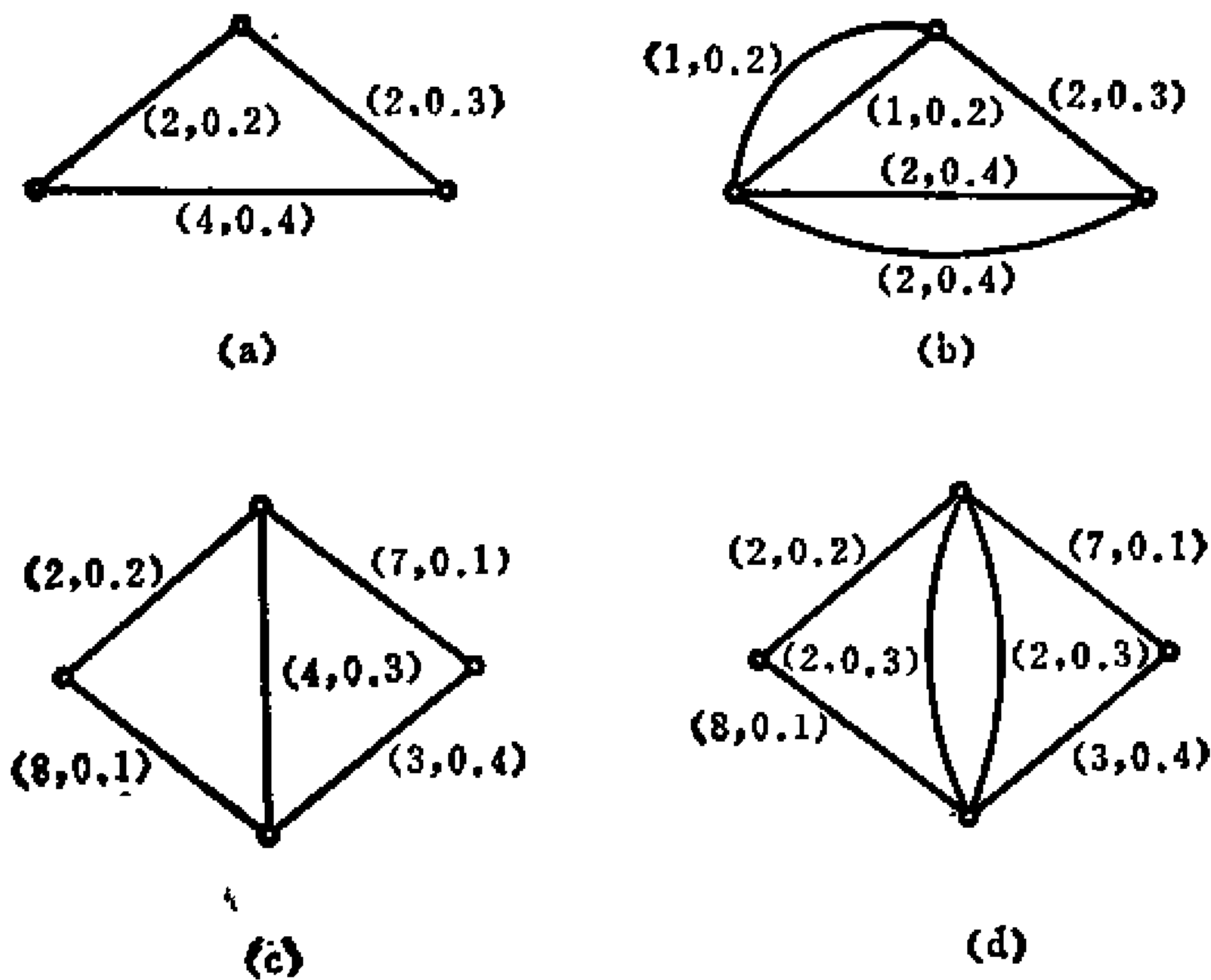


图 P-12-12

13. 计算图 P-12-12 中 EWC 网在 $\psi_{ij} = 4$ 和 $\psi_{ij} = 2$ 下的流可靠度 R .
14. 根据定理 12-7-3, 求出图 P-12-14 中 EWC 网在从 i 到 j 的最大流下的流可靠度 R 的上界和下界.

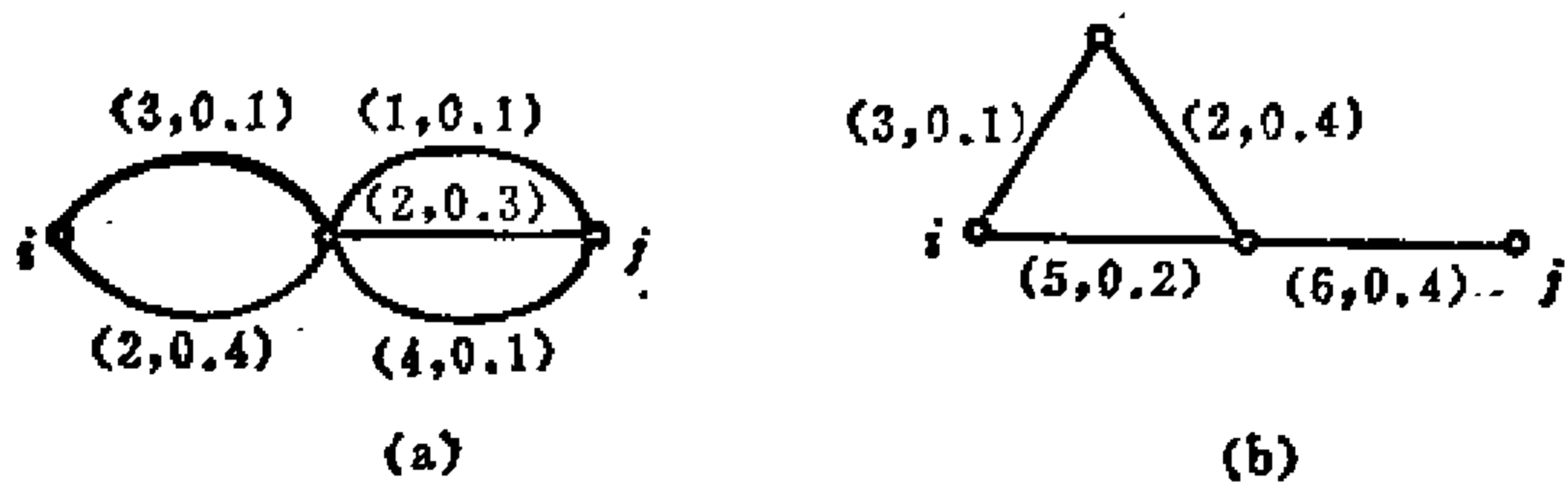


图 P-12-14

15. 利用定理12-7-2计算图P-12-15中 EWC 网在从 i 到 j 的最大流下的流可靠度 R .

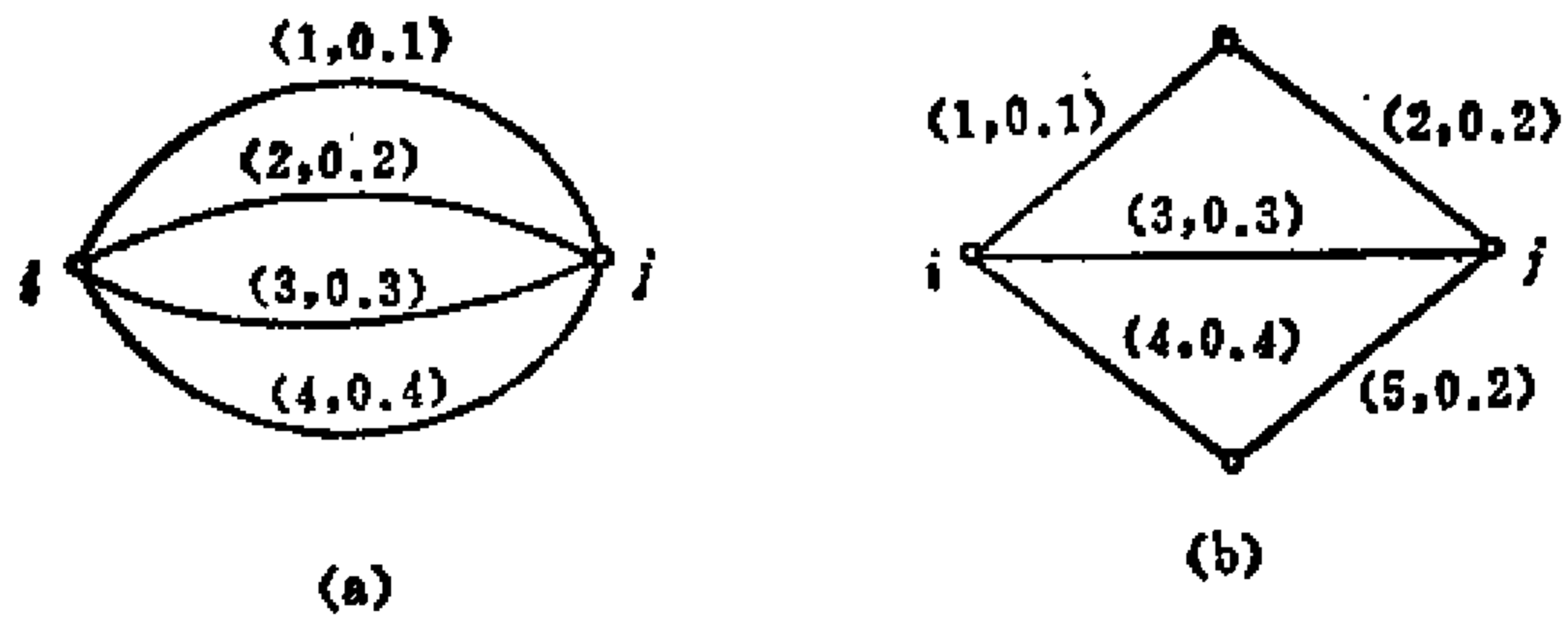


图 P-12-15

第十三章 传输网理论——点权例

13-1 无向情况下的端限容量

考虑一个典型数据传输系统中的站 V ，在这种系统中，每一个站都有许多输入端和输出端与别的站相连。当若干数据进入站 V 的输入端时，它们被全部收集起来。如果数据是编码的，可以在站 V 中译码。以后数据可能有修改。例如，如果站 V 是一个能提供附加信息的中间站，而进入此站的某一个特定数据在送到另一站去之前需要这样的附加信息，那么就将所需的信息在站 V 加进数据中去。若数据传输的目的地不同，就将它们分成若干组，使每一组的数据能被传送到站 V 的同一输出端。如有必要，这些数据被编码并储存在站 V 中，直到有可能传输到下一站去时才送出去。

通常每一站都由处理数据的设备所组成，而一个站在单位时间内所能处理的数据量是有上限的。但是，站与站之间的连线（传输线）却可能有传输数据的足够容量，从而使数据流不受连线的限制。也就是说，在这样的数据传输系统中，数据流仅受站的限制。要表示这样的系统自然可以利用线图，不过此处是每个顶点（而不是每条边）有一个容量，称为点容量，它表示通过这个顶点的流的上限。这样的线图叫做点权传输网(Vertex Weighted Communication 缩写为VWC网)。在VWC网中，每一条边代表两个站之间的一条连线，并且如果边是无向的，则流可以沿任何方向通过这条边。若所有的边均为无向的边，就称此网络

为无向VWC网。图 13-1-1 是无向VWC网的一个例子，其中点容量由每一个顶点旁的括弧中数字表示。

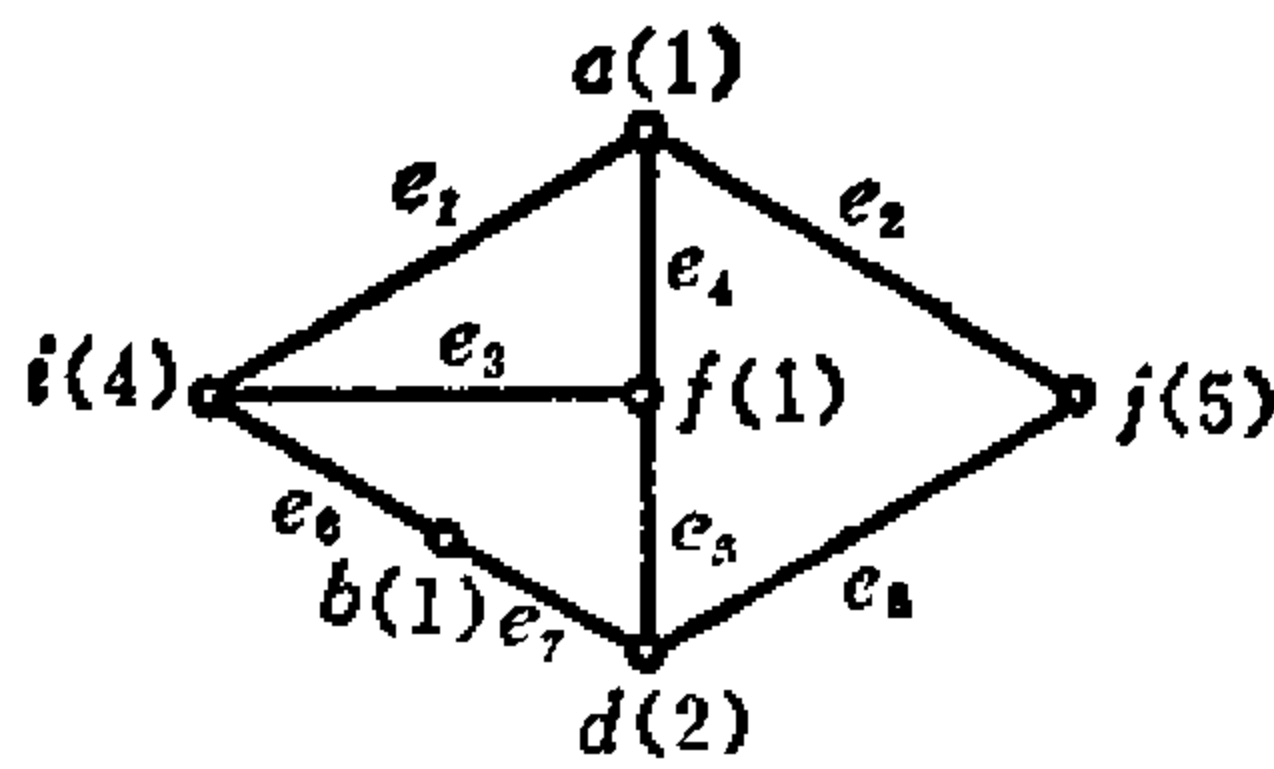


图13-1-1 无向VWC网

与第十二章中所讨论的EWC网一样，一个流是通过路径来分配的，也就是说，对于一条从 i 到 j 的路径可以分配以流 ψ_{ij} ，如果

$$\psi_{ij} \leq c_v - \psi_0(v) \quad \text{对于 } P_{ij} \text{ 中所有顶点 } v \quad (13-1-1)$$

其中 $\psi_0(v)$ 是原来已分配给顶点 v 的流。例如，我们可以如下面这样把流 ψ_{ij} 分配给图13-1-1中的VWC网。

首先，我们分配 $\psi_{1ij} = 1$ 给路径 $P_{1ij} = (e_1, e_4, e_6, e_8)$ ，这是可行的，因为

$$1 \leq \min \{c_i, c_a, c_d, c_f, c_j\}$$

其中 c_i 是顶点 i 的点容量， c_a 是顶点 a 的点容量，其余类推。在分配流 ψ_{1ij} 时，我们有

$$\psi_0(i) = \psi_0(a) = \psi_0(d) = \psi_0(f) = \psi_0(j) = 1$$

$$\psi_0(b) = 0$$

其次，分配流 $\psi_{2ij} = 1$ 给路径 $P_{2ij} = (e_6, e_7, e_8)$ ，这也是可行的，因为

$$1 \leq \min \{c_i - \psi_0(i), c_b - \psi_0(b), c_d - \psi_0(d), c_j - \psi_0(j)\}$$

结果如图13-1-2所示，可以看出，以 i 到 j 不能再分配更多

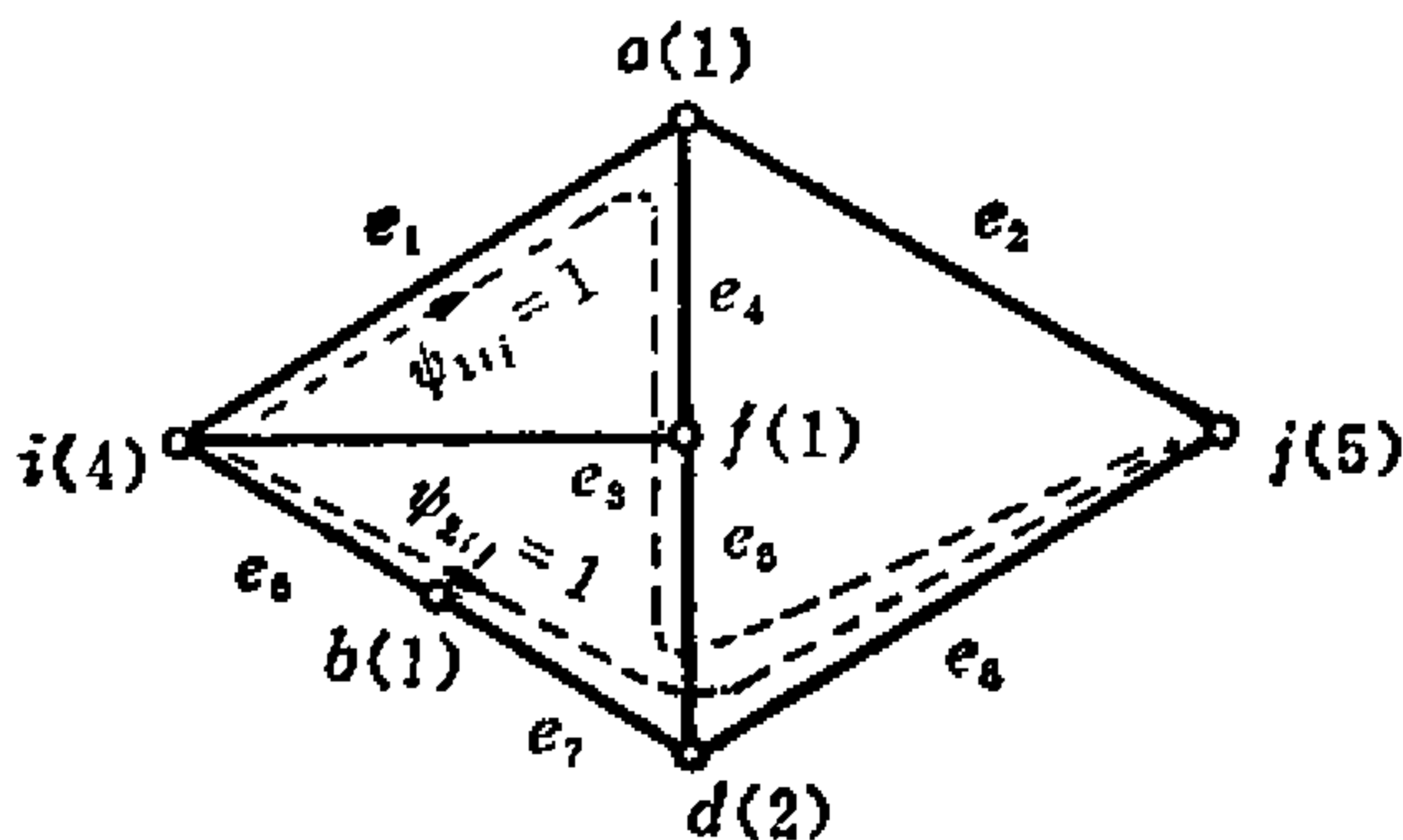


图13-1-2 $\psi_{1ij} + \psi_{2ij}$ 的分配

的流了。因此在这种分配方式下，总流为 2。若我们另作不同的分配方式，总流还可以增加，如图13-1-3所示。

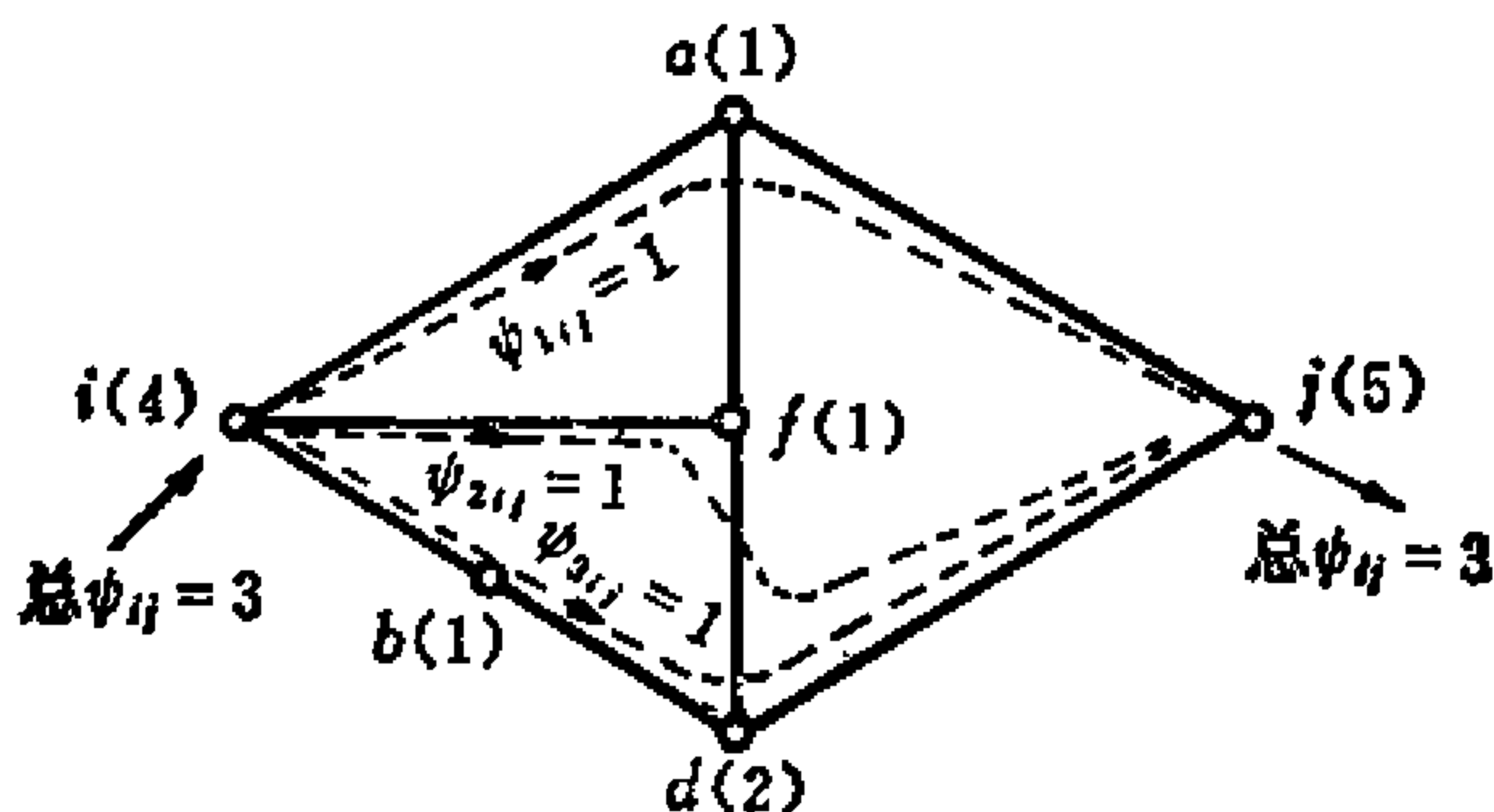


图13-1-3 流 $\psi_{ij} = 3$ 的分配

在 EWC 网情况下，如果知道了割集，就可以算出最大流。同样，在 VWC 网中，如果知道了所谓点割，便可以确定最大流。为了定义点割，必须先解释一下从一个线图中删去一些顶点的含义。

定义13-1-1 设 Ω 是线图 G 中一些顶点的集合。删去 Ω 中所

有顶点的意思是从 G 中删去 Ω 的所有顶点，以及与这些顶点关联的边。

例如，如果我们从图13-1-1中的线图里删去顶点 a 和 d ，则所得的图不包含边 $e_1, e_2, e_4, e_6, e_7, e_8$ 以及顶点 a 和 d （见图13-1-4）。



图13-1-4 删除顶点 a 和 d

点割的定义也是以后要用到的。

定义13-1-2 假定在一个线图中，从顶点 i 到顶点 j 至少有一条路径，则一个分离 i 和 j 的点割是这样一个小顶点集合，只要删去这个集合的全部顶点就破坏了从 i 到 j 的所有路径。若删去一些顶点后所得的图不再包含顶点 i 或顶点 j ，那么也认为 i 和 j 之间的路径被破坏了。

考虑图13-1-1所示的线图，集合 (a, d, f) 不是分离 i 和 j 的点割，因为只要删去顶点 a 和 d 就能破坏 i 和 j 之间的所有路径。然而，只删去 a 或 d （而不是 a 与 d ），却不能破坏 i 和 j 之间的所有路径。所以 (a, d) 才是分离 i 和 j 的点割（见图13-1-4）。在图13-1-1的线图中，分离 i 和 j 的所有点割是 $(i), (j), (a, b, f)$ 和 (a, d) 。

为了研究VWC网中的最大流，我们接着就定义饱和点割。

定义13-1-3 若分配给一个顶点的流等于该顶点的容量，我们就说这个顶点是饱和的。若一个点割中所有顶点都是饱和的，我们就说这个点割是饱和的（或称之为饱和点割）。

作为饱和顶点的一个例子，考虑图13-1-2中所分配的流。顶点 a 是饱和的，因为分配给顶点 a 的流为1，并且顶点 a 的容量

也是 1。注意如果一个顶点是饱和的，我们就不能再分配任一更大的流通过这个顶点了。在同一图中。点割 (a, d) 和 (a, b, f) 都是饱和的。但是，可以看出在一种流的分配方式下存在一个饱和点割，并不表明我们就得到了最大流。另一方面，我们可以说，如果存在一个分离 i 和 j 的饱和点割，就不能从 i 到 j 再分配附加的流了。

定理13-1-1 当分配一个从 i 到 j 的流 ψ_{ij} 时，如果存在一个分离顶点 i 和 j 的饱和点割，那么从 i 到 j 就不能再分配任何附加的（非零）流。

证明： 因为从 i 到 j 的任一路径都要经过分离 i 和 j 的点割中的顶点，又因为这个点割中所有的顶点都是饱和的，显然不可能再从 i 到 j 分配另外的流。 (证毕)

与 EWC 网的基本饱和割集相似，我们定义基本饱和点割如下。

定义13-1-4 当分离 i 和 j 的点割按一种分配方式变为饱和点割时，若从 i 到 j 分配了非零流的每一路径刚好通过该点割的一个顶点，则称此饱和点割在此分配方式下是基本的，或称为基本饱和点割。

考虑图13-1-2中流的分配方式。集合 (a, d) 不是基本饱和点割，因为分配了非零流 ψ_{ij} 的路径 (e_1, e_4, e_6, e_8) 通过 a, d 两个顶点。在图13-1-3中流的分配方式下，集合 (a, d) 是基本饱和点割，集合 (a, b, f) 也是基本饱和点割。根据这个定义，我们有以下的重要定理。

定理13-1-2 对于一个无向 VWC 网，以 i 到 j 的流是最大流，当且仅当存在一个分离 i 和 j 的基本饱和点割。

在证明这个定理之前，我们先研究一下有关的引理。

引理13-1-1 设 W_1 和 W_2 都是分离顶点 i 和 j 的点割。在删去 W_1 的所有顶点后所得的图中，设 G_2 是包含顶点 j 的最大连通

子图, G_1 是余下的子图, 注意 G_1 和 G_2 都可能只由顶点构成. 如果 W_2 同时包含 G_1 和 G_2 中的顶点, 那么存在一个分离 i 和 j 的点割 W , 使得 $W \subset W_1 \cup W_2$, 且 W 不包含 G_1 中任何顶点.

证明: 考虑图13-1-5的线图, 这个线图的所有顶点都是在不相交的集合 $\Omega_{11}, \Omega_{12}, \Omega_{21}, \Omega_{22}, \Omega_A, \Omega_I, \Omega_B, U_A$ 和 U_B 之中, 点割 $W_1 = \Omega_A \cup \Omega_I \cup \Omega_B$, 点割 $W_2 = U_A \cup \Omega_I \cup U_B$, $i \in \Omega_{11}$. 注意 G_1 由 Ω_{11}, Ω_{12} 和 U_A 中所有的顶点及连接这些顶点的所有边组成, G_2 由 Ω_{21}, Ω_{22} 和 U_B 中所有顶点及连接这些顶点的所有边组成. 还要注意, 图中的线图是一般情况, 足以用来证明这个引理.

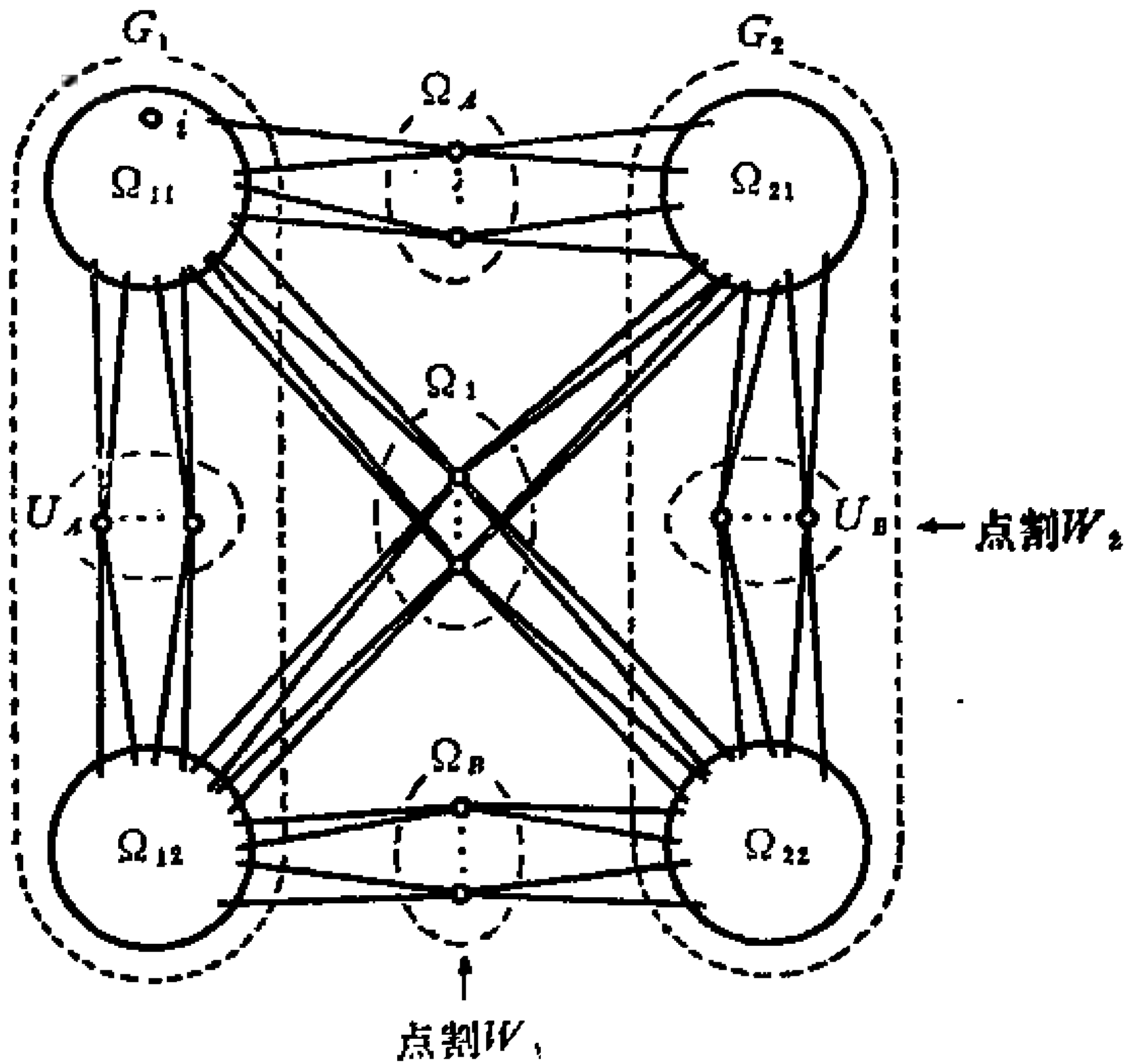


图13-1-5 点割 W_1 和 W_2

因为 $j \in G_2$, 所以 j 既可能在 Ω_{21} 中, 也可能在 Ω_{22} 中, 当 $j \in \Omega_{21}$ 时, 显然集合 $\Omega_A \cup U_B \cup \Omega_I$ 包含所求分离 i 和 j 的点割的集合。同样, 当 $j \in \Omega_{22}$ 时, 集合 $U_B \cup \Omega_I \cap \Omega_B$ 包含所求分离 i 和 j 的点割的集合。 (证毕)

定义13-1-5 设 W_0 是一个分离 i 和 j 的饱和点割, 在删去 W_0 的所有顶点得到的图中, G_2 是包含顶点 j 的最大连通子图, G_1 是余下的子图。如果不存在其他分离 i 和 j 并包含 G_2 的顶点的饱和点割, 那么就称 W_0 为最接近顶点 j 的饱和点割。

图13-1-2中的点割 (a, d) 是最接近 j 的饱和点割, 因为不存在其他分离 i 和 j 并包含顶点 j 的饱和点割。注意在这里 G_2 只由一个顶点组成, 即顶点 j 。还要注意, 这样的点割的存在是由引理13-1-1所保证的。

利用这个定义, 我们可以证明定理13-1-2如下。如果不存在分离 i 和 j 的饱和点割, 我们就可以分配一个从 i 到 j 的附加流。因此, 如果已对一个无向 VWC 网 G 分配了一个从 i 到 j 的最大流, 那么我们可以假设, 至少存在一个分离 i 和 j 的饱和点割。

假定存在 k 个分离 i 和 j 的饱和点割, 但它们都不是基本饱和点割。设 W_0 是最接近 j 的饱和点割, 如图 13-1-6 所示。因为

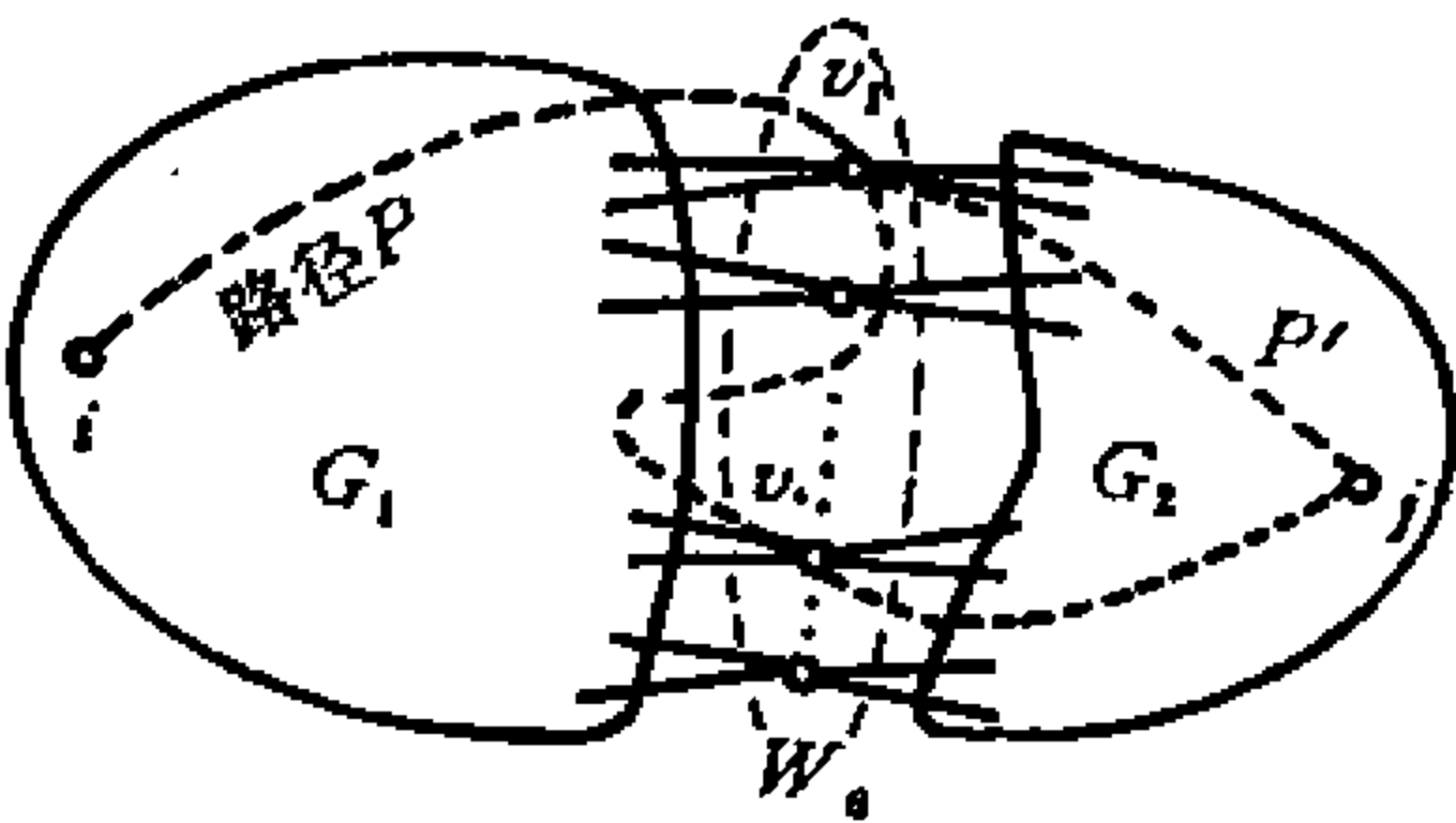


图13-1-6 饱和点割 W_0 及路径 P 和 P'

W_0 不是一个基本饱和点割，所以存在一条从 i 到 j 并且已分配到非零流 $\psi_{i,j}$ 的路径，它通过 W_0 中一个以上的顶点。设这条路径是 P ，它在 W_0 中通过的第一个顶点是 v_1 ，如图所示。那么存在一条从 v_1 到 j 的路径 P_1 ，它只通过 G_2 的顶点，对这条路径就能分配一个从 v_1 到 j 的非零流。设 P' 是一条从 i 到 j 的路径，它是由路径 P_1 和路径 P 从 i 到 v_1 的一段组成的。对某些非零 δ ，把已分配给 P 的流变成 $\psi_{i,j} - \delta$ ，并将 δ 分配给路径 P' ，我们就可以保持从 i 到 j 的流的数量不变。然而因为在 W_0 中至少有一个顶点，它分配到的流量减少了 δ ，故 W_0 已不再是饱和的了。于是重新分配从 i 到 j 的流，就可以使饱和点割的数目减少，且不产生基本饱和点割。只要至少存在一个饱和点割而不存在分离 i 和 j 的基本饱和点割，这种作法就是可行的。因此我们可以把饱和点割的数目从 k 减少到零。由于当分离 i 和 j 的饱和点割不存在时，我们可以再分配一个附加流，所以原来分配的流不可能是最大流，这是一个矛盾。因此必定至少有一个分离 i 和 j 的基本饱和点割存在。逆定理的证明留给读者。

为了从点割求最大流，我们定义点割的值如下。

定义13-1-6 符号 $V[W_0]$ 表示集合 W_0 中所有顶点点容量之和，称为集合 W_0 的值。

例如，图13-1-1中线图的点割 (a, d) 的值为 $V[(a, d)] = 1 + 2 = 3$ 。

当从 i 到 j 分配了最大流时，根据定理13-1-2，必有一个分离 i 和 j 的基本饱和点割存在。为了得到最大流，已对从 i 到 j 的路径分配了非零流。由定义，这里每条路径正好经过基本饱和点割的一个顶点。因此，如果 W_0 是一个分离 i 和 j 的基本饱和点割，那么 W_0 的值必定等于从 i 到 j 的最大流。与 EWC 网的情况一样，如果我们用端限容量 $t_{i,j}$ 来表示从 i 到 j 的最大流，就有

$$t_{ij} = V[W_0] \quad (13-1-2)$$

设 $\{W\}$ 是分离 i 和 j 的所有可能点割, 则我们可以看出, 对于 $\{W\}$ 中每一个 W , 必有

$$V[W_0] \leq V[W] \quad (13-1-3)$$

定理13-1-3 对于一个无向 VWC 网, 从 i 到 j 的端限容量 t_{ij} 等于

$$t_{ij} = \min \{V[W], W \in \{W\}\} \quad (13-1-4)$$

注意这个定理与定理12-1-3之间的相似之处。

例13-1-1 考虑图13-1-1中的无向 VWC 网 G 。分离 i 和 j 的全部点割为 (i) , (j) , (a, b, f) 和 (a, d) 。这些点割的值分别为

$$V[(i)] = 4$$

$$V[(j)] = 5$$

$$V[(a, b, f)] = 3$$

$$V[(a, d)] = 3$$

所以从 i 到 j 的端限容量 t_{ij} 为

$$t_{ij} = \min \{4, 5, 3, 3\} = 3$$

当考虑从 i 到 d 的最大流时, 我们利用分离 i 和 d 的全部点割, 即 (i) , (d) , (a, b, f) 和 (b, f, j) 。则从 i 到 d 的端限容量 t_{id} 为

$$t_{id} = \min \{4, 2, 3, 7\} = 2$$

对于讨论各端限容量之间的关系来说, 重要的是至少存在着一个点割, 它在从一个顶点到另一个顶点最大流的任一分配方式下是基本饱和点割。这样的一个点割称为端限容量的对应点割。

定义13-1-7 如果对于每一个从 i 到 j 的最大流的每一分配方式, W_0 都是分离 i 和 j 的基本饱和点割, 则称 W_0 为端限容量 t_{ij} 的对应点割。

为了证明 t_{ij} 的对应点割的存在性, 我们用反证法, 从而得到

矛盾的结果。

设 $\{W_{11}W_{12}\cdots W_{1K_1}\}$ 是最大流的一种分配方式产生的所有分离 i 和 j 的基本饱和点割的集合。设这个分配方式是将 $\psi_{r,i}$ 分配给 P_{r1} ($r = 1, 2, \dots, m_1$)。设 $\{W_{21}W_{22}\cdots W_{2K_2}\}$ 是最大流的另一种分配方式而产生的所有分离 i 和 j 的基本饱和点割的集合。假定这种分配方式是将 $\psi_{s,i}$ 分配给从 i 到 j 的路径 P_{s2} ($S = 1, 2, \dots, m_2$)。现在我们假设 $\{W_{11}W_{12}\cdots W_{1K_1}\} \cap \{W_{21}W_{22}\cdots W_{2K_2}\} = \phi$ 。对于 $r = 1, 2, \dots, m_1$ 和 $S = 1, 2, \dots, m_2$, 把 $\alpha\psi_{r,i}$ 分配给 P_{r1} , 把 $(1-\alpha)\psi_{s,i}$ 分配给 P_{s2} , 其中 $0 < \alpha < 1$, 将得到从 i 到 j 的最大流的一种新分配方式。因为任何一个 W_{1p} ($1 \leq p \leq k_1$) 都不在 $\{W_{21}W_{22}\cdots W_{2K_2}\}$ 中, 所以新分配法不能使 W_{1p} 变成基本饱和点割。同样, 任何 W_{2q} ($1 \leq q \leq k_2$) 都不在 $\{W_{11}W_{12}\cdots W_{1K_1}\}$ 中, 所以新分配法也不能使 W_{2q} 变成基本饱和点割。并且, 这种新分配法也不能使其他任何点割变成基本饱和点割。可见在这种新分配方式下, 不存在基本饱和割集。这就意味着这个流不是最大的, 这是一个矛盾。因此至少有一个点割既在 $\{W_{11}W_{12}\cdots W_{1K_1}\}$ 中, 又在 $\{W_{21}W_{22}\cdots W_{2K_2}\}$ 中。

假定 $\{W_{p1}W_{p2}\cdots W_{pk_p}\}$ 是最大流的分配方式 $\psi_i^{(p)}$ ($p = 1, 2, \dots, n$) 而产生的所有分离 i 和 j 的基本饱和点割的集合。根据同样的理由, 我们可以证明在所有这些集合中, 至少存在一个基本饱和点割 W_0 , 有

$$W_0 \subset \bigcap_{p=1}^n \{W_{p1}W_{p2}\cdots W_{pk_p}\} \quad (13-1-5)$$

并且可以断定, 有一个端限容量的对应点割存在。利用这个对应点割, 可以证明以下重要定理。

定理13-1-4 在一个无向 VWC 网里, 对于任意三个顶点 i, j 和 k , 有

$$t_{ij} \geq \min \{t_{ik}, t_{kj}\} \quad (13-1-6)$$

证明： 考虑图13-1-7中的线图， W_0 是端限容量 t_{ij} 的对应点割。

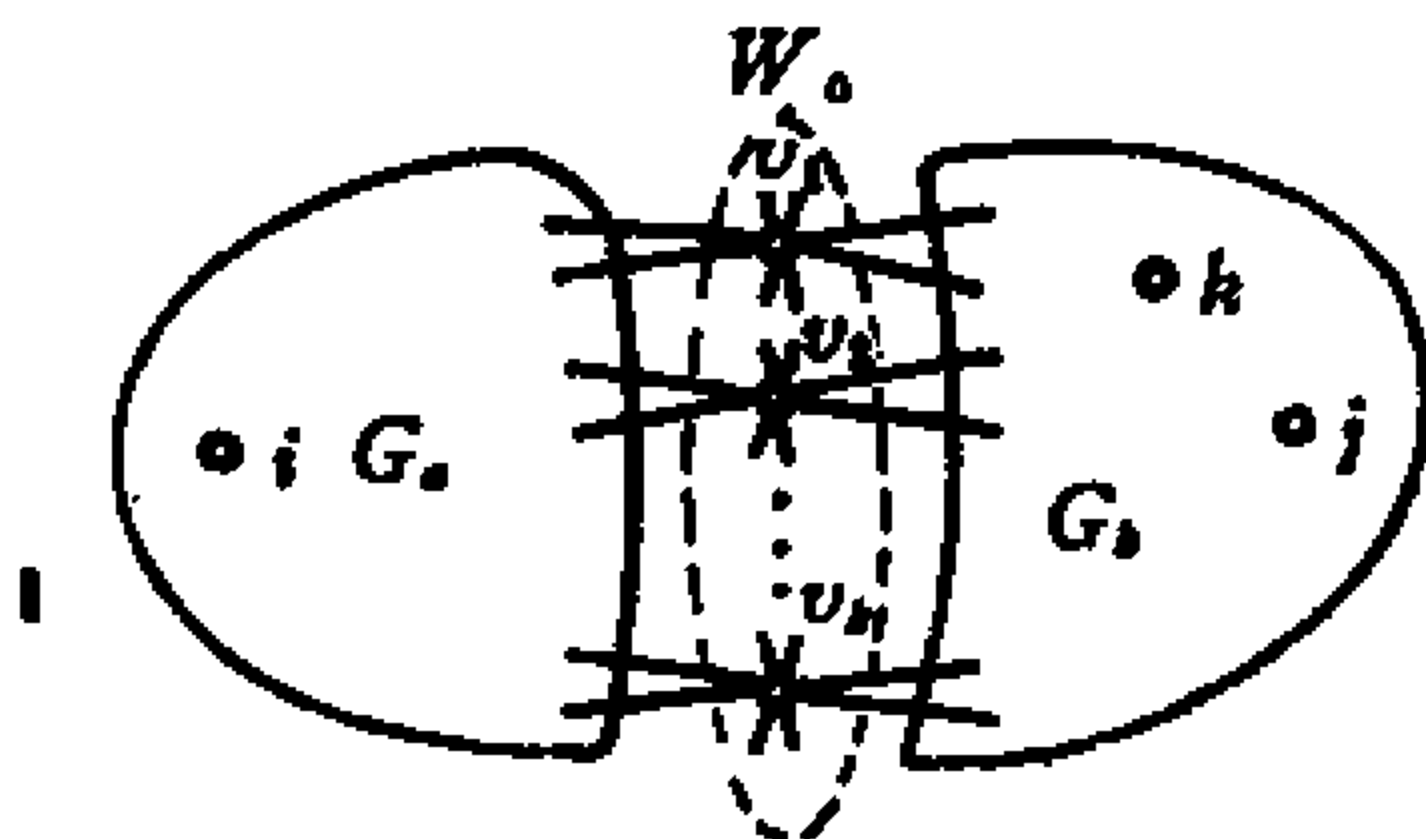


图13-1-7 顶点 i, j, k 和点割 W

情形 1 假定顶点 k 在 G_b 中，于是，若 t_{ik} 的对应点割 W_1 也是分离 i 和 j 的点割，则 $V[W_1]$ 必定等于 $V[W_0]$ 。所以 $t_{ij} = t_{ik}$ 。如果 W_1 不是分离 i 和 j 的点割，如图13-1-8所示，则 t_{ik} 不可能大于 t_{ij} 。因为 W_0 也是分离 i 和 k 的点割，所以在这种情形下定理为真。

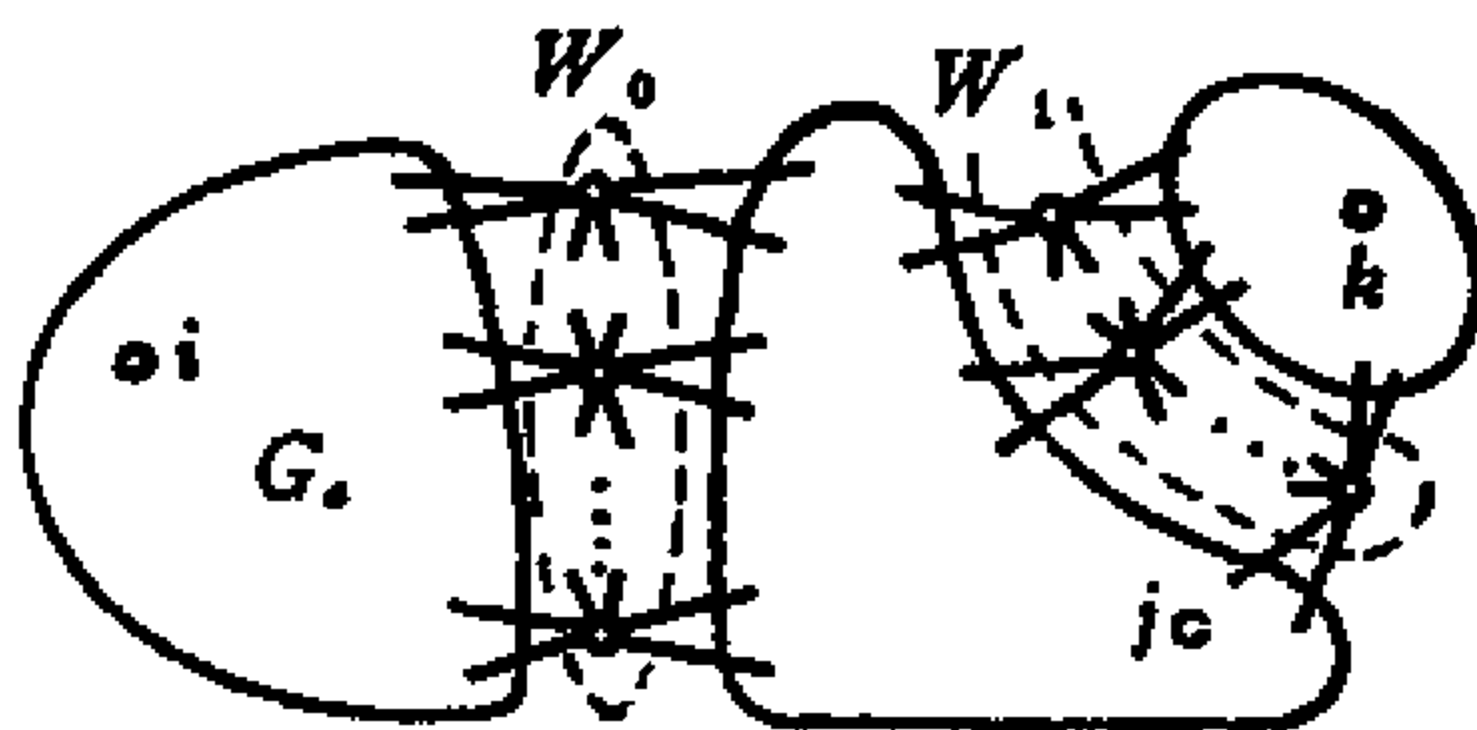


图13-1-8 点割 W_0 和 W_1

情形 2 假定顶点 k 在 W_0 中，那么，显然 $t_{ij} \geq t_{ik}$ 。因此在这种情形下定理为真。

情形 3 假定顶点 k 在 G_a 中，那么，如果我们不考虑 t_{ik} ，而是考虑 t_{ki} ，就将得到与情形 1 一样的结果，即 $t_{ij} \geq t_{ki}$ 。因此

在这种情形下定理为真。

当顶点 i 或者顶点 j 构成一个点割 W_0 时，我们有与情形 1，2 或 3 相同的情况，这取决于顶点 k 的位置。由此定理为真。
(证毕)

这个三角关系正好与 EWC 网中的三角关系一样。作为一个例子，我们考虑图 13-1-1 中的 VWC 网。在例 13-1-1 中，曾求出端限容量 $t_{ij} = 3$ ， $t_{ia} = 2$ 。对于这种情况，显然有 $t_{ij} \geq \min\{t_{ia}, t_{aj}\}$ 。让我们来看看， $t_{ia} \geq \min\{t_{ij}, t_{ja}\}$ 是否成立。因为 $t_{ij} > t_{ia}$ ，如果定理 13-1-4 是对的，必定有 $t_{ia} \geq t_{ja}$ 。用定理 13-1-3 算出 t_{ia} 为

$$t_{ja} = \min\{2, 5\} = 2$$

可以看出，上式是成立的。

13-2 无向 VWC 网的端限容量矩阵

VWC 网的端限容量矩阵可以完全象 EWC 网一样定义：端限容量矩阵 T 的每一个元素是

$$\begin{aligned} t_{ij} &= \text{从 } i \text{ 到 } j \text{ 的端限容量, } i \neq j \\ t_{ii} &= d \end{aligned}$$

(通常把 t_{ii} 定义为顶点 i 的点容量。但这里仍用记号 d ，为的是让 EWC 网和 VWC 网的端限容量矩阵有相同的形式。)

例如，图 13-2-1 中 VWC 网的端限容量矩阵为

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{bmatrix} d & 2 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & d & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & d & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & d & 4 \\ 6 & 2 & 1 & 4 & d \end{bmatrix} \end{matrix}$$

因为我们所讨论的是无向 VWC 网，故端限容量矩阵是对称

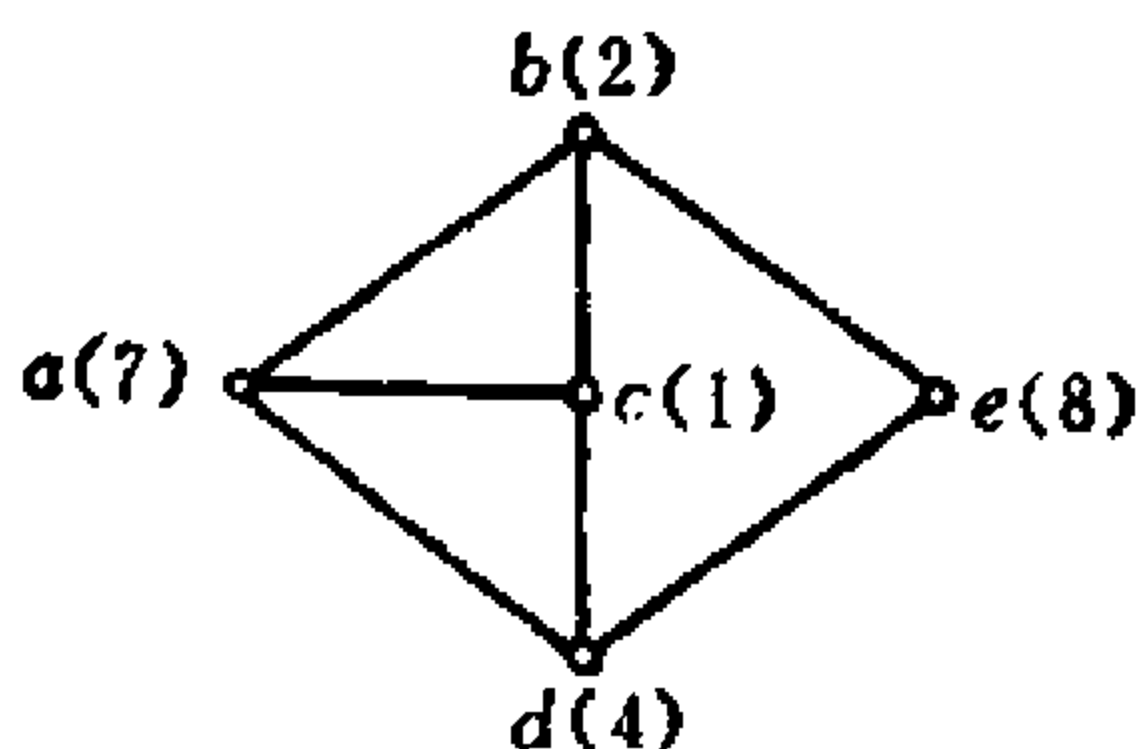


图13-2-1 VWC网

的。并且由于端限容量对应点割的存在，这个矩阵也有主分块划分特性，这与 EWC 网的端限容量矩阵是一致的。

定理13-2-1 设 T 是一个无向 VWC 网的端限容量矩阵，则主分块划分可适用于 T ，也适用于由主分块划分产生的，阶数大于 1 的每个结果主子阵。

这个定理的证明与 EWC 网所满足的定理12-2-1条件的必要性的证明非常相似。

例如，在图13-2-1的 VWC 网中，重排端限容量矩阵的行和列为

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} c & b & d & a & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} c \\ b \\ d \\ a \\ e \end{matrix} & \begin{bmatrix} d & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & d & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & d & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 6 & d \end{bmatrix} \end{matrix}$$

我们可以看出，定理13-2-1是成立的。

考虑以下矩阵：

$$M = \begin{bmatrix} d & 2 & 1 & 1 \\ 2 & d & 1 & 1 \\ 1 & 1 & d & 3 \\ 1 & 1 & 3 & d \end{bmatrix}$$

我们可以证明它并不是一个由四个顶点构成的无向 VWC 网的端限容量矩阵。但是，对矩阵本身和所有的结果主子阵都可以施行主分块划分。这个例子表明，尽管可以把一个矩阵看成一个 VWC 网（其顶点数与矩阵阶数相同）的端限容量矩阵来进行主分块划分，定理13-2-1的条件却不是充分的。（回忆一下，定理12-2-1所给出的条件对于 EWC 网是充分的。）

一个原因是，VWC 网的端限容量具有的一些特殊性质是 EWC 网所没有的。为了找到这些性质，设 W_0 是从 i 到 j 的端限容量的对应点割，如图13-2-2所示，其中 W_0 假设为 (v_1, v_2, \dots, v_k) ，又设 c_1, c_2, \dots, c_k 分别是顶点 v_1, v_2, \dots, v_k 的点容量。注意 $c_1 + c_2 + \dots + c_k$ 等于 t_{ij} 。

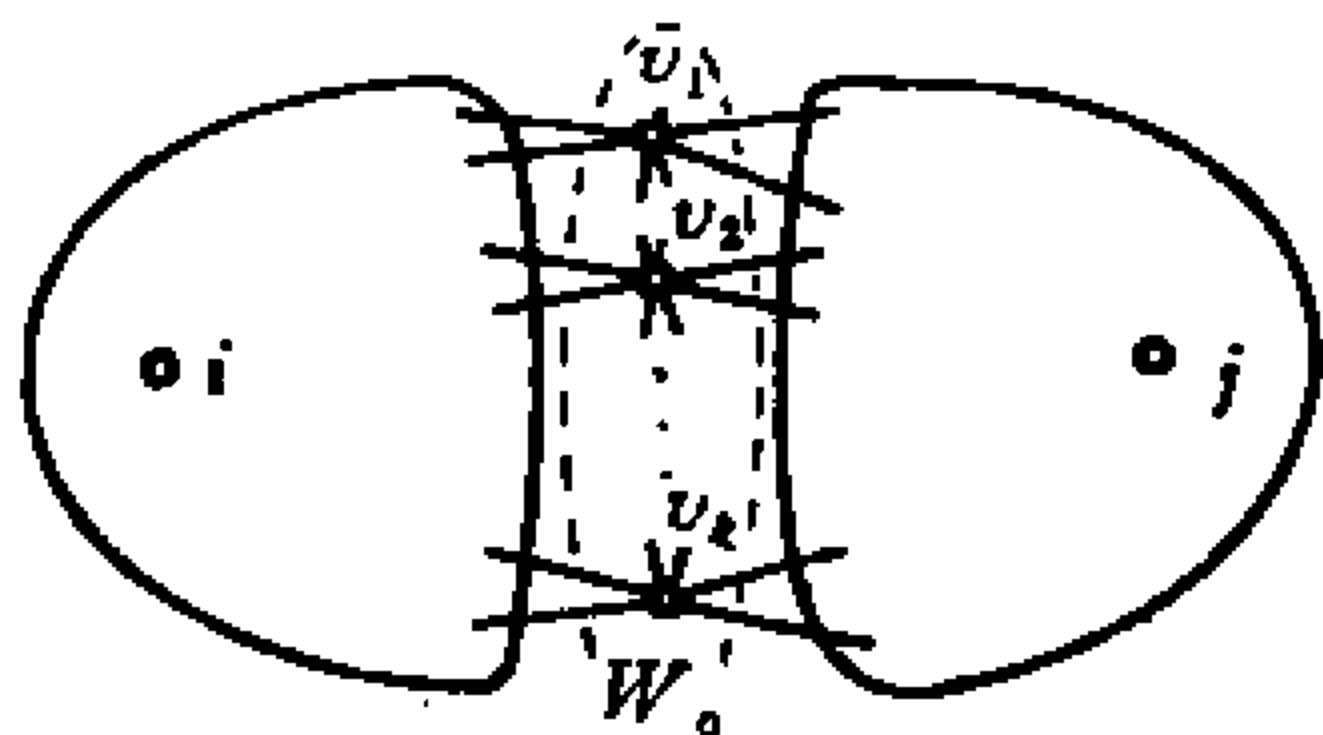


图13-2-2 点割 W_0

为了求出从 i 到 v_1 的端限容量 t_{iv_1} ，我们来回忆一下是怎样分配最大流的，就是，当分配从 i 到 j 的最大流 $\psi_{ij} = \sum_{r=1}^n \psi_{ri}$ 时，

每个 $\psi_{r,ij}$ 都要分配给一条从 i 到 j 的路径 P_r 。假定流 $\psi_{1,ij}, \psi_{2,ij}, \dots, \psi_{m,ij} (m \leq n)$ 已分配给从 i 到 j 的路径 P_1, P_2, \dots, P_m ，它们都通过顶点 v_1 。

$$\text{又} \quad \sum_{r=1}^m \psi_{r,ij} = c_1 \quad (13-2-1)$$

这是因为按此分配方式顶点 v_1 是饱和的。由于从 i 到 v_1 的最大流是这样分配的，即采用相同的流 $\psi_{1,ij}, \psi_{2,ij}, \dots, \psi_{m,ij}$ ，中的一部分来分配给路径 P_1, P_2, \dots, P_m 中的一部分，所以从 i 到 v_1 的最大流不可能小于 c_1 ，然而 t_{iv_1} 又不能大于 c_1 ，因此 $t_{iv_1} = c_1$ 。对于每一个端限容量 $t_{iv_p} (p = 1, 2, \dots, k)$ ，这个结论同样都是对的。

定理13-2-2 设 $W_0 = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ 是端限容量 t_{ij} 的对应点割，则对 $p = 1, 2, \dots, k$ ， $t_{iv_p} = c_p$ ，且

$$t_{ij} = \sum_{p=1}^k t_{iv_p} \quad (13-2-2)$$

其中 c_p 是顶点 v_p 的点容量。

定理13-2-3 假定端限容量 t_{ij} 不等于 i, j 的顶点容量 c_i 或 c_j ，则存在端限容量 $t_{iv_p} (p = 1, 2, \dots, m)$ ，使

$$t_{ij} = \sum_{p=1}^m t_{iv_p} \quad (13-2-3)$$

下面的引理给出了另一个有趣的性质。

引理13-2-1 设 t_{ij} 是 VWC 网的最小端限容量，则

$$t_{ij} = \min \{c_i, c_j\} \quad (13-2-4)$$

其中 c_i 和 c_j 分别为顶点 i 和 j 的点容量。

利用这个引理，我们总可以把一个无向 VWC 网的端限容量矩阵 T 分块为

$$T = \left[\begin{array}{c|c} d & T_{11} \\ \hline T_{11}^t & T_{22} \end{array} \right] \quad (13-2-5)$$

其中 T_{11} 是一个行矩阵，它是由 T 中最小而又相同的元素组成的，为了简便，我们称这种分块为简单分块。注意一个简单分块最多有一个结果主子阵 T_{22} 由一个以上的元素组成。端限容量矩阵的充分条件可以利用简单分块叙述如下。

定理13-2-4 如果对一个矩阵及包含一个以上元素的全部结果主子阵都可进行简单分块划分，则此矩阵是无向 VWC 网的端限容量矩阵。

证明：根据条件，矩阵 M 可以表示为

$$\begin{matrix}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & \cdots & n+1 \end{matrix} \\
 \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n+1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} d & & & M_1 \\ & d & & M_2 \\ M'_1 & & \ddots & \\ & M'_2 & & \\ & & & d & M_n \\ & & & M'_n & d \end{bmatrix}
 \end{matrix} \tag{13-2-6}$$

其中 $M_r = [m_{rv+1} m_{rv+2} \cdots m_{rn}]$ 是一个行矩阵， $r = 1, 2, \cdots, n$ ，且 $m_{1n} \leq m_{2n} \leq \cdots \leq m_{nn}$ 。注意 M_n 由一个元素 m_{nn} 组成。以 M 为端限容量矩阵的一个 VWC 网如图13-2-3所示。

(证毕)

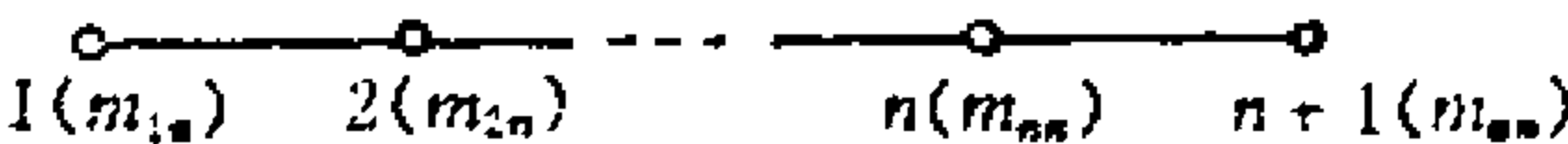


图13-2-3 一个VWC网

如果 VWC 网可以具有比已知矩阵的阶数更多的顶点，我们就可以很容易地设计一个网络。例如，矩阵

$$M = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & d & 2 & 1 & 1 \\ \hline b & 2 & d & 1 & 1 \\ \hline c & 1 & 1 & d & 3 \\ \hline d & 1 & 1 & 3 & d \end{array}$$

它不可能是一个有四个顶点的 VWC 网的端限容量矩阵，但可以是图13-2-4所示 VWC 网的端限容量矩阵的一部分。

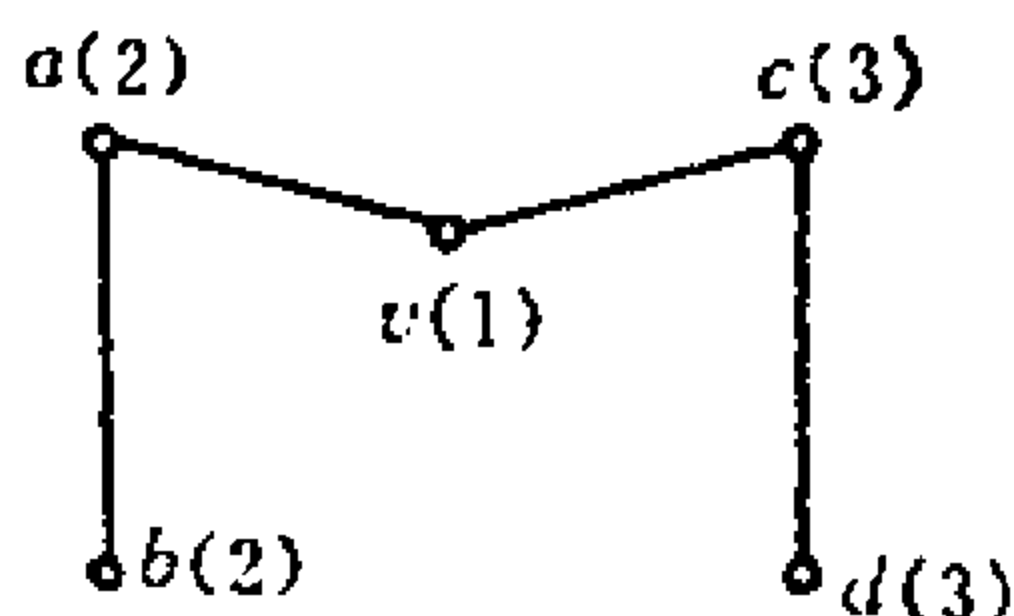


图13-2-4 一个VWC网

一个矩阵是端限容量矩阵的子矩阵的条件由定理13-2-5给出。

定理13-2-5 若能对一个矩阵 M 及所有阶数大于2的结果主子阵进行主分块划分，则 M 是一个VWC网的端限容量矩阵的子矩阵。

证明： 考虑一个EWC网，设其端限容量矩阵为 M 。注意这个定理的条件对于EWC网是充分的。我们将按以下步骤将这个EWC网变为一个VWC网，其端限容量矩阵以 M 为一个子矩阵。

步骤1 每一个顶点分配的点容量为 ∞ 。

步骤2 把每一条边 e 变成两条边 e' 和 e'' 的串联，如图13-2-5所示。这些边公共顶点 v_e 的点容量等于边 e 的边容量 c_e 。可以看出结果是VWC网，其端限容量矩阵以 M 为它的子矩阵。

(证毕)

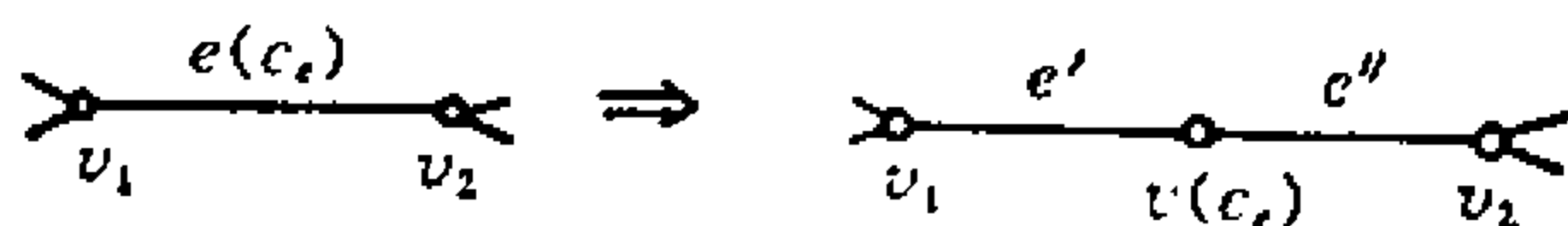


图13-2-5 将边 e 变为一些边的串联

作为一个例子，我们考虑上面所给矩阵 M 。以 M 为端限容量矩阵的 EWC 网，如图13-2-6所示。首先我们按步骤 1 对每一顶点赋以 ∞ ；再按步骤 2，将每一条边 e_i 用串联边 e'_i 和 e''_i 来代替， $i = 1, 2, 3$ ；然后对顶点 v_i 赋以 e_i 的边容量作为点容量， $i = 1, 2, 3$ 。从而得到图13-2-7的 VWC 网。

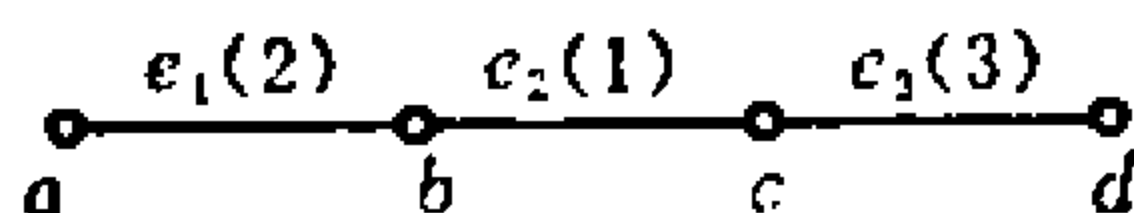


图13-2-6 EWC网

所得 VWC 网的端限容量矩阵是

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} d & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & d & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & d & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & d & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & d & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & d & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 1 & 1 & d \end{bmatrix} \end{matrix}$$

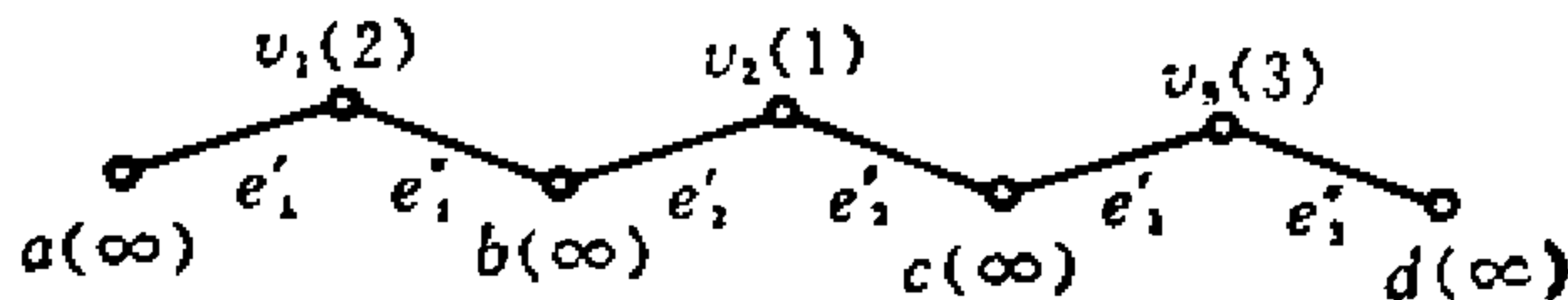


图13-2-7 VWC网

其中，所给矩阵 M 是一个子矩阵。

13-3 有向 VWC 网

若一个 VWC 网的每条边都定了向，这个网络就称为有向 VWC 网。例如，图13-3-1的网络就是有向 VWC 网。每条边的定向表示该条边所能传输的流的方向。因此，为了从顶点 i 到顶

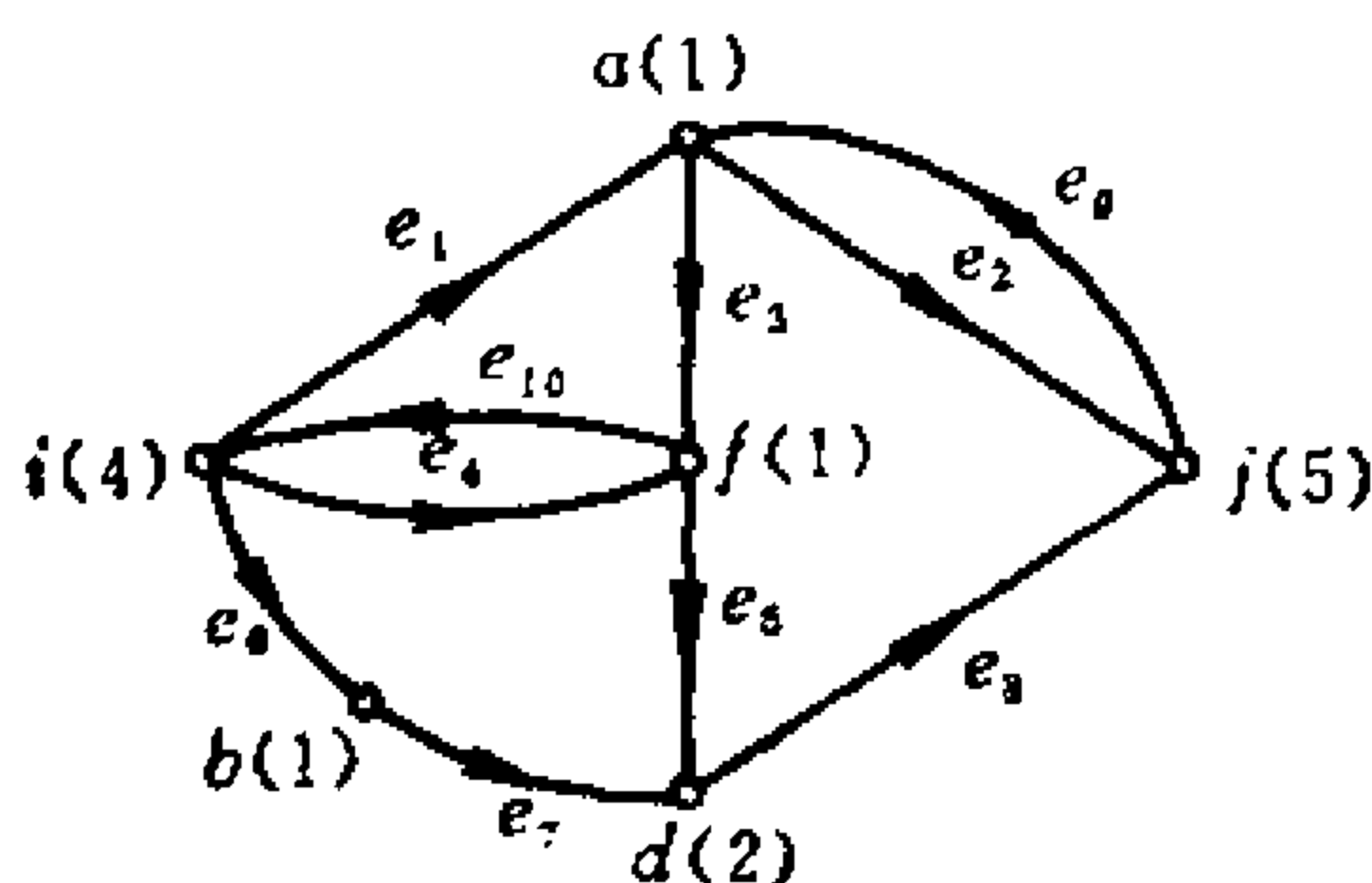


图13-3-1 有向VWC网

点 j 分配一个流，我们必须把流分配给从 i 到 j 的有向路径。例如，我们可以把流 $\psi_{i,j} = 3$ 按下面方式分配给图 13-3-1 的网络。我们将流 $\psi_{1,i} = 1$ 分配给有向路径 $P_1 = (e_1, e_2)$ ，因为

$$1 \leq \min \{c_i, c_a, c_j\}$$

所以这样做是允许的。其次，我们将流 $\psi_{2,i} = 1$ 分配给有向路径 $P_2 = (e_4, e_5, e_8)$ ，这也是可行的，因为

$$1 \leq \min \{c_i - \psi_0(i), c_f - \psi_0(f), c_d - \psi_0(d), c_j - \psi_0(j)\}$$

其中， $\psi_0(i) = 1$ ， $\psi_0(f) = 0$ ， $\psi_0(d) = 0$ ， $\psi_0(j) = 1$ ， $c_i = 4$ ， $c_f = 1$ ， $c_d = 2$ ， $c_j = 5$ 。最后我们将流 $\psi_{3,i} = 1$ 分配给有向路径 $P_3 = (e_6, e_7, e_8)$ ，如图13-3-2所示。

对于有向 VWC 网，为了用拓扑方法求最大流，我们采用下述点半割的概念而不用点割概念。

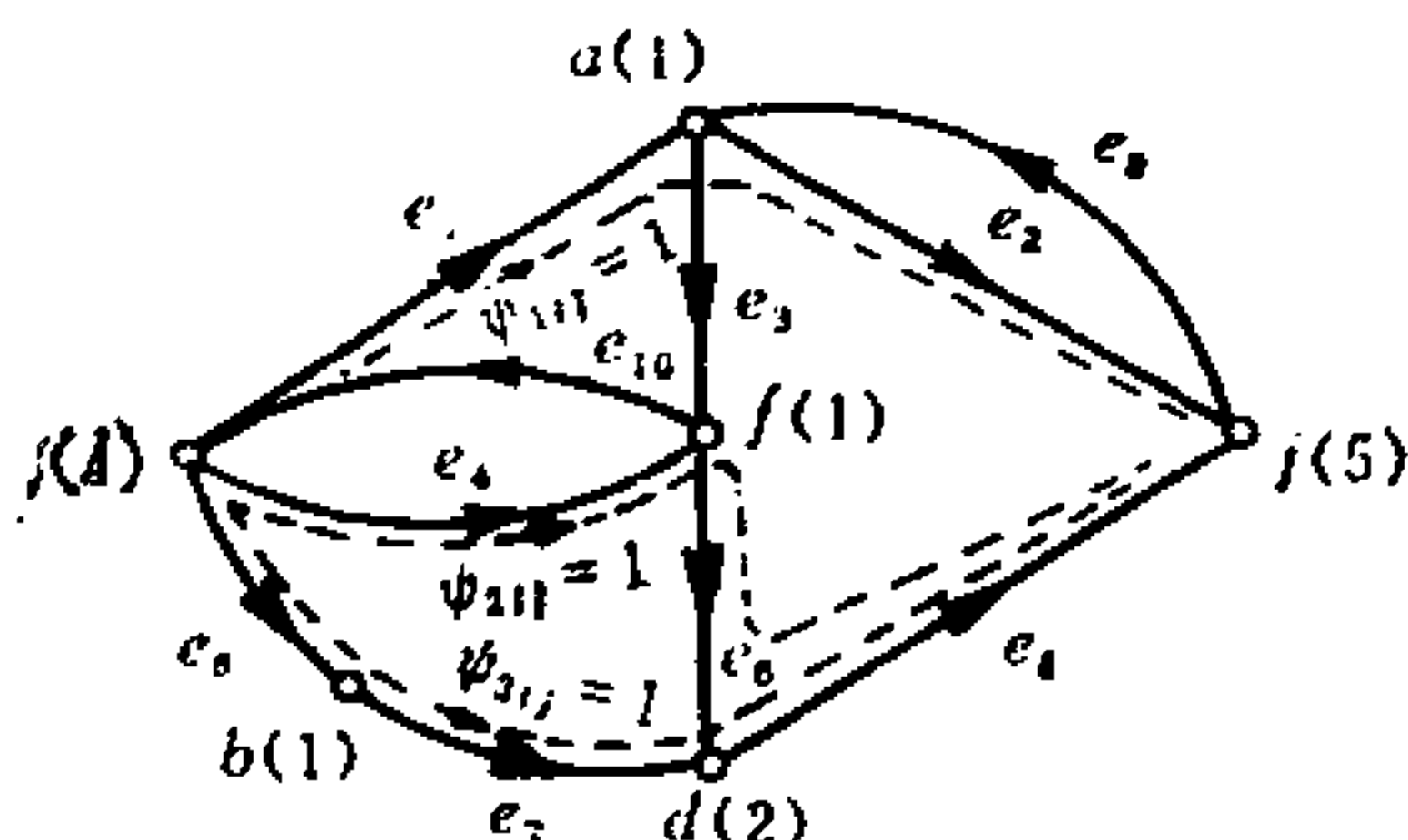


图13-3-2 流 $\psi_{ij} = 3$ 的分配

定义13-3-1 一个从 i 到 j 的点半割是这样一个最小顶点集合：删去该集合中所有的顶点，就会破坏从 i 到 j 的所有有向路径。根据定义，若删去顶点后所得的图不含 i 或 j ，也认为所有从 i 到 j 的有向路径都已破坏了。

例如，在图13-3-1的有向 VWC 网中，集合 (a, d) 不但是从 i 到 j 的点半割，而且是分离 i, j 的点割（回忆一下在12-5节中的半割）设 $S = \mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1) \cup \mathcal{E}(\bar{\Omega}_1 \times \Omega_1)$ 是一个分离 i 和 j 的割集，其中 $i \in \Omega_1$ ，则 S 可以分解为两个半割 s_{ij} 和 s_{ji} ：

$$s_{ij} = \mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1) \quad (13-3-1)$$

$$s_{ji} = \mathcal{E}(\bar{\Omega}_1 \times \Omega_1) \quad (13-3-2)$$

它们有个性质如下：

$$s_{ij} \cap s_{ji} = \phi \quad (13-3-3)$$

但是，点半割不一定有这样的性质。例如，在图 13-3-1 的有向 VWC 网中，集合 (a, d) 是一个分离 i 和 j 的点割。而子集 (a) 是从 j 到 i 的点半割。可是子集 (d) 却不是从 i 到 j 的点半割。从 i 到 j 的点半割[它是 (a, d) 的子集]就是 (a, d) 本身。因此这两个点半割有一个公共顶点。

利用点半割，我们得到一个与定理12-5-2类似的定理。

定理13-3-1 有向 VWC 网的从 i 到 j 的端限容量 t_{ij} 等于

$$t_{ij} = \min \{V(w_{ij})\} \quad (13-3-4)$$

其中 $\{V(w_{ij})\}$ 是所有从 i 到 j 的点半割值的集合。注意 t_{ij} 等于从 i 到 j 的最大流，而点半割的值是点半割的所有顶点容量之和。

除了用点半割代替点割外，这个定理的证明与定理13-1-3的证明是一样的。此外，对饱和点半割和基本饱和点半割下定义需要慎重一些。

例13-3-1 考虑图13-3-3的有向 VWC 网。为了求出从 i 到 j 的端限容量 t_{ij} ，首先我们找出从 i 到 j 的所有点半割： (i) ， (a, c) ， (b, c) ， (b, d) 和 (j) 。这些点半割的值为

$$\begin{aligned} V[(i)] &= 4, & V[(a, c)] &= 4, & V[(b, c)] &= 5, \\ V[(b, d)] &= 3, & V[(j)] &= 5 \end{aligned}$$

所以由定理13-3-1，端限容量 t_{ij} 是

$$t_{ij} = \min \{4, 4, 5, 3, 5\} = 3$$

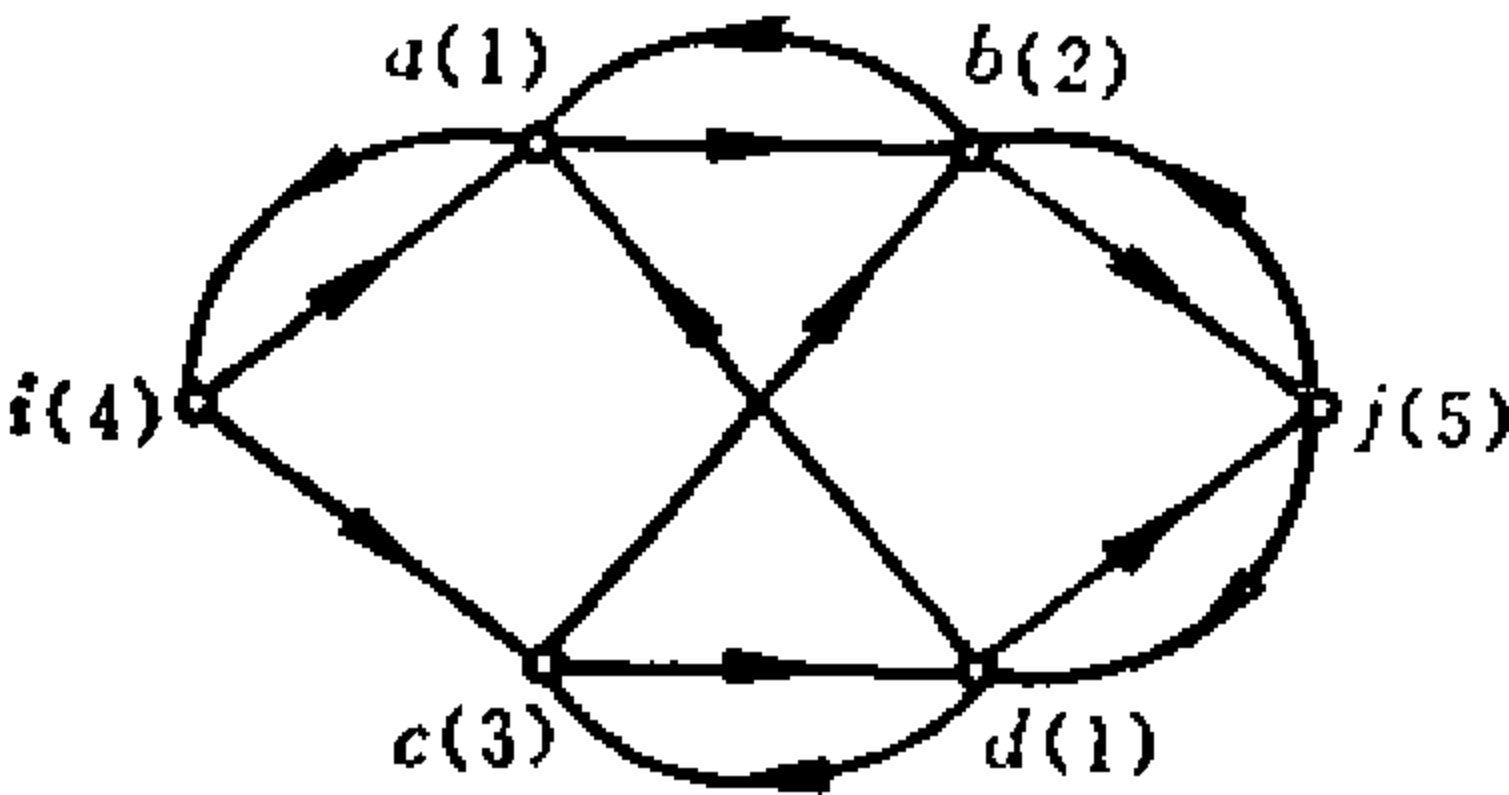


图13-3-3 有向 VWC 网

为了求出从 j 到 i 的端限容量 t_{ji} ，我们找出所有从 j 到 i 的点半割： $\{(j), (b, d), (a), (i)\}$ 。则 t_{ji} 为

$$t_{ji} = \min V[(j)], V[(b, d)], V[(a)], V[(i)] \\ = \min \{5, 3, 1, 4\} = 1$$

定理13-1-4对有向 VWC 网也是成立的。

定理13-3-2 对于有向 VWC 网的任意顶点 i, j 和 k , 有

$$t_{ij} \geq \min(t_{ik}, t_{kj}) \quad (13-3-5)$$

除了用点半割代替点割外, 这个定理的证明与定理13-1-4的证明相同。作为一个例子, 我们考虑图 13-3-3 中的有向 VWC 网。端限容量 t_{ib} 是

$$t_{ib} = \min \{V[(i)], V[(a, c)], V[(b)]\} \\ = \min \{4, 4, 2\} = 2$$

由于 $t_{ii} = 3$, 则有

$$t_{ij} \geq \min \{t_{ib}, t_{bi}\} = \min \{2, t_{bi}\}$$

有向 VWC 网的端限容量矩阵 T 与无向 VWC 网的端限容量矩阵定义相同, 定理13-2-1给出的端限容量矩阵的性质对于有向 VWC 网也是正确的。例如, 图13-3-1所示的有向 VWC 网的端限容量矩阵是

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{c} a \\ f \\ b \\ j \\ d \\ i \end{array} \begin{bmatrix} a & f & b & j & d & i \\ \hline d & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & d & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & d & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & d & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 & d & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & d \end{bmatrix} \end{array}$$

该式说明了应用主分块划分的一种方式。注意有向 VWC 网的端限容量矩阵一般是不对称的。

13-4 点割和点半割的生成

正如我们在前几节已看到的，分离 i 和 j 的点割和从 i 到 j 的点半割是 VWC 网中的重要点集。特别是当我们要求出从 i 到 j 的端限容量时。在无向的情况下，若知道所有分离 i 和 j 的点割，在有向的情况下，若知道从 i 到 j 的点半割，那就很方便了。因此，如果我们能象 5-1 节中生成分离 i 和 j 的割集那样生成点割、点半割，那么求 VWC 网的端限容量就是比较容易的工作了。首先让我们来复习一下，所有分离 i 和 j 的割集是怎样生成的。

在 2-3 节中我们曾经论证过所有的割集，割集的无重边并及空集在环和运算下构成群，因此，我们可以用已知的生成元生成所有的割集。如果我们把割集和割集的无重边并分成两群 $\{S(i, j)\}$ 和 $\{S(ij, .)\}$ ，其中 $\{S(i, j)\}$ 由所有分离 i 和 j 的割集及分离 i 和 j 的奇数个割集的无重边并组成， $\{S(ij, .)\}$ 由所有不属于 $\{S(i, j)\}$ 的割集和割集的无重边并组成，那么就有

1. 若 S_1 和 S_2 在 $\{S(i, j)\}$ 中，则

$S_1 \oplus S_2$ 也在 $\{S(ij, .)\}$ 中。

2. 若 S_1' 和 S_2' 都在 $\{S(ij, .)\}$ 中，则

$S_1' \oplus S_2'$ 也在 $\{S(ij, .)\}$ 中。

3. 若 S_1 在 $\{S(i, j)\}$ 中， S_2' 在 $\{S(ij, .)\}$ 中，则

$S_1 \oplus S_2'$ 也在 $\{S(i, j)\}$ 中。

只要我们知道生成元中哪些是分离 i 和 j 的，那么根据上述性质就可以从生成元集合生成分离 i 和 j 的所有割集。特别地，如选取生成元集合为 $S_0, S_1, \dots, S_m (m = n_c - n_v + \rho)$ ，其中只有 S_0 分离 i 和 j ，那么我们知道，所有分离 i 和 j 的割集都在下面的集体中：

$$\{S(i, j)\} = \{S_0 \oplus S_k; S_k \in \{S'\}\} \quad (13-4-1)$$

其中 $\{S'\}$ 由空集、割集 S_1, S_2, \dots, S_m 以及 S_1, S_2, \dots, S_m 的所有可能组合作环和运算而得到的集合组成。如果集体 $\{S_0 \oplus S_k; S_k \in \{S'\}\}$ 中的 S_k 不是一个割集，则在同一集体中存在另一个集合 S_b ，使得 $S_k \supset S_b$ 。因此在EWC网中，端限容量

$$t_{ij} = \min \{V[S_0 \oplus S_k]; S_k \in \{S'\}\} \quad (13-4-2)$$

遗憾的是，分离 i 和 j 的点割集体没有这么好的性质。因此，生成所有分离 i 和 j 的点割就不象生成所有分离 i 和 j 的割集那么简单。不过，有下面几个定理给出的性质，我们就可以用生成分离 i 和 j 的割集的方式来求出所有分离 i 和 j 的点割。

定理13-4-1 对于VWC网 G ，设 W 是分离 i 和 j 的点割。设 G_1 和 G_2 都是从 G 中删去 W 的所有顶点得到的最大连通子图，设顶点 j 在 G_2 中，除非 $W = (j)$ ，这时 G_2 是一个零图（即其中不含顶点）。那么，如果 $\Omega(G_2) \neq \emptyset$ ，则 $\mathcal{S}(W \times \Omega(G_2))$ 是一个分离 i 和 j 的割集，其中 $\Omega(G_2)$ 是 G_2 中所有顶点的集合。

作为一个例子，考虑图13-4-1(a)中的VWC网。对于分离 i 和 j 的点割 (a, b) ，最大连通子图 G_1 和 G_2 如图13-4-1(b)所示。因此 $\Omega(G_2) = (c, d, j)$ ，而 $\mathcal{S}(W \times \Omega(G_2)) = (e_4, e_5, e_8)$ 是一个分

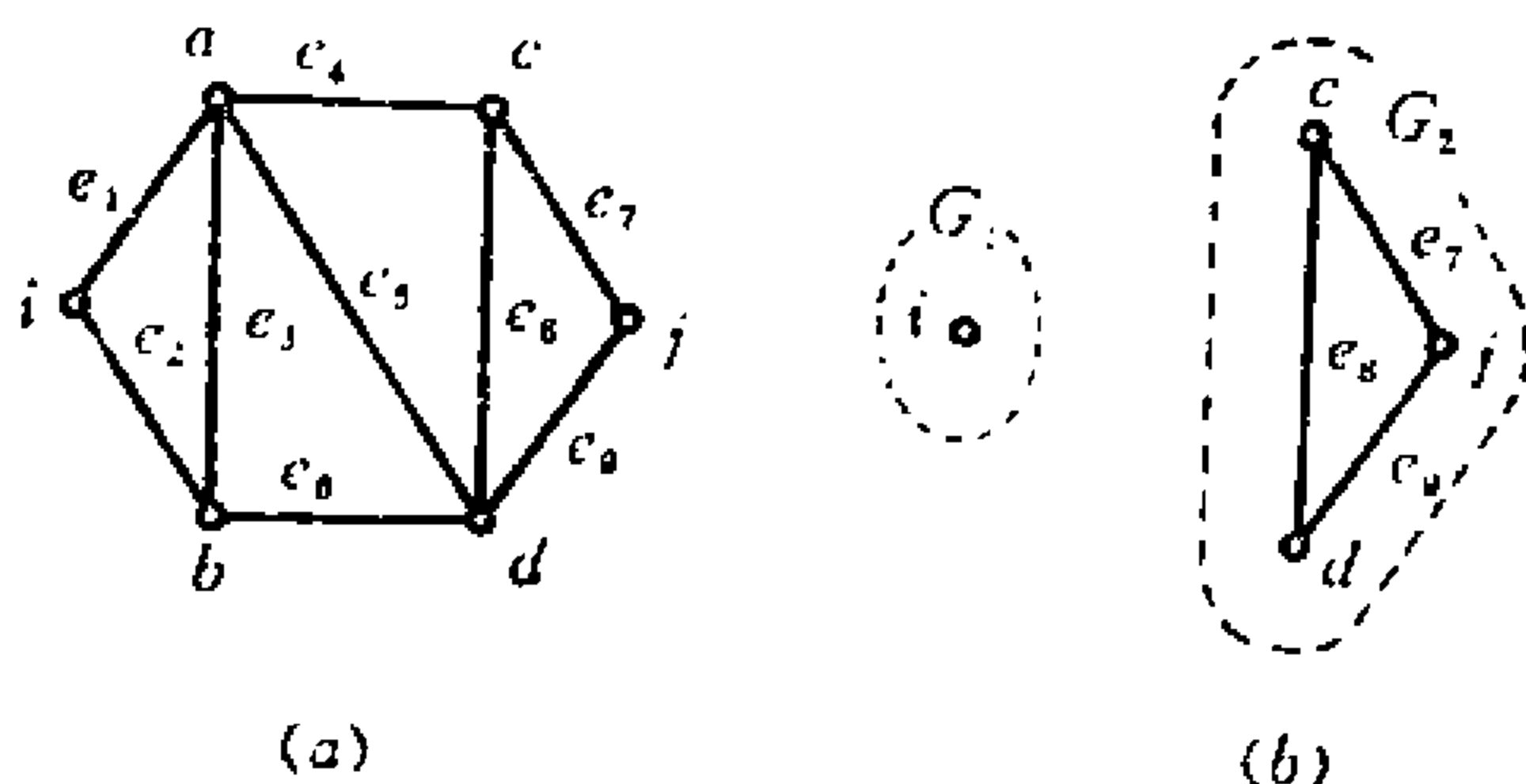


图13-4-1 VWC网及最大连通子图 G_1 和 G_2

离 i 和 j 的割集。对于点割 (a, d) , $\Omega(G_2) = (c, j)$, 而 $\mathcal{E}(W \times \Omega(G_2)) = (e_4, e_6, e_8)$, 它是分离 i 和 j 的割集。对于点割 (i) , $\Omega(G_2) = (a, b, c, d, j)$, 而 $\mathcal{E}(W \times \Omega(G_2)) = (e_1, e_2)$, 它也是分离 i 和 j 的割集。

定理13-4-1的证明: 由点割的定义可知, 每条从 i 到 j 的路径必定至少经过点割 W 的一个顶点。由于 $\mathcal{E}(W \times \Omega(G_2))$ 中的每条边与 W 中的顶点关联, 故每条从 i 到 j 的路径必定至少包含 $\mathcal{E}(W \times \Omega(G_2))$ 中的一条边。因此从所给网络中删除 $\mathcal{E}(W \times \Omega(G_2))$ 的所有边将破坏所有从 i 到 j 的路径。从而 $\mathcal{E}(W \times \Omega(G_2))$ 包含一个分离 i 和 j 的割集。设 G'_1 和 G'_2 都是删去 $\mathcal{E}(W \times \Omega(G_2))$ 中的所有边得到的图的子图, 其中 G'_2 是一个包含顶点 j 的最大连通子图。容易看出, G'_1 和 G'_2 是相同的。此外, $\Omega(G'_1) = \Omega(G_1) \cup W$ 。因此 G'_1 由连接在 $\Omega(G_1) \cup W$ 中两点间的边组成。现在 G'_1 必定是连通的, 因为若它不连通, 则 W 中至少存在一个顶点, 使得从 i 到 j 的所有路径都不经过这个顶点, 这与假设 W 是分离 i 和 j 的点割矛盾。因为 $\mathcal{E}(W \times \Omega(G_2))$ 是连接 G'_1 和 G'_2 的边集, 故 $\mathcal{E}(W \times \Omega(G_2))$ 是一个这样的最小边集, 使一个连通图在删除了这个集合的所有边后变成分离的。因此 $\mathcal{E}(W \times \Omega(G_2))$ 是一个分离 i 和 j 的割集。 (证毕)

根据定理13-4-1, 我们可以从每个点割 W ($W \neq (j)$ 除外) 求得割集 $\mathcal{E}(W \times \Omega(G_2))$ 。为了简便, 我们称割集 $\mathcal{E}(W \times \Omega(G_2))$ 为点割 W 的对应割集。

定义13-4-1 集合 $\mathcal{E}(W \times \Omega(G_2))$ 称为点割 W 的对应割集, 其中 G_2 是包含有顶点 j 且删去 W 全部顶点所得的最大连通子图。

我们希望知道, 对于任意分离 i 和 j 的割集 S , 是否都存在一个分离 i 和 j 的点割, 使 S 成为这个点割的对应割集。答案是否定的。例如, 图13-4-1(a)中, 集合 $S = (e_2, e_3, e_4, e_6)$ 是一个分离 i 和 j 的割集, 但是不存在分离 i 和 j 的点割, 其对应割集为

S 。另一方面，我们有定理13-4-2。

定理13-4-2 设 S 是在连通线图 G 中分离 i 和 j 的割集。设 G_1 和 G_2 是 S 的对应子图（即 G_1 和 G_2 都是从 G 中删去 S 的所有边而得到的最大连通子图）。假定 $i \in G_1$ ，则顶点集合

$$W = \Omega(S) \cap \Omega(G_1) \quad (13-4-3)$$

包含一个分离 i 和 j 的点割，其中 $\Omega(S)$ 是 S 中所有边的端点集合。

例如，图13-4-1(a)中的 $S = (e_3, e_6, e_7, e_8)$ 是一个分离 i 和 j 的割集。现在 $\Omega(S)$ 是 (a, b, c, d, j) ， $\Omega(G_1)$ 是 (i, a, b, c) 。因此，由式(13-4-3)给出的集合 W 是 (a, b, c) 。显然，这个集合包含一个分离 i 和 j 的点割 (a, b) 。

定理13-4-2的证明： 我们只须证明删去 W 中的所有顶点就会破坏所有从 i 到 j 的路径即可。因为 S 中每条边是连接在 G_1 的一个顶点和 G_2 的一个顶点之间的，所以，由式(13-4-3)给出的集合 W 含有 S 中每条边的两个端点之一，于是删去 W 中所有的顶点也就删去了 S 中所有边。我们知道，删去 S 的所有边则破坏所有从 i 到 j 的路径。因此删去 W 中所有顶点也会破坏所有从 i 到 j 的路径。 (证毕)

为了简便，我们把定理13-4-2中的集合 W 叫做割集 S 的对应点集。例如，考虑图13-4-1(a)所示的 VWC 网中的割集 S_1, S_2, S_3, S_4 ，其中 $S_1 = (e_1, e_2)$ ， $S_2 = (e_1, e_3, e_6)$ ， $S_3 = (e_2, e_3, e_4, e_5)$ ， $S_4 = (e_4, e_6, e_8)$ ，对应点集为

$$W(S_1) = (i)$$

$$W(S_2) = (i, b)$$

$$W(S_3) = (i, a)$$

$$W(S_4) = (a, b)$$

假定 S 不是一个割集，而是式(13-4-1)给出的 $\{S(i; j)\}$ 中割集的无重边并，那么，我们可以组成与 S 对应的点集 W 如下。设

G_1 和 G_2 都是删去 S 中所有边而得到的不相交子图，而且 G_1 是一个包含 i 的最大连通子图。那么，集合 W 是这样的集体，它是由 S 的所有边的端点中属于 G_1 的那些端点所构成的。

注意，删去 S 中的所有边会产生 $\rho(>2)$ 个最大连通子图，而这些最大连通子图中包含顶点 i 的一个子图必须选作 G_1 。例如，图13-4-1(a)中 $\{S(i,j)\}$ 里一个割集的重边并 $S=(e_1, e_3, e_4, e_6, e_7, e_9)$ 。则子图 G_1 如图13-4-2所示。于是，点集 W 应为 (i, b, c, d) 。

对于 $\{S(i,j)\}$ 中任一集合 S ，点集 $W(S)$ 可定义如下。

定义13-4-2 设 S 是 $\{S(i,j)\}$ 中的一个集合。设 G_1 是一个在删去 S 所有的边后，包含顶点 i 的最大连通子图。则集合 S 的对应点集（记为 $W(S)$ ）由下式给出

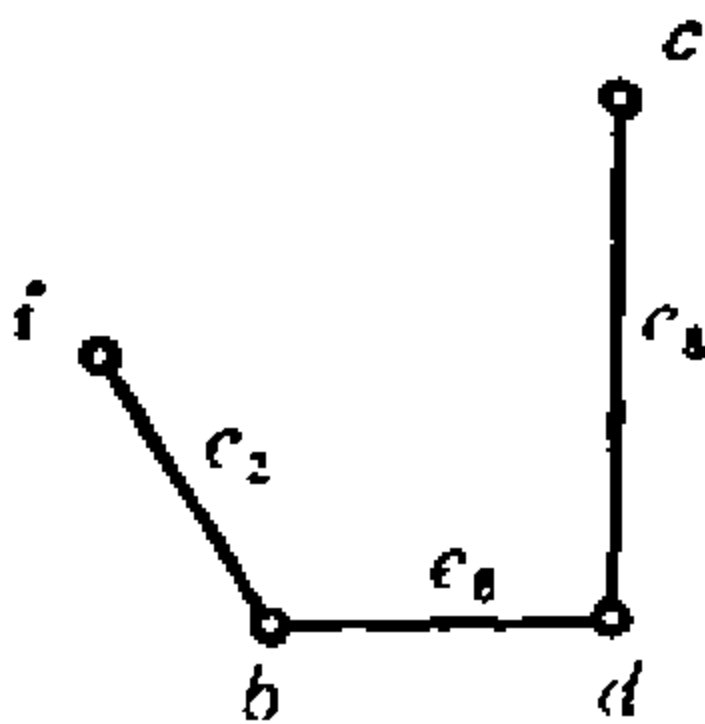


图13-4-2 子图 G_1

$$W(S) = \Omega(S) \cap \Omega(G_1) \tag{13-4-4}$$

其中 $\Omega(S)$ 是 S 中所有边的端点集体， $\Omega(G_1)$ 是 G_1 中所有顶点的集体。

用这个定义，我们可以推广定理13-4-2。

定理13-4-3 设 S 是 $\{S(i,j)\}$ 中的一个集合，则集合 S 的对应点集 $W(S)$ 包含了分离 i 和 j 的点割。

这个定理的证明留给读者。

由于 $\{S(i,j)\}$ 是很容易生成的，如果我们能把 $\{S(i,j)\}$ 和VWC网的端限容量 t_{ij} 联系起来，那么求 t_{ij} 就不费事了。下一个定理给出了这种关系。

定理13-4-4 VWC网的端限容量 t_{ij} 等于

$$t_{ij} = \min \{V(j), V[W(S)], S \in \{S(i,j)\}\} \tag{13-4-5}$$

其中 $V[W(S)]$ 是集合 $W(S)$ 中所有顶点的点容量之和。

证明： 根据定理 13-4-1 除 $W = (i)$ 外，对于任一分离 i 和 j 的点割 W ，在 $\{S(i,j)\}$ 中存在一个作为对应割集的 S ，从定义 13-4-2可以看出，式(13-4-4)给出的点割 $W(S)$ 就是点割 W （其对应割集为 S ）。因此集体 $\{V(j), V[W(S)]; S \in \{S(i,j)\}\}$ 包含了集体 $\{V(W), \text{所有分离 } i \text{ 和 } j \text{ 的点割 } W\}$ 。并且根据定理 13-4-3, 对于 $\{S(i,j)\}$ 中任一集合 S' ，集合 $W(S')$ 包含一个点割，比如说 W 。因此

$$\begin{aligned} & \min \{V(j), V[W(S)]; S \in \{S(i,j)\}\} \\ &= \min \{V(W); \text{所有分离 } i \text{ 和 } j \text{ 的点割 } W\} \end{aligned} \quad (13-4-6)$$

又因为据定理13-1-3，式(13-4-6)的右端等于从 i 到 j 的端限容量 t_{ij} ，所以这个定理是对的。 (证毕)

根据这个定理，我们可以用生成集体 $\{S(i,j)\}$ 的办法来求出VWC网的端限容量，见下面的例子。

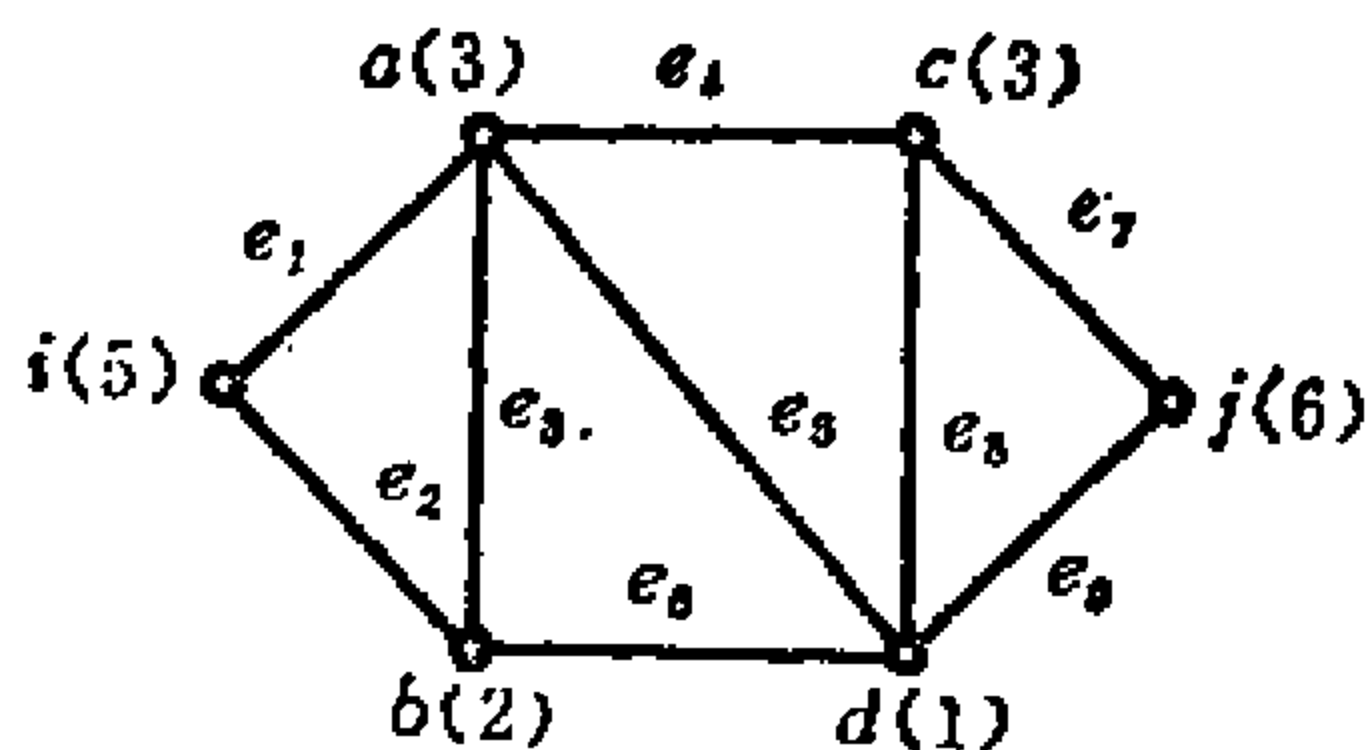


图13-4-3 VWC网

例13-4-1 在图13-4-3的VWC网中，所有的关联集（除与顶点 j 对应的以外）为

$$\begin{aligned} S(i) &= (e_1, e_2), \\ S(a) &= (e_1, e_3, e_4, e_5), \\ S(b) &= (e_2, e_3, e_6), \\ S(c) &= (e_4, e_7, e_8), \\ S(d) &= (e_5, e_6, e_8, e_9) \end{aligned}$$

因为只有 $S(i)$ 是分离 i 和 j 的割集，故集体 $\{S(i,j)\}$ 可以由式(13-4-1)表示。 $\{S(i,j)\}$ ， $W(S)$ 和 $V[W(S)]$ 中所有的集合见表13-4-1。

表13-4-1 $\{S(i, j)\}$, $W(S)$ 和 $V[W(S)]$

$\{S(i, j)\}$	$W(S)$	$V(j)$ 与 $V[W(S)]$
	(j)	6
$S(i) = (e_1, e_2)$	(i)	5
$S(i) \oplus S(a) = (e_2, e_3, e_4, e_5)$	(i, a)	8
$S(i) \oplus S(b) = (e_1, e_3, e_6)$	(i, b)	7
$S(i) \oplus S(c) = (e_1, e_2, e_4, e_7, e_8)$	(i)	5
$S(i) \oplus S(d) = (e_1, e_2, e_3, e_6, e_8, e_9)$	(i)	5
$S(i) \oplus S(a) \oplus S(b) = (e_4, e_5, e_6)$	(a, b)	5
$S(i) \oplus S(a) \oplus S(c) = (e_2, e_3, e_5, e_7, e_8)$	(i, a, c)	11
$S(i) \oplus S(a) \oplus S(d) = (e_2, e_3, e_4, e_6, e_8, e_9)$	(i, a, d)	9
$S(i) \oplus S(b) \oplus S(c) = (e_1, e_3, e_4, e_6, e_7, e_8)$	(i, b)	7
$S(i) \oplus S(b) \oplus S(d) = (e_1, e_3, e_5, e_6, e_9)$	(i, b, d)	8
$S(i) \oplus S(c) \oplus S(d) = (e_1, e_2, e_4, e_6, e_8, e_9)$	(i)	5
$S(i) \oplus S(a) \oplus S(b) \oplus S(c) = (e_5, e_6, e_7, e_8)$	(a, b, c)	8
$S(i) \oplus S(a) \oplus S(b) \oplus S(d) = (e_4, e_5, e_9)$	(a, d)	4
$S(i) \oplus S(a) \oplus S(c) \oplus S(d) = (e_2, e_3, e_6, e_7, e_9)$	(i, a, c, d)	12
$S(i) \oplus S(b) \oplus S(c) \oplus S(d) =$ $(e_1, e_3, e_4, e_6, e_7, e_9)$	(i, b, c, d)	11
$S(i) \oplus S(a) \oplus S(b) \oplus S(c) \oplus S(d) = (e_7, e_9)$	(c, d)	4

$$t_{ij} = \min \{V(j), V[W(S)]; S \in \{S(i, j)\}\} = 4$$

若 VWC 网是有向的, 我们应该如上一节那样用点半割来讨论。为了求得点半割, 我们定义对应点半割如下:

定义13-4-3 设 g 是一个线图, $\Omega(g)$ 是 g 中所有顶点的集合。则 $\Omega^+(g)$ 是 $\Omega(g)$ 的一个子集, g 中每一条边都是从 $\Omega^+(g)$ 中的顶点出发的。换句话说, $\Omega^+(g)$ 是 g 中出度 $d^+(v)$ 非零的全部顶点的集合。

利用这个定义, 就可以定义 $\{S(i, j)\}$ 中集合 S 的对应点半割。

定义13-4-4 设 S 是有向 VWC 网 G 中 $\{S(i, j)\}$ 的一个集合。设 G_1 是在 G 中删去 S 的全部边所得的线图中, 包含顶点 i 的一个最大连通子图。那么, 集合 S 的对应点半割(记为 $w(S)$),

定义为

$$w(S) = \Omega^+(S) \cap \Omega(G_1) \quad (13-4-7)$$

下面我们要证明，对于任一个从 i 到 j 的点半割，存在一个分离 i 和 j 的割集 S ，使得 $w(S)$ 就是这个从 i 到 j 的点半割。

定理13-4-5 在有向 VWC 网中，对于除 $w = (j)$ 外的任何一个从 i 到 j 的点半割 w ，存在一个分离 i 和 j 的割集 S ，使 w 为式(13-4-7)所给出的点半割。

证明： 我们取所有满足以下两个条件的边来组成一个边集 s_{ij} ：

1. 每条边都是从 w 的顶点连出来的（即它的定向是从 w 的顶点出发的）

2. 每条边至少在一条从 i 到 j 的有向路径中，该条路径恰好通过 w 的一个顶点。

显然 s_{ij} 是从 i 到 j 的半割。我们知道，存在另一个从 j 到 i 的半割 s_{ji} ，使 $s_{ij} \cap s_{ji} = \phi$ ，且 $s_{ij} \cup s_{ji} = S$ ， S 是分离 i 和 j 的割集。利用这个割集 S ，我们可以得到一个包含顶点 i 的最大连通子图 G_1 。根据定理13-4-2，点集 $\Omega(S) \cap \Omega(G_1)$ 包含分离 i 和 j 的点割。因此删去 $\Omega(S) \cap \Omega(G_1)$ 中的所有顶点，就破坏了从 i 到 j 全部有向路径和从 j 到 i 的所有有向路径。为了破坏所有从 i 到 j 的有向路径，而不必破坏从 j 到 i 的有向路径，我们只要用 $\Omega^+(S)$ 来代替 $\Omega(S)$ 即可。换句话说，删去 $\Omega^+(S) \cap \Omega(G_1)$ 中的所有顶点将破坏所有从 i 到 j 的有向路径。因为 $S = s_{ij} \cup s_{ji}$ ，

$$\Omega^+(S) \cap \Omega(G_1) = \Omega^+(s_{ij}) \cap \Omega(G_1) \quad (13-4-8)$$

并且，我们知道

$$\Omega^+(s_{ij}) \cap \Omega(G_1) = w \quad (13-4-9)$$

因此定理是对的。 (证毕)

作为一个例子，我们来看看图13-4-4中的有向 VWC 网。考虑点半割 (a, b) 。半割 s_{ij} 是 (e_4, e_6, e_8) ，半割 s_{ji} 是 (e'_5, e'_{10}, e'_{11}) ，于

是 $S = (e_4, e_5, e_8, e'_5, e'_{10}, e'_{11})$ 。子图 G_1 由顶点 i, a, b 和边 $e_1, e'_1, e_2, e'_2, e_3$ 组成。点集 $\Omega(S) = (a, b, c, d, i, j)$ ，而

$$\Omega(S) \cap \Omega(G_1) = (i, a, b)$$

集合 $\Omega^+(S) = (a, b, d, j)$ 。因此

$$\Omega^+(S) \cap \Omega(G_1) = (a, b)$$

这就是所给的点半割。注意它也等于 $\Omega^+(s_{ij}) \cap \Omega(G_1)$ 。

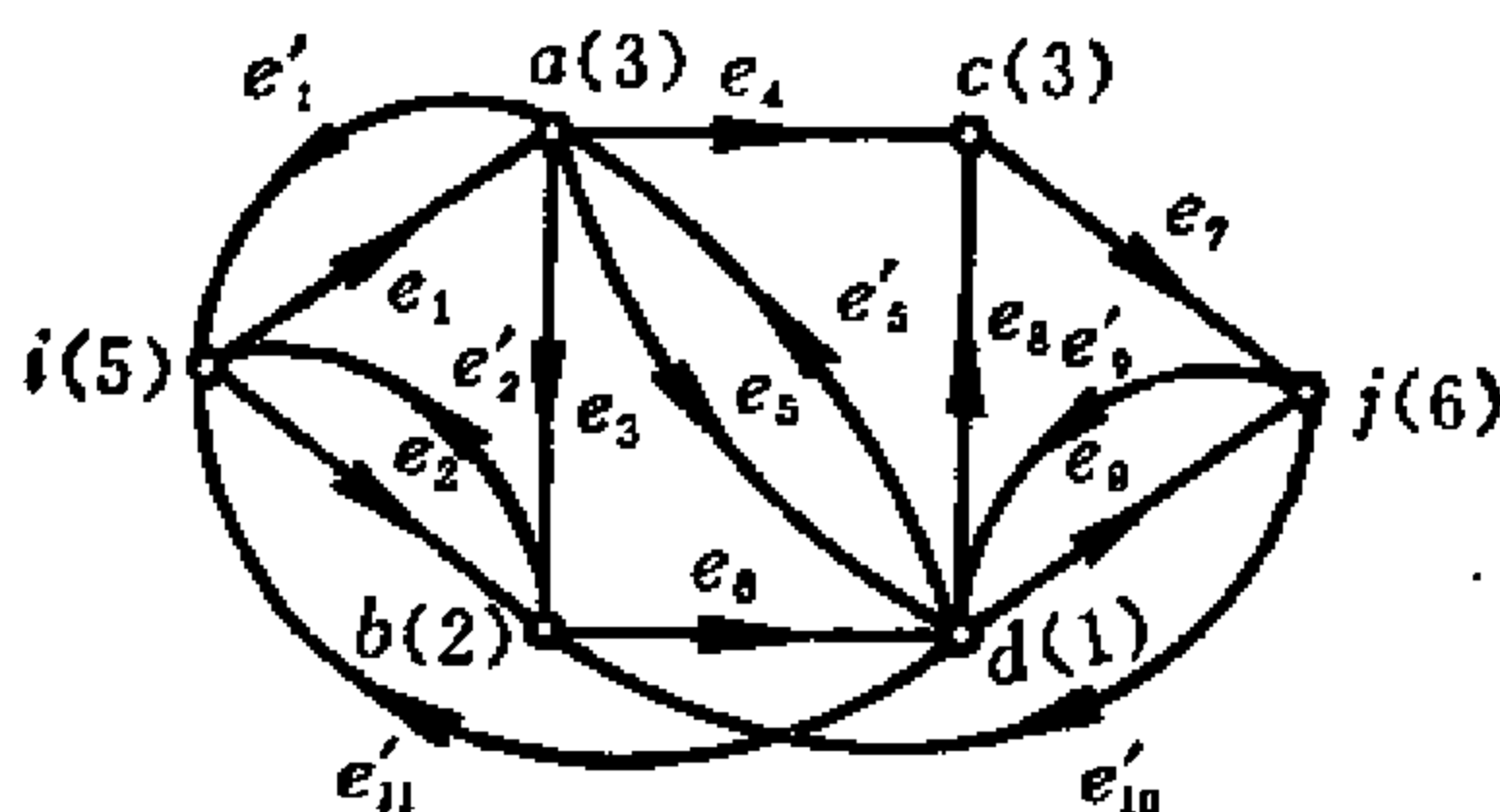


图13-4-4 有向VWC网

与定理13-4-2类似，有定理13-4-6。

定理13-4-6 设 S 是有向 VWC 网的 $\{S(i, j)\}$ 中的集合。设 G_1 是删去 S 中全部边所得的线图中包含顶点 i 的最大连通子图，那么， $\Omega^+(S) \cap \Omega(G_1)$ 包含一个从 i 到 j 的点半割。

这个定理的证明留给读者。

由定理13-4-5和定理13-4-6，我们可以得到另一个重要定理。

定理13-4-7 有向 VWC 网的从 i 到 j 的端限容量 t_{ij} 等于

$$t_{ij} = \min \{V(j), V[w(S)]; S \in \{S(i, j)\}\} \quad (13-4-10)$$

其中 $w(s)$ 由式(13-4-7)给出。

这个定理的证明与定理13-4-4的证明几乎完全相同。根据这个定理，我们可以通过求出 $\{S(i, j)\}$ 来求有向 VWC 网的端限容量，如下例所示。

例13-4-2 考虑图13-4-4中的有向 VWC 网，所有的关联集

除对应于顶点 j 的关联集元外，是

$$\begin{aligned} S(i) &= (e_1, e'_1, e_2, e'_2, e'_{11}) \\ S(a) &= (e_1, e'_1, e_3, e_4, e_5, e'_4) \\ S(b) &= (e_2, e'_2, e_6, e_8, e'_{10}) \\ S(c) &= (e_4, e_7, e_8) \\ S(d) &= (e_6, e'_5, e_8, e_8, e_9, e'_9, e'_{11}) \end{aligned}$$

因为只有 $S(i)$ 分离 i 和 j ，所以集体 $\{S(i; j)\}$ 可由式 (13-4-1) 表出。于是 $\{S(i; j)\}$ ， $w(S)$ 和 $V[w(S)]$ 中的所有集合如表 13-4-2 所示。由这个表可看出 $t_{ij} = 4$ 。

表13-4-2 $\{S(i; j)\}$ ， $w(S)$ ， $V(j)$ 和 $V[w(S)]$

$\{S(i; j)\}$	$w(S)$	$V(j)$ 与 $V[w(S)]$
	(j)	6
$S(i)$	(i)	5
$S(i) \oplus S(a) = (e_2, e'_2, e_3, e_4, e_5, e'_5, e'_{11})$	(i, a)	8
$S(i) \oplus S(b) = (e_1, e'_1, e_3, e_8, e'_{10}, e'_{11})$	(i, b)	7
$S(i) \oplus S(c) = (e_1, e'_1, e_2, e'_2, e_4, e_7, e_8, e'_{11})$	(i)	5
$S(i) \oplus S(d) = (e_1, e'_1, e_2, e'_2, e_5, e'_5, e_8, e_8, e_9, e'_9)$	(i, d)	6
$S(i) \oplus S(a) \oplus S(b) = (e_4, e_5, e'_5, e_8, e'_{10}, e'_{11})$	(a, b)	5
$S(i) \oplus S(a) \oplus S(c) = (e_2, e'_2, e_3, e_5, e'_5, e_7, e_8, e'_{11})$	(i, a, c)	11
$S(i) \oplus S(a) \oplus S(d) = (e_2, e'_2, e_3, e_4, e_8, e_8, e_9, e'_9)$	(i, a, d)	9
$S(i) \oplus S(b) \oplus S(c) = (e_1, e'_1, e_2, e_4, e_8, e_7, e_8, e'_{10}, e'_{11})$	(i, b)	7
$S(i) \oplus S(b) \oplus S(d) = (e_1, e'_1, e_3, e_6, e'_5, e_8, e_8, e'_9, e'_{10})$	(i, d)	6
$S(i) \oplus S(c) \oplus S(d) = (e_1, e'_1, e_2, e'_2, e_4, e_5, e'_5, e_8, e_7, e_8, e'_9)$	(i, c, d)	9
$S(i) \oplus S(a) \oplus S(b) \oplus S(c) = (e_5, e'_5, e_8, e_7, e_8, e'_{10}, e'_{11})$	(a, bc)	8
$S(i) \oplus S(a) \oplus S(b) \oplus S(d) = (e_4, e_8, e_9, e'_9, e'_{10})$	(a, d)	4
$S(i) \oplus S(a) \oplus S(c) \oplus S(d) = (e_2, e'_2, e_3, e_8, e_7, e_8, e'_9)$	(i, a, c, d)	12
$S(i) \oplus S(b) \oplus S(c) \oplus S(d) = (e_1, e'_1, e_3, e_4, e_5, e'_5, e_7, e_9, e'_9, e'_{10})$	(i, c, d)	9
$S(i) \oplus S(a) \oplus S(b) \oplus S(c) \oplus S(d) = (e_7, e_9, e'_9, e'_{10})$	(c, d)	4

习 题

1. 证明定理13-1-2条件的充分性。
2. 求出图P-13-2中VWC网的端限容量矩阵。

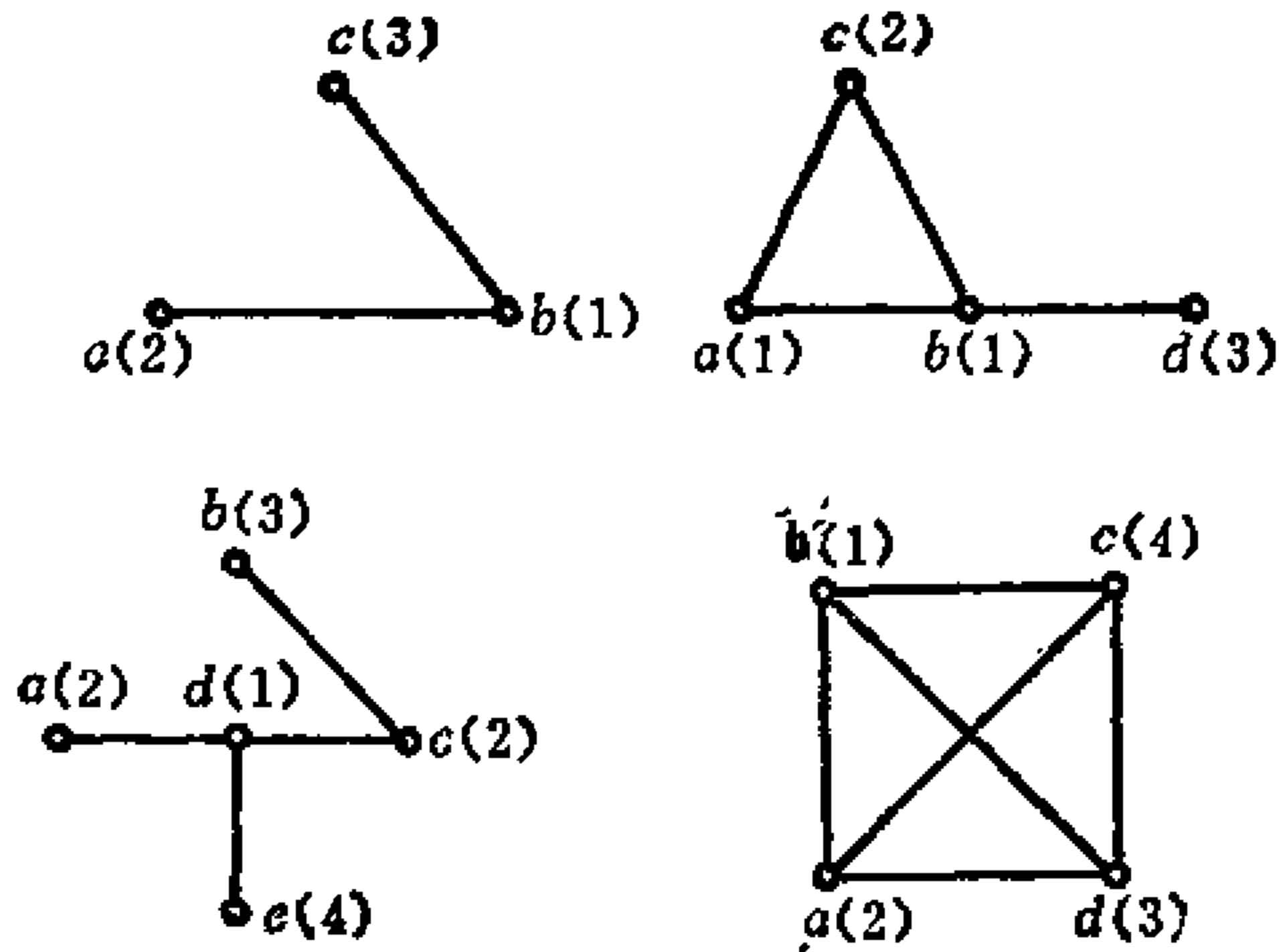


图 P-13-2

3. 综合有四个顶点的 VWC 网，其端限容量矩阵如下：

$$(a) \quad \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & d & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & d & 2 & 2 \\ c & 1 & 2 & d & 3 \\ d & 1 & 2 & 3 & d \end{array}$$

$$(b) \quad \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & d & 3 & 1 & 2 \\ b & 3 & d & 1 & 2 \\ c & 1 & 1 & d & 1 \\ d & 2 & 2 & 1 & d \end{array}$$

$$(c) \quad \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & d & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & d & 3 & 2 \\ c & 1 & 3 & d & 2 \\ d & 1 & 2 & 2 & d \end{array}$$

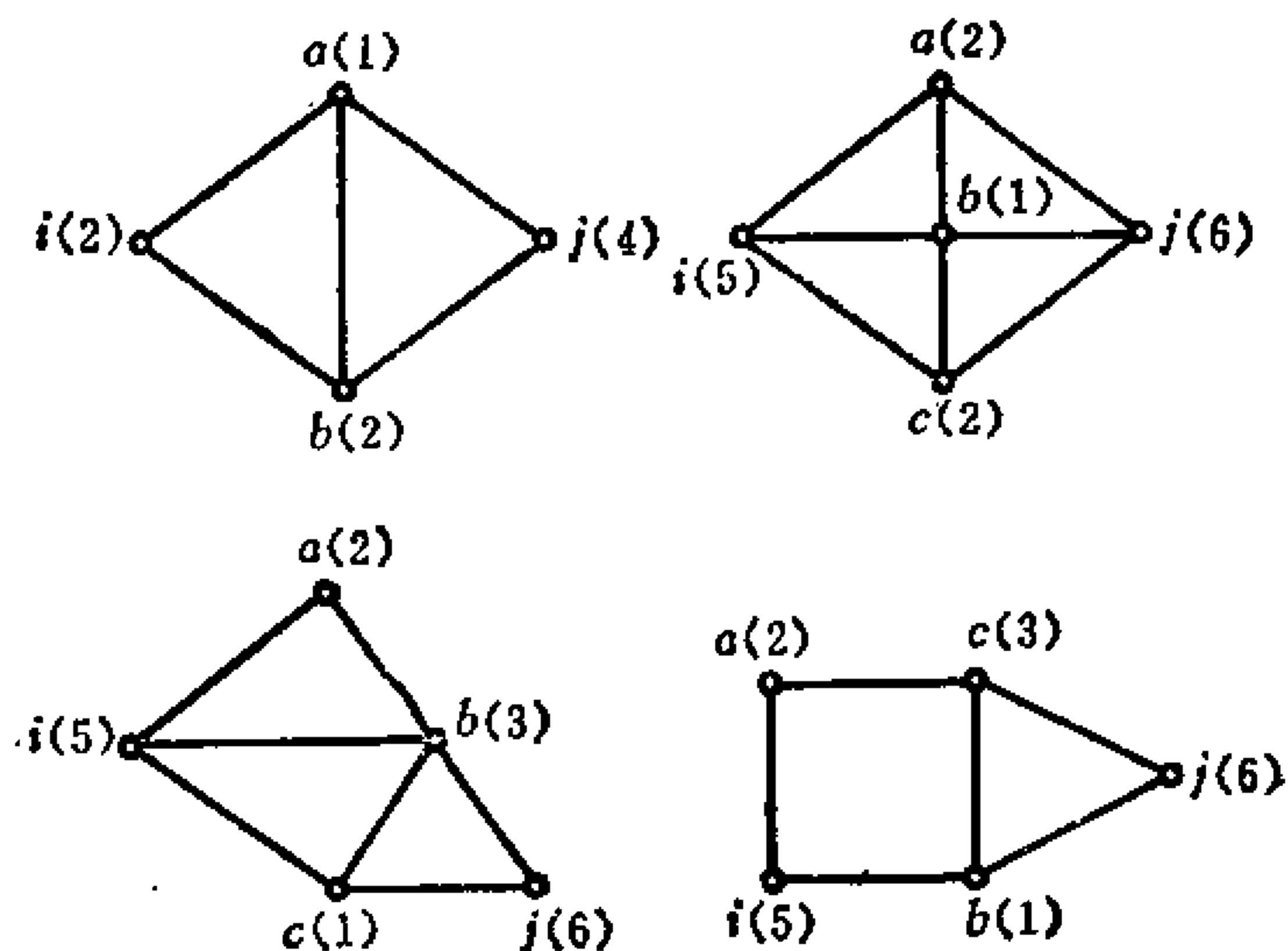
4. 综合一个 VWC 网, 其端限容量矩阵以矩阵 M 为子矩阵。
其中

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{bmatrix} d & 5 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & d & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & d & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & d & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & d \end{bmatrix} \end{matrix}$$

5. 证明定理13-3-1.

6. 证明定理13-3-2.

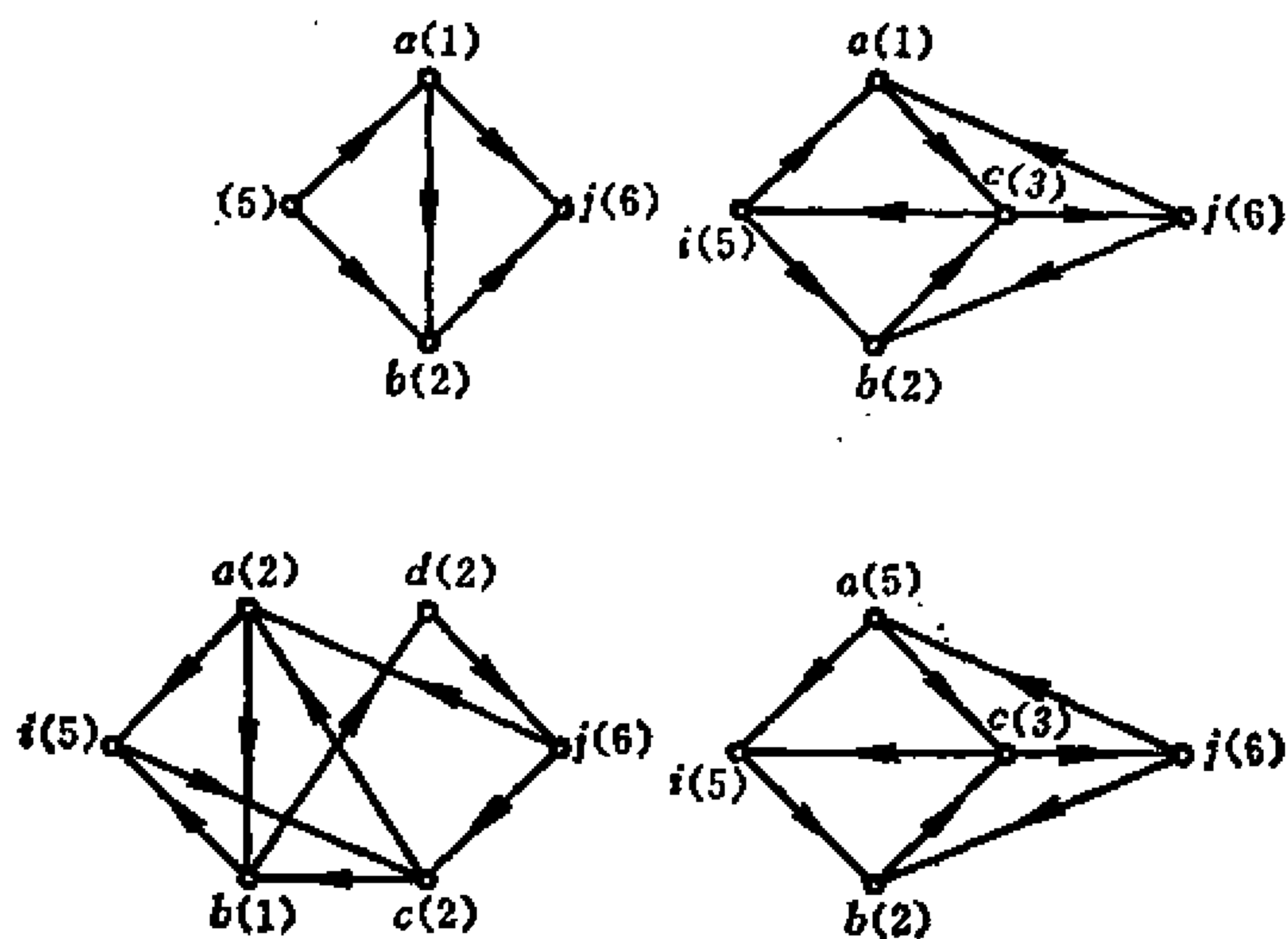
7. 在图P-13-7的VWC网中, 用首先生成 $\{S(i; j)\}$ 的方法求出从 i 到 j 的端限容量 t_{ij} .



图P-13-7

8. 证明定理13-4-3

9. 证明定理13-4-6。
10. 证明定理13-4-7。
11. 在图P-13-11的有向VWC网中，用首先生成 $\{S(i; j)\}$ 的方法求出从 i 到 j 的端限容量 t_{ij} 。



图P-13-11

第十四章 系 统 诊 断

14-1 分 辨 率

我们在这里所考虑的系统，是指那些可以用方框和连线表示的系统，其中的方框执行某种（已知的）功能，而连线是用来传输两个方框间的信息。计算机结构，计算机程序以及控制系统都是典型的例子。用顶点来代表方框，用边来代表连线，我们就可以得到对应于这种系统的线图。例如，图 14-1-1(a) 所示的一个计算机微程序控制单元，可以用图 14-1-1(b) 所示的有向线图来

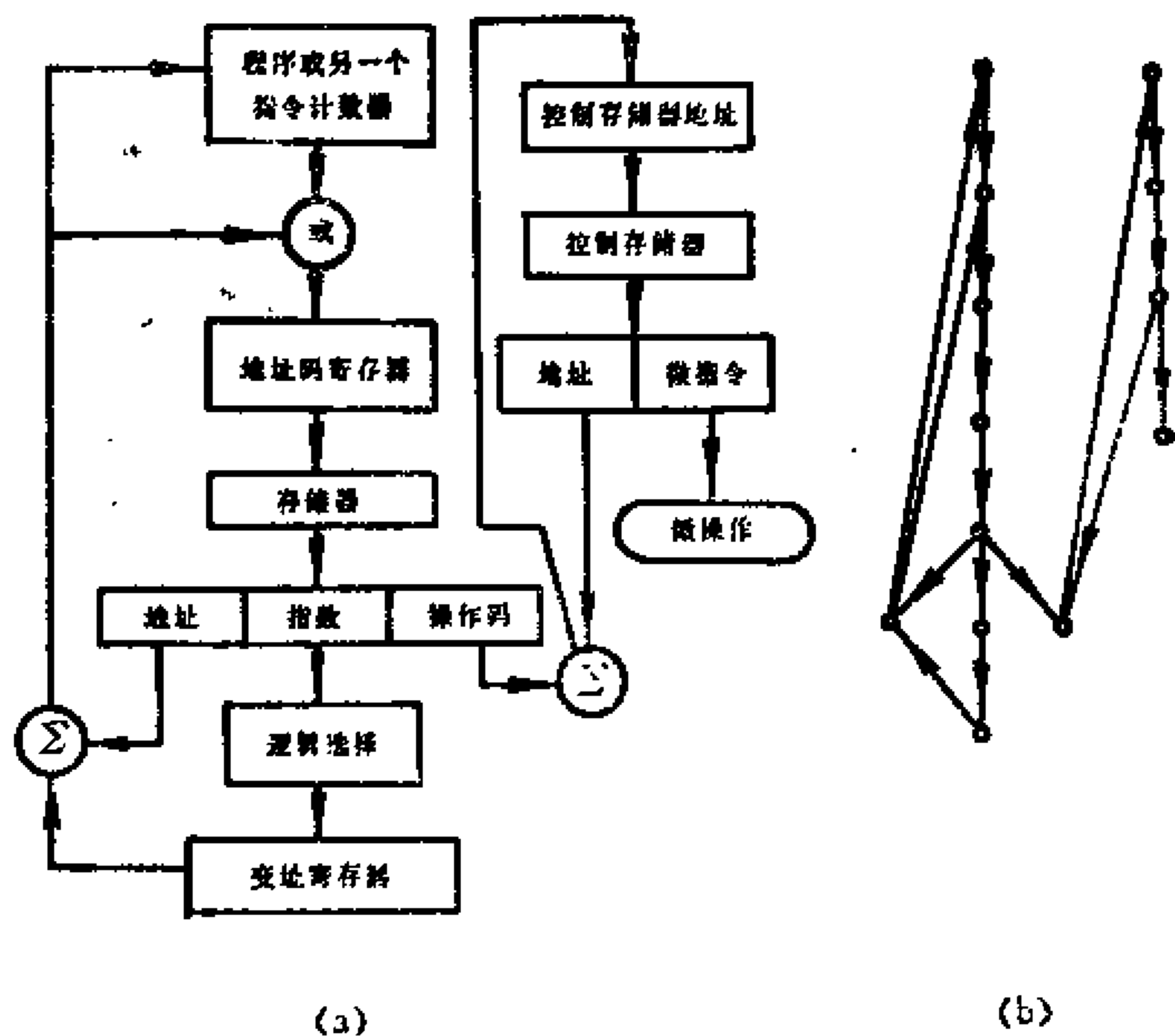


图14-1-1 一个系统及对应的有向图
(a)微程序控制单元； (b)对应的有向图

表示。

能把信息馈入系统的端点称为入口端，能把信息从系统中取出的端点称为出口端。假定每一个入口端（和出口端）属于一个方框，我们可以定义入口点为其对应方框具有的入口端的顶点，同样，一个出口点是对应方框具有的出口端的顶点。

定义14-1-1 在线图中，外来信号可以进入的顶点称为入口点，信号可以离去的顶点称为出口点。

为了研究系统中某些方框发生故障的位置，我们作如下假设。

假设 当一个无畸变信号或畸变信号通过一个故障点时，信号将发生畸变。另一方面，当一个无畸变信号（或者是畸变信号）通过一个无故障点时，信号不会发生畸变（或仍有畸变）。这里的故障点定义如下。

定义14-1-2 故障点是对应于有故障的方框的顶点。无故障点是对应于正常工作的方框的顶点。

由这个假设我们能看出，信号一经畸变就不可能是无畸变的了。所以我们只要监测一个输出信号，就可以发现信号是否通过一个故障点。实际上，这种假设并不能包括所有情况，然而，按照这个假设，能够很容易地得到许多诊断方面的理论结果。并且还可以修改这些结果以覆盖这个假设不适用的特殊情况。为了表明哪些点会影响到达一个特定端点的信号，我们采用以下定义符号 $\Omega(i \times j)$ 。

定义14-1-3 设 i 和 j 都是有向图 G 的顶点，符号 $\Omega(i \times j)$ 表示这样的顶点集合：顶点 p 在 $\Omega(i \times j)$ 中，当且仅当存在一个包含顶点 p 的 $M(i \times j)$ 类型的连通有向 M 图。集合 $\Omega(i \times j)$ 称为可测量集。

例14-1-1 考虑图 14-1-2 中的有向图。一个可测量集 $\Omega(1 \times 3)$ 是 $(1, 2, 3, 4)$ ，因为从 1 到 3 的有向路径 $P_1 = (a, b)$

经过顶点 1，2 和 3，而从 1 到 3 的有向路径 $P_2 = (d, e)$ 通过顶点 1，3 和 4，但却没有包含顶点 5 的 $M(1 \times 3)$ 类型连通有向图。注意从 i 到 j 的有向路径是 $M(i \times j)$ 类型的连通有向 M 图（见定义 6-6-6）。可测量集 $\Omega(1 \times 4)$ 是 $(1, 2, 4)$ 。

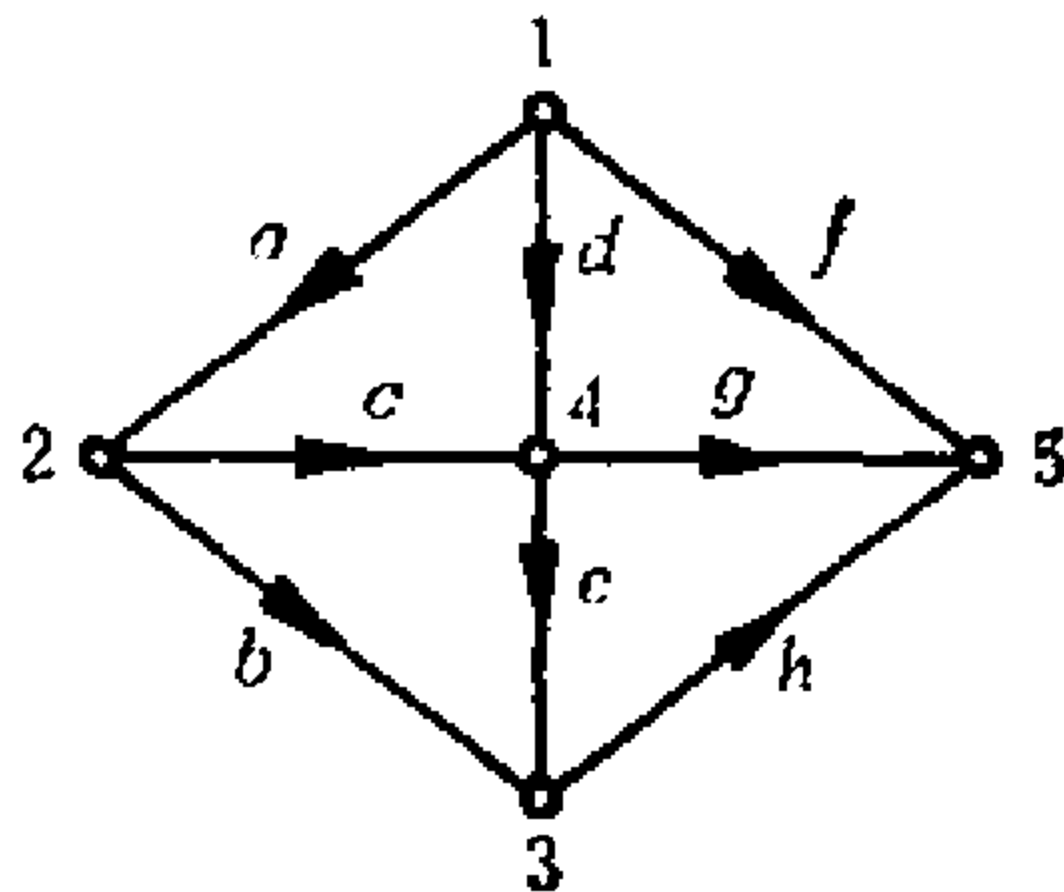


图14-1-2 有向图

定义14-1-4 设 Ω 是有向图中所有顶点的集合。则

$$\overline{\Omega(i \times j)} = \Omega - \Omega(i \times j) \tag{14-1-1}$$

例如，图14-1-2中有向图的 $\overline{\Omega(1 \times 4)}$ 是 $(3, 5)$ 。

现在来看看一个可测量集 $\Omega(i \times j)$ 不包含一个有向图 G 中所有顶点时的情况。假定我们从顶点 i 注入一个信号。如果在顶点 j 监测的信号表明存在着故障点，那么这些故障点必在 $\Omega(i \times j)$ 中。另一方面，如果在顶点 j 监测的信号表明没有故障点，而我们又知道有故障点存在，那么很明显， $\overline{\Omega(i \times j)}$ 中包含故障点。

假定在顶点 i 注入信号时，在顶点 j 的监测表明没有故障点，而在顶点 k 的监测表明存在故障点，那么我们知道，集合 $\overline{\Omega(i \times j)} \cap \Omega(i \times k)$ 包含了故障点。

在信号由顶点 i 注入的情况下，如果我们只能在顶点 j 和 k 监测信号，并且存在一个故障点，那么，我们可以按照上述测试方法，来确定下列集合中那一个包含着故障点：

$$\begin{aligned} &\Omega(i \times j) \cap \Omega(i \times k) \\ &\Omega(i \times j) \cap \overline{\Omega(i \times k)} \\ &\overline{\Omega(i \times j)} \cap \Omega(i \times k) \\ &\overline{\Omega(i \times j)} \cap \overline{\Omega(i \times k)} \end{aligned}$$

这些集合构成一个集体，称为可测量集 $\Omega(i \times j)$ 和 $\Omega(i \times k)$ 的一

个 D 划分.

定义14-1-5 对于给定的 k 个可测量集 $\Omega(i_p \times j_p)$, $p = 1, 2, \dots, k$, 集合的集体

$$\left\{ \begin{array}{l} \bigcap_{p=1}^k \overline{\Omega(i_p \times j_p)}; \quad \overline{\Omega(i_p \times j_p)} \text{ 的所有可能的组合,} \\ p = 1, 2, \dots, k, \text{ 这里的 } \overline{\Omega(i_p \times j_p)} \text{ 不是} \\ \Omega(i_p \times j_p) \text{ 就是 } \overline{\Omega(i_p \times j_p)} \end{array} \right\}$$

称为这些可测量集的一个 D 划分.

例14-1-2 考虑图 14-1-2 中的有向图. 对应于可测量集 $\Omega(1 \times 3) = (1, 2, 3, 4)$, $\Omega(1 \times 4) = (1, 2, 4)$, $\Omega(2 \times 5) = (2, 3, 4, 5)$ 的一个 D 划分包括:

$$\begin{aligned} \Omega(1 \times 3) \cap \Omega(1 \times 4) \cap \Omega(2 \times 5) &= (2, 4) \\ \Omega(1 \times 3) \cap \Omega(1 \times 4) \cap \overline{\Omega(2 \times 5)} &= (1) \\ \Omega(1 \times 3) \cap \overline{\Omega(1 \times 4)} \cap \Omega(2 \times 5) &= (3) \\ \Omega(1 \times 3) \cap \overline{\Omega(1 \times 4)} \cap \overline{\Omega(2 \times 5)} &= \phi \\ \overline{\Omega(1 \times 3)} \cap \Omega(1 \times 4) \cap \Omega(2 \times 5) &= \phi \\ \overline{\Omega(1 \times 3)} \cap \Omega(1 \times 4) \cap \overline{\Omega(2 \times 5)} &= \phi \\ \overline{\Omega(1 \times 3)} \cap \overline{\Omega(1 \times 4)} \cap \Omega(2 \times 5) &= (5) \\ \overline{\Omega(1 \times 3)} \cap \overline{\Omega(1 \times 4)} \cap \overline{\Omega(2 \times 5)} &= \phi \end{aligned}$$

D 划分具有以下性质.

定理14-1-1 在可测量集的集体的 D 划分中, 任何两个非空集合没有公共的顶点.

证明: 我们注意到 $\Omega(p \times q)$ 和 $\overline{\Omega(p \times q)}$ 是没有公共顶点的. 据定义14-1-5, D 划分的任意两个集合 R_1 和 R_2 , 至少有一个可测量集 $\Omega(p \times q)$ 在 R_1 的表达式中, 而 $\overline{\Omega(p \times q)}$ 在 R_2 的表达式中. 因此 R_1 和 R_2 没有公共点. (证毕)

我们回忆一下, 由于一个可测量集 $\Omega(p \times q)$ 对应着在顶点 p 注入的信号, 在顶点 q 对监视信号进行测试. 如果 D 划分 $\{D\}$ 中

的一个集合由一个顶点 v 组成，并且只有顶点 v 失灵，那么，对于给定的可测量集集体（由它可得到 $\{D\}$ ），我们可作相应测量，预言 v 是失灵点。如果在可测量集合的集体 M 下，顶点 v_1 和 v_2 都在 D 划分中的一个集合内，并且这两个顶点的一个是有故障的，那么只凭与 M 中可测量集相对应的测试要确定这两个顶点中哪一个有故障是不可能的。所以可测量集的已知集体决定着故障点能否定位，为此我们定义 k 分辨率如下。

定义14-1-6 在可测量集合的集体 M 下，有向图是 k 可辨的，如果：（1）存在 M 的 D 划分中一个包含 k 个顶点的集合 R ；（2）在 M 的 D 划分下没有包含多于 k 个顶点的集合。

例如，图14-1-2的有向图在可测量集 $\Omega(1 \times 3)$ ， $\Omega(1 \times 4)$ 和 $\Omega(2 \times 5)$ 的集体 M 下，是2可辨的。因为在 M 的 D 划分 $\{D\}$ 中有集合 $(2, 4)$ ，并且在 $\{D\}$ 中没有包含多于两个顶点的集合。

注意，一个有向图 G 在可测量集集体 M 下是 k 可辨的，意思是说存在一个有 k 个顶点的集合，如果这些顶点之一是有故障的，则与这些可测量集对应的测量不可能确定这 k 个顶点中的哪一个故障点，但这些测量却表明这 k 个顶点中有一个是故障点。

14-2 测 试 点

我们已经定义了一个系统的入口端和出口端。系统中任何其他端点都称为内部端。也就是说，内部端是接了一条连线的方框的一部分，此方框既非入口端，又非出口端。因此，在与系统对应的线图中，每一个顶点可以表示为入口端、出口端，也可以为内部端。

对于我们所进行的测试来说，如果系统中任何一个内部端都可以作为入口端或出口端，那么任何一个可测量集 $\Omega(p \times q)$ （其

中 p 和 q 是顶点) 都可作为诊断用的可测量集集体中的元素。不过, 即使使所有的顶点都可以作为入口点和出口点, 也不一定能达到 1 分辨率。例如, 在图14-2-1中的有向图 G 中所有顶点 p 和 q 的可测量集 $\Omega(p \times q)$ 的集体下, G 就不是 1 分辨的。为了排除这些困难, 我们采用一种所谓测试门的方法, 在必要时用它可以删去一些边。测试门的性质以及利用测试门的系统诊断将在后面讨论。

对于给定的 k , 使 k 分辨率变成不可能的另一种明显情况, 是没有足够的入口点和出口点。在这种情况下, 我们利用所谓测试点来得到一些附加的可测量集, 使 k 分辨率成为可能。也就是说, 我们要把测试点作为一条边上的附加点, 使我们能通过此点既可以注入, 又能监测诊断用的信号。不过, 当我们考虑 G 中顶点的分辨率时, 并不把插入的点当作所给线图 G 的顶点集合中的一个元素。因此, 我们定义测试点如下。

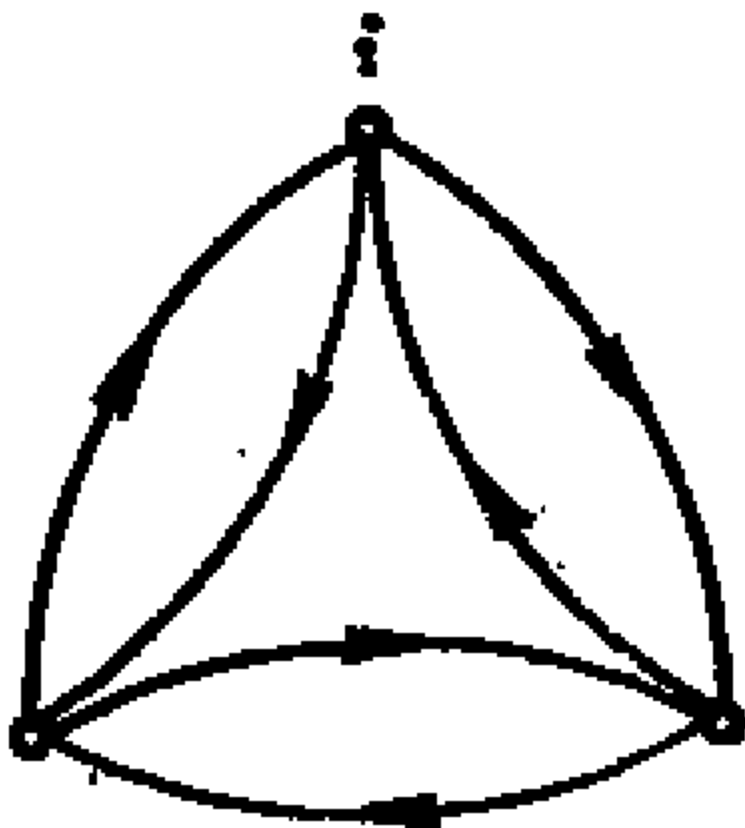


图14-2-1 有向图 G

定义14-2-1 在一条边上指定一个测试点, 表示信号既可以通过这条边注入, 同时通过这条边的信号也可以受监测。

设边 e 从顶点 v_1 连接到顶点 v_2 , 如果在边 e 上指定了测试点, 我们把顶点 $v(e^-)$ 看成入口点, 把 $v(e^+)$ 看成出口点。

定义14-2-2 符号 $v(e^+)$ 和 $v(e^-)$ 表示两个顶点, 边 e 从 $v(e^+)$ 连接到 $v(e^-)$ 。

例如, 在图14-1-2的有向图中, $v(a^+) = 1$, $v(a^-) = 2$ 。类似地, $v(b^+) = 2$, $v(b^-) = 3$ 。

为了简便, 我们作下列定义。

定义14-2-3 符号 $\Omega(a^\pm \times j)$ 是 $\Omega(v(a^\pm) \times j)$ 的简略写法。同样， $\Omega(i \times a^\pm)$ 是 $\Omega(i \times v(a^\pm))$ 的简略写法， $\Omega(a^\pm \times b^\pm)$ 是 $\Omega(v(a^\pm) \times v(b^\pm))$ 的简略写法。这种简略写法也用于有向 M 图，例如 $M(a^\pm \times b^\pm)$ 表示 $M(v(a^\pm) \times v(b^\pm))$ 。

例14-2-1 考虑图14-2-2中的有向图 G ，它只有一个入口点1和出口点2。因此，我们只得得到一个可测量集 $\Omega(1 \times 2) = (1, 2, 3, 4)$ 。如果我们指定测试点在边 C 上，那么，我们就得到两个附加的可测量集 $\Omega(1 \times c^+)$ 和 $\Omega(c^- \times 2)$ 。

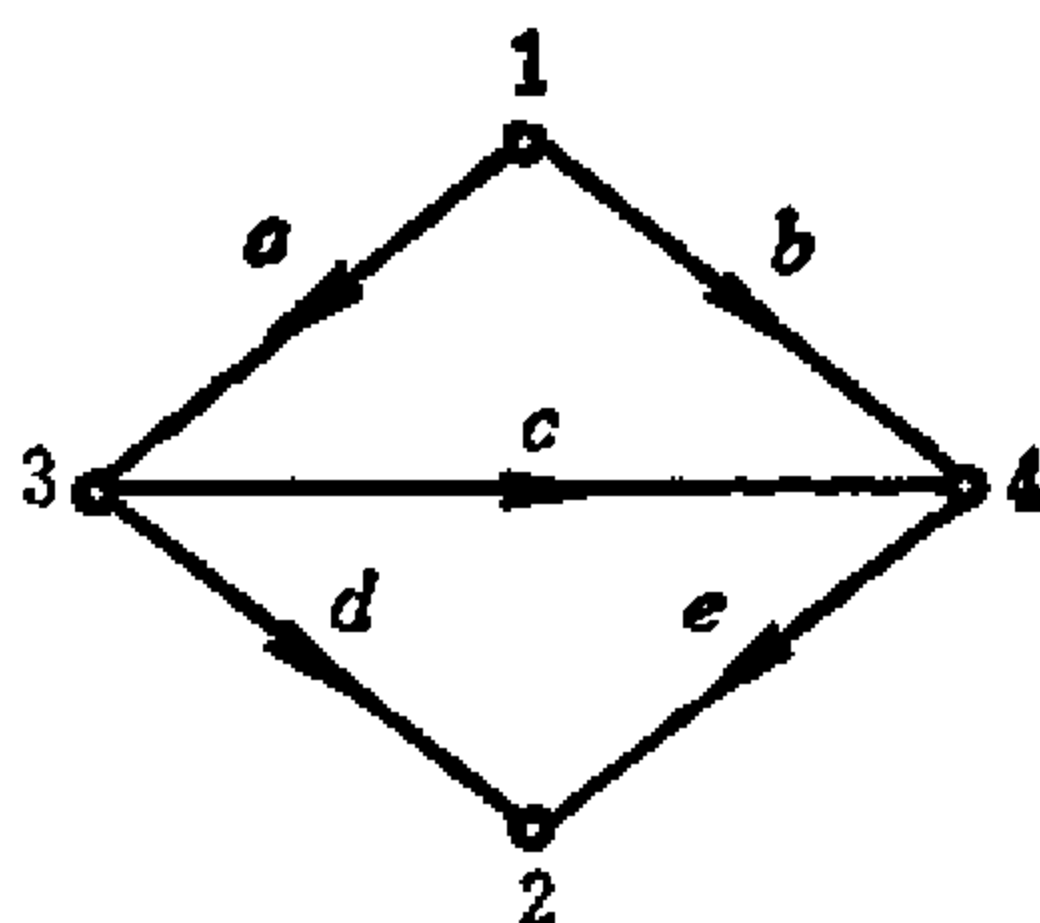


图14-2-2 有向图

为了研究测试点的性质，我们考虑一个连通有向线图，它只有一个入口点和一个出口点。也就是说，我们来定义SEC图如下。

定义14-2-4 一个SEC图（单输入单输出的连通图）是一个连通的有向图，其中恰有一个入口点和一个出口点。

设 i 和 j 分别是一个SEC图的入口点和出口点。因为从顶点 i 注入的信号只能在顶点 j 得到，所以可测量集 $\Omega(i \times j)$ 中以外的顶点所代表的任一方框对于与此SEC图对应的系统功能不作贡献。因此我们只要考虑这样的SEC图，它的可测量集 $\Omega(i \times j)$ 包含这个SEC图中所有的顶点。

定义14-2-5 一个从 i 到 j 的SEC图是指一个入口点为 i ，出口点为 j 的SEC图。

首先我们研究测试点和有向割集之间的关系。

定理14-2-1 设 G 是从 i 到 j 的SEC图。假定 $S(e)$ 是一个把顶点 i 和 j 分离开，且包含边 e 的有向割集。并假设除此之外没有其他把顶点 i 和 j 分离且包含边 e 的有向割集。设 G_1 和 G_2 都

是从 G 中删去 $S(e)$ 的所有边得到的两个最大连通子图。则 $\Omega(i \times e^+) = \Omega(G_1)$, $\Omega(e^- \times j) = \Omega(G_2)$ 。

证明: 设 p 是 G_1 中的一个顶点。假定存在一个 $M(e^- \times j)$ 类型的连通有向 M 图包含着顶点 p , 则 $S(e)$ 不是一个有向割集, 因为在 $S(e)$ 中至少还有一条边, 其方向从 $\Omega(G_2)$ 中的顶点到 $\Omega(G_1)$ 中的顶点。因此, $M(e^- \times j)$ 类型的有向 M 图不会包含 $\Omega(G_1)$ 中的顶点。

假定 p 不在任何一个 $M(i \times e^+)$ 类型的连通有向 M 图内。设 Ω_p 是这样的所有顶点的集合: 对于 Ω_p 中任一顶点 v' , 在 G_1 中有一条从 p 到 v' 的有向路径。因为 $\Omega(i \times j)$ 包含顶点 p , 所以没有 $M(i \times e^+)$ 类型的有向 M 图通过 Ω_p 中的 v' 。注意顶点 $v(e^+)$ 不在 Ω_p 中。我们还可以看出, 顶点 i 也不在 Ω_p 中。考虑一个割集 $S'(e)$:

$$S'(e) = \mathcal{E} \{ [\Omega(G_1) - \Omega_p] \times [\Omega(G_1) - \Omega_p] \} \\ \cup \mathcal{E} \{ \overline{[\Omega(G_1) - \Omega_p]} \times [\Omega(G_1) - \Omega_p] \} \quad (14-2-1)$$

因为 $S(e)$ 是有向割集, 故 $\mathcal{E}[\overline{\Omega(G_1)} \times \Omega(G_1)]$ 是空集, 因此 $\mathcal{E} \{ \overline{[\Omega(G_1) - \Omega_p]} \times [\Omega(G_1) - \Omega_p] \}$ 也是空集。连接 Ω_p 中的顶点 v' 和 $[\Omega(G_1) - \Omega_p]$ 中的顶点 v'' 之间的一条边, 其方向不可能从 v' 到 v'' , 因为如果这样, v'' 就必然在 Ω_p 中, 故 $\mathcal{E} \{ \Omega_p \times [\Omega(G_1) - \Omega_p] \}$ 是空集。从而, $\mathcal{E} \{ [\Omega(G_1) - \Omega_p] \times [\Omega(G_1) - \Omega_p] \}$ 也是空集。这就说明, $S'(e)$ 是把顶点 i 和 j 分离开的有向割集, 因为据假定, 只有 $S(e)$ 是包含边 e 的有向割集, 这就出现矛盾。所以, p 必定至少在一个 $M(i \times e^+)$ 类的连通有向 M 图中, 与此类似, 我们也可以取 G_2 中的一个顶点来证明这个定理是正确的。

(证毕)

当存在一个以上的包含边 e 的且把 i 和 j 分离的有向割集时, 可以应用下面这个定理。

定理14-2-2 设 G 是从 i 到 j 的 SEC 图。假定在把 i 和 j

分离的全部有向割集中,包含着边 e 的 k 个有向割集是 $S_1(e)$, $S_2(e)$, \dots , $S_k(e)$. 则 $\Omega(i \times e^+) = \Omega(G'_1)$, $\Omega(e^- \times j) = \Omega(G'_2)$, 这里 G'_1 和 G'_2 是从 G 中删去 $S_1(e)$, $S_2(e)$, \dots , $S_k(e)$ 的所有边得到的两个最大连通子图.

证明: 从 G'_1 和 G'_2 中任取一个顶点来证明, 这和定理 14-2-1 的证明完全相同. 所以我们只需要证明既不在 G'_1 中又不在 G'_2 中的任一顶点不会在 $\Omega(i \times e^+)$ 或 $\Omega(e^- \times j)$ 中. 考虑一个子图 G'_3 , 它是删去 G'_1 和 G'_2 的所有顶点和与这些顶点相连的所有边得到的. 我们容易看出, 在 $S_1(e)$, $S_2(e)$, \dots , $S_k(e)$ 中正好存在两个割集, 删去这两个割集中的所有边, 我们就得到三个子图 G'_1 , G'_2 和 G'_3 . 设这两个割集是 $S_1(e)$ 和 $S_k(e)$, 又设 v' 是 G'_3 中的一个顶点. 如果 v' 在 $M(i \times e^+)$ 类的连通有向 M 图中, 则 $S_1(e)$ 或 $S_k(e)$ 必有一个不是有向割集. 因此, v' 不可能在 $M(i \times e^+)$ 类的任何一个连通有向 M 图中. 同样, 我们可以说明, v' 不可能在 $M(e^- \times j)$ 类的任何一个连通有向 M 图中. 这样此定理得证. (证毕)

在定理 14-2-2 的证明中, 我们利用两个有向割集 $S_1(e)$ 和 $S_k(e)$, 删去这两个割集的所有边, 就产生了 G'_1 , G'_2 和 G'_3 . 我们说两个有向割集 $S_1(e)$ 和 $S_k(e)$ 被边 e 覆盖, 或者说边 e 覆盖 $S_1(e)$ 和 $S_k(e)$. 如果象定理 14-2-1 那样, 只存在一个割集 $S(e)$, 我们就说边 e 覆盖有向割集 $S(e)$.

定义 14-2-6 我们说边 e 覆盖一个有向割集 S , 如果 S 是把 i 和 j 分离开且包含边 e 的唯一的有向割集. 边 e 覆盖有向割集 $S_1 = \mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 和 $S_2 = \mathcal{E}(\Omega_2 \times \bar{\Omega}_2)$, 当且仅当: (1) S_1 和 S_2 把 i 和 j 分离; (2) S_1 和 S_2 包含边 e ; (3) 任何其他把 i 和 j 分离且包含边 e 的割集 $S' = \mathcal{E}(\Omega_3 \times \bar{\Omega}_3)$ 满足如下条件

$$(\Omega_1 \cup \Omega_2) \supset \Omega_3 \supset (\Omega_1 \cap \Omega_2) \quad (14-2-2)$$

例 14-2-2 如图 14-2-3(a) 所示, 考虑从 1 到 6 的 SEC 图, $S(b)$ 是包含边 b 且分离 1 和 6 的唯一的有向割集. 因此边 b 覆盖

有向割集 $S(b)$ 。删去 $S(b)$ 中所有的边，我们得到 G_1 和 G_2 ，如图14-2-3(b)所示。因此 $\Omega(1 \times b^+) = \Omega(G_1)$ ， $\Omega(b^- \times 6) = \Omega(G_2)$ 。

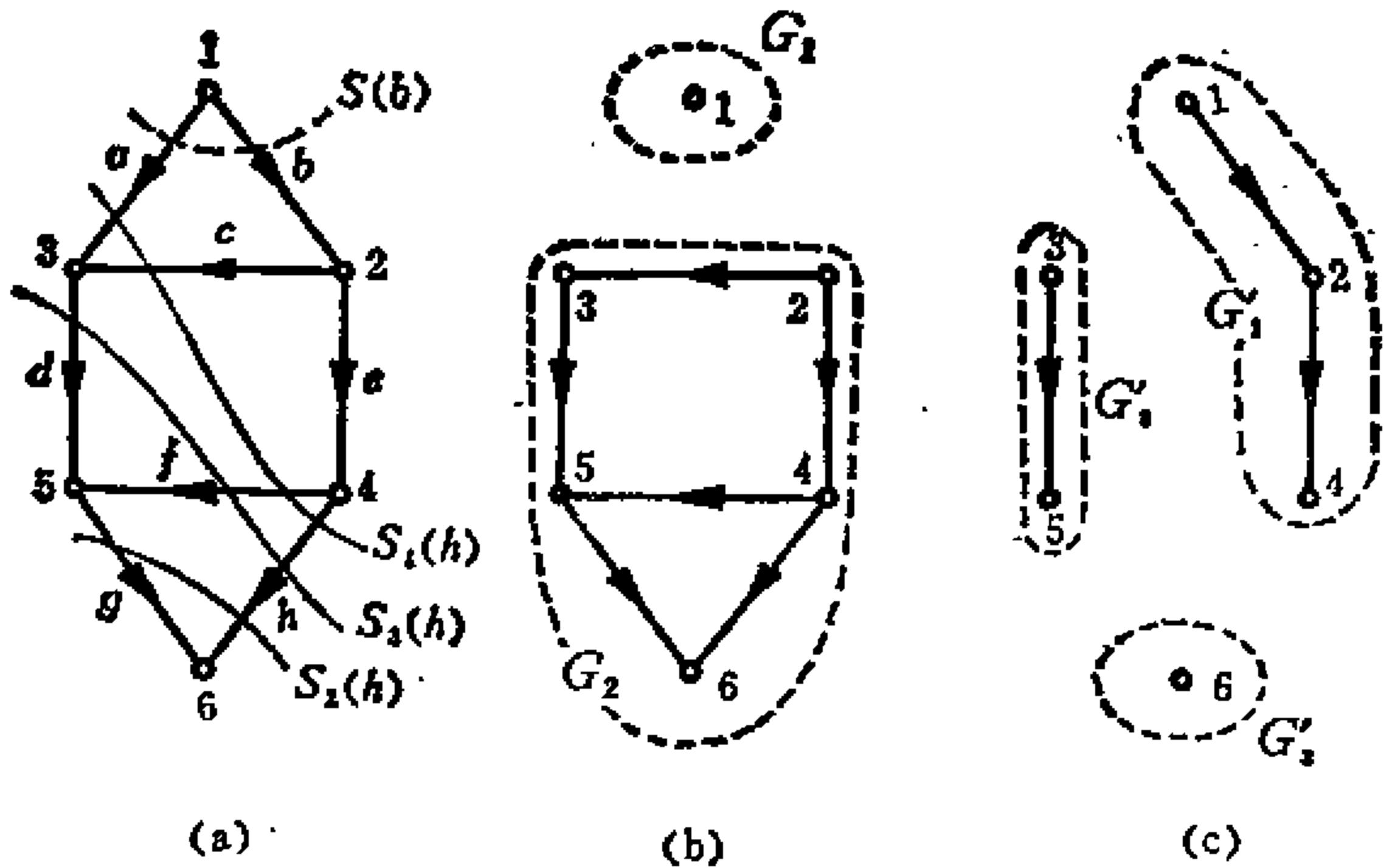


图14-2-3 由某些边覆盖的有向割集
(a)一个SEC图， (b) G_1 和 G_2 ， (c) G_1' ， G_2' ， G_3'

$S_1(h)$ ， $S_2(h)$ 和 $S_3(h)$ 是包含边 h 且把顶点1和6分离的所有有向割集。从图中我们可以看出：

$$\begin{aligned} S_1(h) &= \mathcal{S}(\Omega_1 \times \overline{\Omega_1}) = \mathcal{S}((1, 2, 4) \times \overline{(124)}) \\ S_2(h) &= \mathcal{S}(\Omega_2 \times \overline{\Omega_2}) = \mathcal{S}((1, 2, 3, 4, 5) \times \overline{(12345)}) \\ S_3(h) &= \mathcal{S}(\Omega_3 \times \overline{\Omega_3}) = \mathcal{S}((1, 2, 3, 4) \times \overline{(1234)}) \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} [\Omega_1 \cup \Omega_2 = (1, 2, 3, 4, 5)] &\supset [\Omega_3 \\ &= (1, 2, 3, 4)] \supset [\Omega_1 \cap \Omega_2 = (1, 2, 4)] \end{aligned}$$

所以边 h 覆盖 $S_1(h)$ 和 $S_2(h)$ 。子图 G_1' ， G_2' 和 G_3' 如图14-2-3(c)所示。注意 $\Omega(1 \times h^+) = \Omega(G_1')$ ， $\Omega(h^- \times 6) = \Omega(G_2')$ 。

定理14-2-1和14-2-2的逆定理也是正确的。

定理14-2-3 设 G 是从 i 到 j 的SEC图。设 $\Omega(i \times e^+)$ 和 $\Omega(e^- \times j)$ 是可测量集。如果 $\Omega(i \times e^+) \cap \Omega(e^- \times j) = \phi$ ，则存在包

含边 e 的有向割集 $S(e)$ 和 $S'(e)$ ，使得 $\Omega(Ge) = \Omega(i \times e^+)$ ， $\overline{\Omega(G'_e)} = \Omega(e^- \times j)$ 。这里 $S(e) = \mathcal{E}(\Omega(G_e) \times \overline{\Omega(G_e)})$ ， $S'(e) = \mathcal{E}(\Omega(G'_e) \times \overline{\Omega(G'_e)})$ 。

证明： 考虑如图 14-2-4 所示的边集合 $S = \mathcal{E}(\Omega(i \times e^+) \times \overline{\Omega(i \times e^+)})$ ，如果边 e 不在 S 中，则 $\Omega(i \times e^+)$ 包含顶点 $v(e^-)$ 。因为据假设 $\Omega(e^- \times j)$ 包含顶点 $v(e^-)$ ，故 $\Omega(i \times e^+) \cap \Omega(e^- \times j) \neq \phi$ ，所以边 e 一定在 S 中。设 $S = (b_1, b_2, \dots, b_m, e)$ ，假定 S 不是一个有向割集。那么，至少有一条边，比如说 b_1 ，它的方向是从 $\Omega(e^- \times j)$ 中的顶点 $v(b_1^+)$ 到 $\Omega(i \times e^+)$ 中的顶点 $v(b_1^-)$ 。然而，这是不可能的，原因如下：

1. 由于 $v(b_1^-)$ 在 $\Omega(i \times e^+)$ 中，故至少存在一个包含顶点 $v(b_1^-)$ 的 $M(i \times e^+)$ 类的连通有向 M 图。

2. 由于 G 是一个从 i 到 j 的 SEC 图，故至少存在一条从 i 到 $v(b_1^+)$ 的有向路径。

3. 于是，存在一条从 i 到 $v(e^+)$ 的有向路径，它包含边 b_1 。这就意味着 $v(b_1^+)$ 一定在 $\Omega(i \times e^+)$ 中。这就产生了矛盾。

换句话说， S 是包含边 e 的有向割集。并且，删去 S 中的所有边将得到最大连通子图 G_e ，它由 $\mathcal{E}(\Omega(i \times e^+) \times \overline{\Omega(i \times e^+)})$ 中的边组成。同样，我们也可以用 $\Omega(e^- \times j)$ 来证明有向割集 $S'(e)$ 的存在性。 (证毕)

如果定理 14-2-3 中的条件 $\Omega(i \times e^+) \cap \Omega(e^- \times j) = \phi$ 不满足，则以下定理说明，不存在把 i 和 j 分离且包含边 e 的有向割

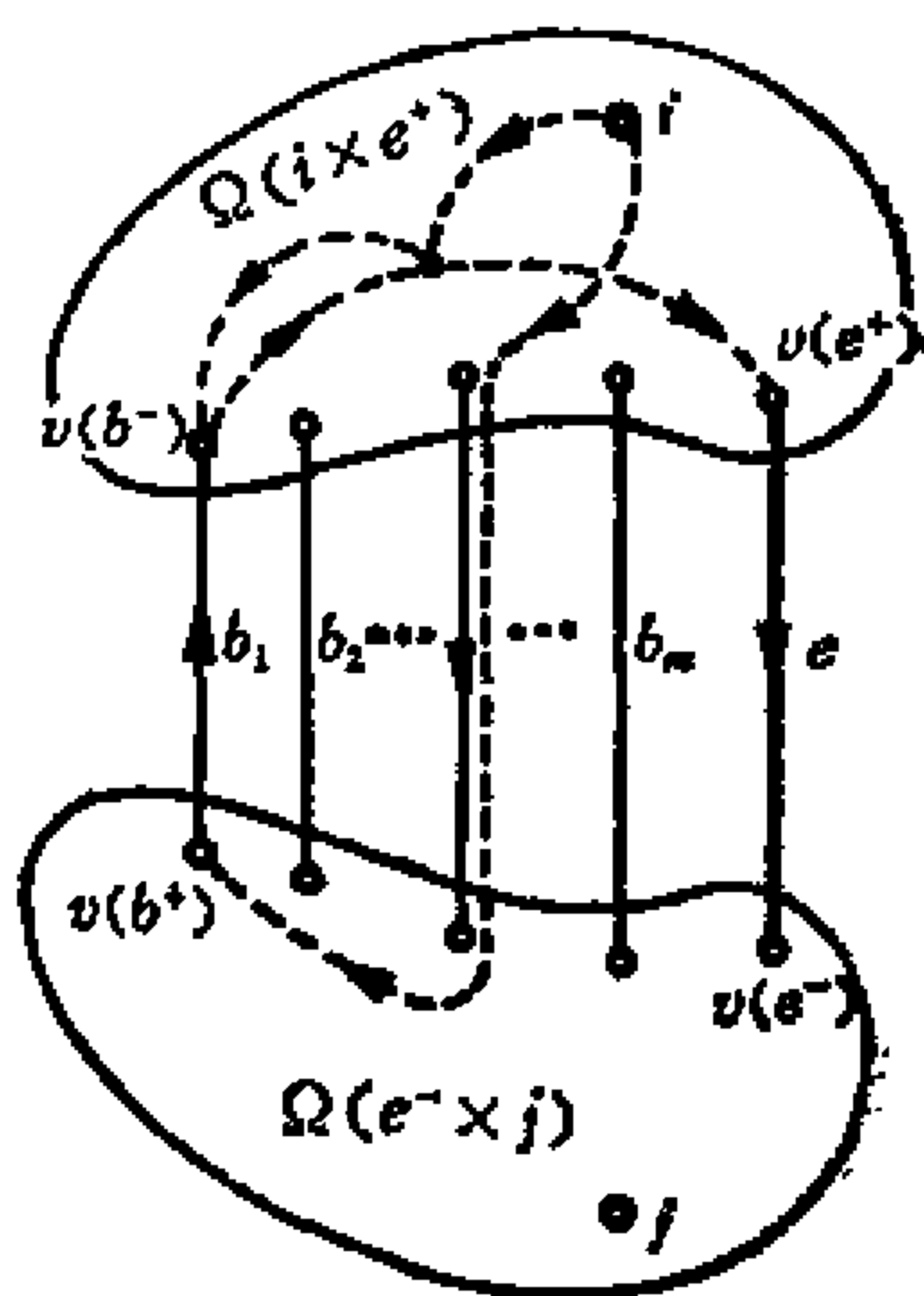


图14-2-4 集合 S

集。

定理14-2-4 设 G 是从 i 到 j 的SEC图。假定可测量集 $\Omega(i \times e^+)$ 和 $\Omega(e^- \times j)$ 具有以下性质：

$$\Omega(i \times e^+) \cap \Omega(e^- \times j) \neq \emptyset$$

则不存在把 i 和 j 分离且包含边 e 的有向割集。

证明： 设 v 是在 $\Omega(i \times e^+)$ 和 $\Omega(e^- \times j)$ 二者中的一个顶点，则存在一个包含顶点 v 的 $M(i \times e^+)$ 类连通有向 M 图，也存在一个包含顶点 v 的 $M(e^- \times j)$ 类连通有向 M 图，如图14-2-5所示。因此存在一个包含边 e 的有向回路，不存在包含边 e 的有向割集。
(证毕)

重要的问题是，在一些边上指定测试点时，应当如何选择这些边，才能达到1分辨率。以下定义有助于解决这个问题。

定义14-2-7 对于一个边集 E ，在 E 下的可测量集是指在 E 中所有的边上指定测试点时所有可能的可测量集。

定义14-2-8 从 i 到 j 的SEC图是在边集 E 下1可辨的，意思是说当把测试点指定到集合 E 中每一条边上时，在 E 下的可测量集是1可辨的。

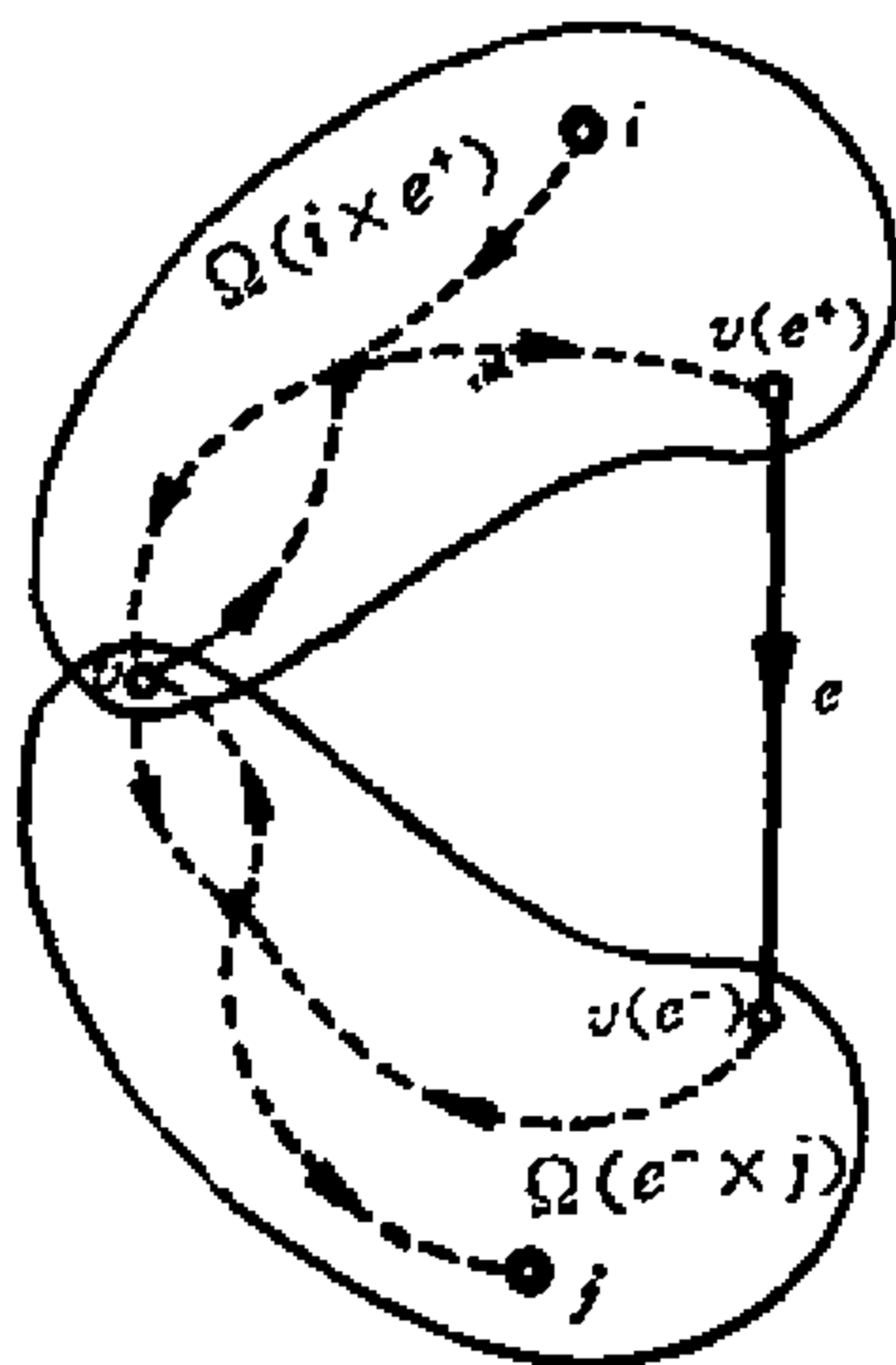


图14-2-5 包含 e 的有向回路的存在性

作为一个例子，我们来考虑图14-2-3中从1到6的SEC图。假定集合 E 由边 a 和 h 组成。则 E 下的可测量集是

$$\Omega(1 \times a^+) = (1)$$

$$\Omega(a^- \times 6) = (3, 5, 6)$$

$$\Omega(1 \times h^+) = (1, 2, 4)$$

$$\Omega(h^- \times 6) = \{6\}$$

$$\Omega(a^- \times h^+) = \phi$$

$$\Omega(h^- \times a^+) = \phi$$

因为顶点 3 和 5 都在这些可测量集的 D 划分的同一集合中, 所以 G 不是 1 可辨的.

下面的定理给出了一个边集 E 不能达到 1 分辨率的条件.

定理14-2-5 设 G 是从 i 到 j 的 SEC 图. 又设 E 是一个边集合, $\{S\}$ 是被 E 中的边覆盖的全部有向割集的集体, 如果 G 中有一条边不在 $\{S\}$ 的任一有向割集中, 则 G 在 E 下就不是 1 可辨的.

证明:

情况 1 假设一对可测量集 $\Omega(i \times b^+) \cap \Omega(b^- \times j) \neq \phi$, 则据定理14-2-4, 有一个包含边 b 的有向回路 C , 我们可以看出, 如果 C 中任一条边在 $M(i \times e^+)$ 类或 $M(e^- \times j)$ 类的一个连通有向 M 图中, 则有另一个同类的连通有向 M 图包含 C 中所有的边, 这里 e 是 E 中的边. 因此, 属于 C 的所有顶点或者都在一个可测量集中, 或者都不在同一个可测量集中. 所以在 E 下的可测量集的 D 划分中的一个集合包含属于 C 的所有顶点, 且 G 在 E 下不是 1 可辨的. 因为 C 中的边不可能在任何一个有向割集中, 所以定理在这种情况下是正确的.

情况 2 假定对 E 中任一边 e , $\Omega(i \times e^+) \cap \Omega(e^- \times j) = \phi$, 设 $\{S\}$ 是有向割集 S_1, S_2, \dots, S_m 的集体, 又设 $S_p = \mathcal{O}(\Omega_p \times \bar{\Omega}_p)$, $p = 1, 2, \dots, m$. 据定理 14-2-3, 对于任一可测量集 $\Omega(i \times e^+)$ 和 $\Omega(e^- \times j)$, 在 $\{S\}$ 中有一个有向割集 S_r , 使得 $\Omega(i \times e^+) = \Omega_r$, 在 $\{S\}$ 中还有一个有向割集 S_u , 使得 $\Omega(e^- \times j) = \bar{\Omega}_u$. 因为至少有一条边, 比如说边 b , 不在 $\{S\}$ 的任何一个有向割集内, 所以对 $p = 1, 2, \dots, m$, $v(b^+)$ 和 $v(b^-)$ 一定同在 Ω_p 或 $\bar{\Omega}_p$ 中. 因此不会有这样的可测量集, 它只包含 $v(b^+)$ 和 $v(b^-)$ 中的一个, 而不是二

者都包含。这样，在 E 下可测量集的集体的一个 D 划分中，如果一个集合包含 $v(b^-)$ ，就包含 $v(b^+)$ 。由 k 分辨率的定义， G 在 E 下不是 1 可辨的。 (证毕)

例14-2-3 考虑如图14-2-6所示的从 1 到 5 的SEC图 G ，假定 $E = (a, b)$ ，则 S 由 $S_1 = \mathcal{C}((1) \times (\bar{1}))$ ， $S_2 = \mathcal{C}((1, 2) \times (\bar{1}, \bar{2}))$ 和 $S_3 = \mathcal{C}((1, 2, 3, 4) \times (\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}))$ 组成。注意割集 S_1 由边 a 覆盖， S_2 和 S_3 由边 b 覆盖。因为边 e 不在 $\{S\}$ 中任何一个有向割集内，所以 G 在 E 下不是 1 可辨的。对此结论，我们可以用下面的方法来检查。首先，求出所有非空的可测量集：

$$\Omega(1 \times 5) = (1, 2, 3, 4, 5)$$

$$\Omega(1 \times a^+) = (1)$$

$$\Omega(a^- \times 5) = (2, 3, 4, 5)$$

$$\Omega(1 \times b^+) = (1, 2)$$

$$\Omega(b^- \times 5) = (5)$$

$$\Omega(a^- \times b^+) = (2)$$

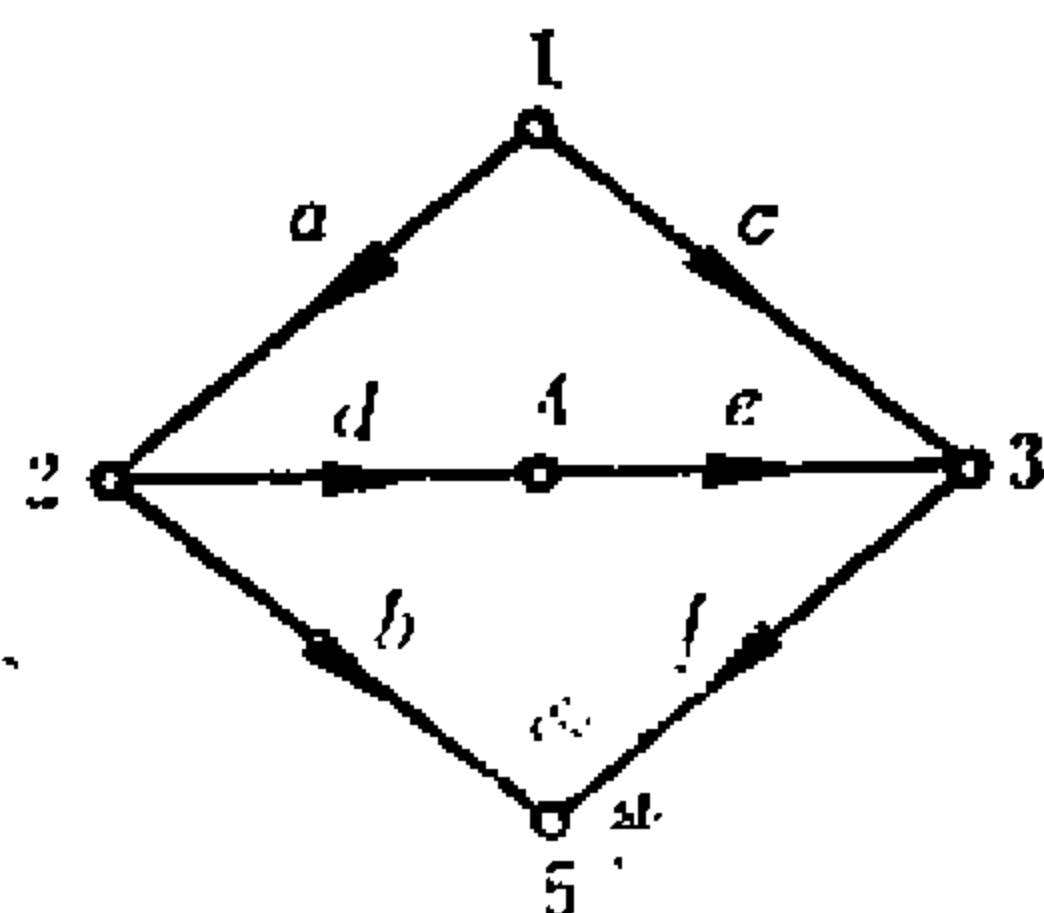


图14-2-6 SEC图

从这些可测量集中，我们可以得到一个 D 划分。其中有一个集合为

$$\begin{aligned} & \Omega(1 \times 5) \cap \overline{\Omega(1 \times a^+)} \cap \Omega(a^- \times 5) \cap \overline{\Omega(1 \times b^+)} \cap \overline{\Omega(b^- \times 5)} \cap \overline{\Omega(a^- \times b^+)} \\ &= (1, 2, 3, 4, 5) \cap (2, 3, 4, 5) \cap (2, 3, 4, 5) \cap (3, 4, 5) \cap (1, 2, 3, 4) \cap (1, 3, 4, 5) \\ &= (3, 4) \end{aligned}$$

因此 G 在 E 下不是 1 可辨的。

定理14-2-5表明，如果有一条边不在 $\{S\}$ 的一个割集中，那么SEC图 G 就不是 1 可辨的。如果每一条边都在 $\{S\}$ 的割集中， G 是不是 1 可辨的呢？回答一般是否定的。图14-2-7中的SEC图 G 就是一个例子，这里 $E = (a)$ 。也就是说， $\{S\}$ 由 S_1 和 S_2 组

成，它们包含了 G 中所有的边。

但是，可测量集是

$$\Omega(1 \times 4) = (1, 2, 3, 4)$$

$$\Omega(1 \times a^+) = (1)$$

$$\Omega(a^- \times 4) = (4)$$

因此，在这些可测量集下，顶点2和3在 D 划分的同一集合内。这就说明， G 在 E 下不是1可辨的。

我们进一步研究可测量集对讨论1分辨率会有所启发。

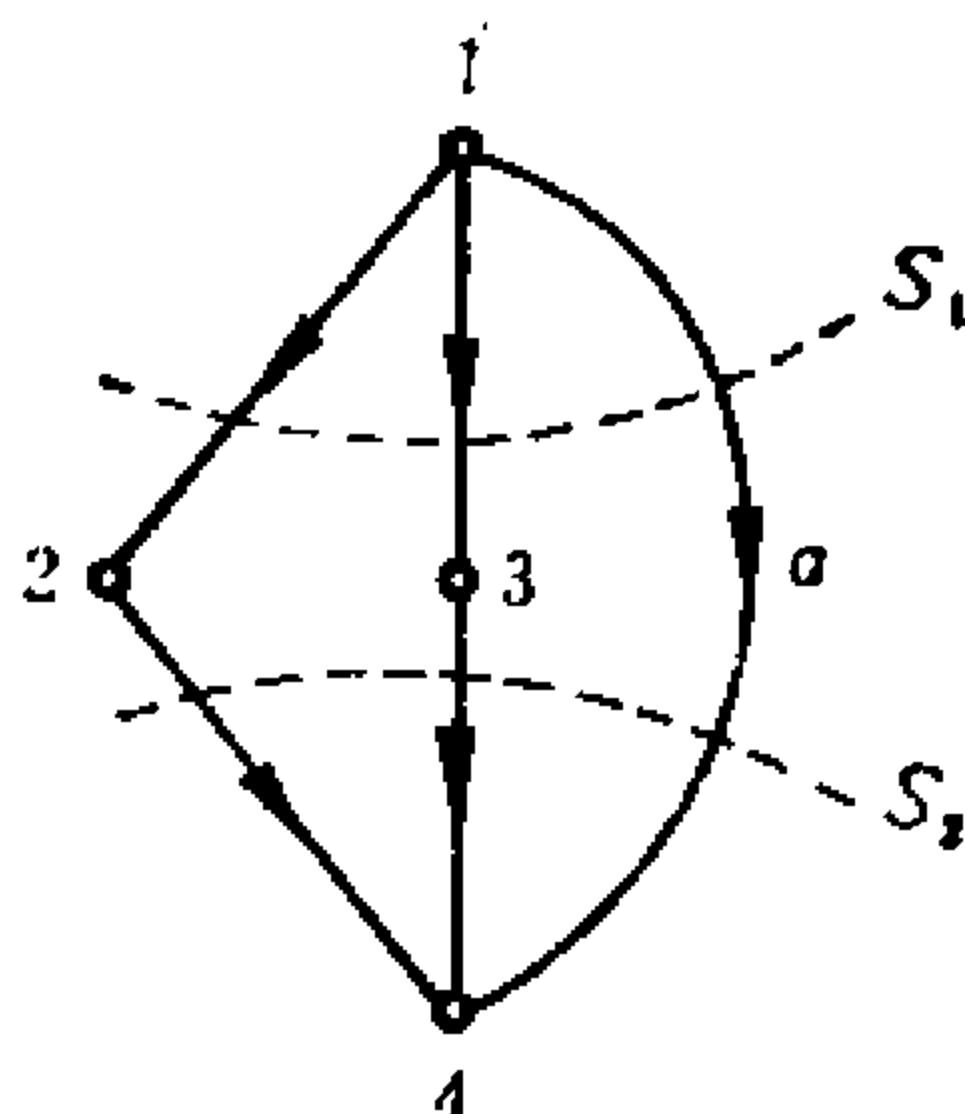


图14-2-7 SEC图

定理14-2-6 设 G 是从 i 到 j 的SEC图， E 是一个边集。设 $\{\Omega\}$ 是在 E 中所有的边上指定测试点而产生的所有可测量集的集体。那么，当且仅当对于 G 中每一对顶点 v_i 和 v_l ，存在一个可测量集 $\Omega \in \{\Omega\}$ ，使得 Ω 不包含 v_i ，就包含 v_l ，但不同时包含二者时， G 在 E 下是1可辨的。

证明： 设 v_0, v_1, \dots, v_n 是 G 中所有的顶点。考虑一个顶点 v_0 ，则对于 G 中另一顶点 v_p ，存在一个可测量集 $\Omega_p \in \{\Omega\}$ ，使得 Ω_p 不包含 v_0 ，就包含 v_p ，但不同时包含二者。因为这对于 G 中所有的顶点都是正确的，所以存在在 E 下 D 划分中的一个集合 D ，使得

$$D = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2 \cap \dots \cap \bar{\Omega}_m = (v_0)$$

并且，这对于 G 中每一个顶点都正确。因此， D 划分中每一个非空集合由一个顶点组成，根据定义， G 是1分辨率。

反过来，如果 G 在 E 下是1可辨的，则 D 划分中每一个非空集合由一个顶点组成。因此，对于一对顶点 v_i 和 v_l ，存在 E 下 D 划分中一个集合 D ，它由 v_i 组成，这里

$$D = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2 \cap \dots \cap \bar{\Omega}_m \quad (14-2-3)$$

在其中必有集合 $\Omega_r (1 \leq r \leq m)$ ，它包含 v_r 或 v_s ，但不同时包含二者。因此，在 $\{\Omega\}$ 中存在一个可测量集 Ω_r ，它不包含 v_r ，就包含 v_s ，但不同时包含二者。 (证毕)

因为求分离 i 和 j 且被 E 中的边覆盖的所有有向割集的集体 $\{S\}$ 要比求所有的可测量集的集体 $\{\Omega\}$ 容易，我们把定理14-2-6说成如下形式。

定理14-2-7 设 G 是从 i 到 j 的SEC图， E 是一个边集合，设 $\{S\}$ 是把 i 和 j 分离且被 E 中的边覆盖的所有的有向割集的集体。 G 在 E 下是1可辨的，当且仅当对于任何一对顶点 v_r 和 v_s ，存在 $\{S\}$ 中的一个有向割集把 v_r 和 v_s 分离开。

证明： 从定理14-2-6我们知道， G 是1可辨的，当且仅当对于任何一对顶点 v_r 和 v_s ，存在一个可测量集 Ω ，它不包含 v_r ，就包含 v_s ，但不同时包含二者。从定理14-2-1和14-2-2可知，如果 $\Omega(i \times e^+) \cap \Omega(e^- \times j) = \phi$ ，则可测量集 Ω 可以表示为 $\Omega(G')$ ，这里 G' 是删去 $\{S\}$ 中的一个有向割集的所有边得到的两个最大连通子图中的一个，而且显而易见 v_r 和 v_s 中的一个在 $\Omega(G')$ 中，另一个在 $\overline{\Omega(G')}$ 中。这样我们只需说明，对于 E 中所有的边，都满足 $\Omega(i \times e^+) \cap \Omega(e^- \times j) = \phi$ 即可。

据定理14-2-4，如果 $\Omega(i \times e^+) \cap \Omega(e^- \times j) \neq \phi$ ，那么在 $\{S\}$ 中没有包含边 e 的有向割集。另一方面，根据本定理的假设，存在 $\{S\}$ 中的一个集合 S ，把边 e 的两个端点 $v(e^+)$ 和 $v(e^-)$ 分离开。所以 S 是一个包含边 e 的有向割集。这样，对 E 中的每一条边，一定满足 $\Omega(i \times e^+) \cap \Omega(e^- \times j) = \phi$ 的条件。这就证明了此定理的必要性。由定理14-2-6，充分性是显然满足的。(证毕)

要知道每一对顶点能否由 $\{S\}$ 中的一个有向割集分开，这不是一件容易的事。所以我们先来寻找一个SEC图 G 在 E 下是1可辨的比较简单充分必要条件。首先我们来研究顶点的次序关系。

定义14-2-9 如果不存在从 v_i 到 v_j 的有向路径, 则顶点 v_i 和 v_j 的次序是 $v_i > v_j$. 为了方便, 也可规定 $v_i > v_i$.

作为一个例子, 我们考虑图14-2-6中的SEC图. 我们可将图中的所有顶点的次序排列为

$$1 > 2 > 4 > 3 > 5$$

利用顶点次序的定义, 我们来叙述以下定理.

定理14-2-8 设 G 是由顶点 v_1, v_2, \dots, v_n 组成的一个从 v_1 到 v_n 的SEC图, 假定 G 不包含有向回路, 那么 G 中的顶点可以按次序排列.

在证明这个定理之前, 我们先叙述和证明以下定理.

定理14-2-9 设 G 是从 v_1 到 v_n 的SEC图, 如果 G 中没有有向回路, 那么所有与 v_1 连接的边的方向都是离开 v_1 的, 所有与 v_n 连接的边的方向都是指向 v_n 的.

证明: 因为我们只考虑从 v_1 到 v_n 的SEC图, 它具有这样的性质: 可测量集 $\Omega(v_1 \times v_n)$ 包含SEC图的所有顶点. 所以从 v_1 到 G 中任何一点都有一条有向路径, 这样, 要使 G 中不存在有向回路, 与 v_1 连接的所有边的方向必然都是离开 v_1 的. 同样, 与 v_n 连接的所有边也必然都是指向 v_n 的, 这样才能使 G 中不存在有向回路. (证毕)

现在我们来证明定理14-2-8.

定理14-2-8的证明: 对于 $n=2$, 定理显然是成立的. 假定定理对于 $n=k$ 时成立, 则对 $n=k+1$, 我们从 G 中删去顶点 v_{k+1} 和与 v_{k+1} 连接的所有边, 得到一个有向图 G' . 设 G' 中的 $v_k, v_{k-1}, \dots, v_{k-p}$ 是这样一些顶点, 所有与这些点相连的边的方向都是指向这些顶点的. 对于 $p=0$, G' 就是一个从 v_1 到 v_k 的SEC图. 因此, 由于假设 G' 中的所有顶点可以排列成 $v_1 > v_2 > \dots > v_k$ 的次序. 于是 $v_1 > v_2 > \dots > v_k > v_{k+1}$ 就是所求的次序.

对于 $p \geq 1$, 我们添加一些边 y_1, y_2, \dots, y_p 到 G' 中, 其中 y_r 是

从 v_{k-r} 连接到 v_k 的, 如图14-2-8所示. 这个修改后的有向图是一个从 v_1 到 v_k 的SEC图, 所以它和前面的图正好相同. 因此, 在具有 y_1, y_2, \dots, y_p 的 G 中, 所有的顶点可以排列次序. 显然, 删去边 y_1, y_2, \dots, y_p 后, 顶点的次序仍然满足, 因此定理成立.

(证毕)

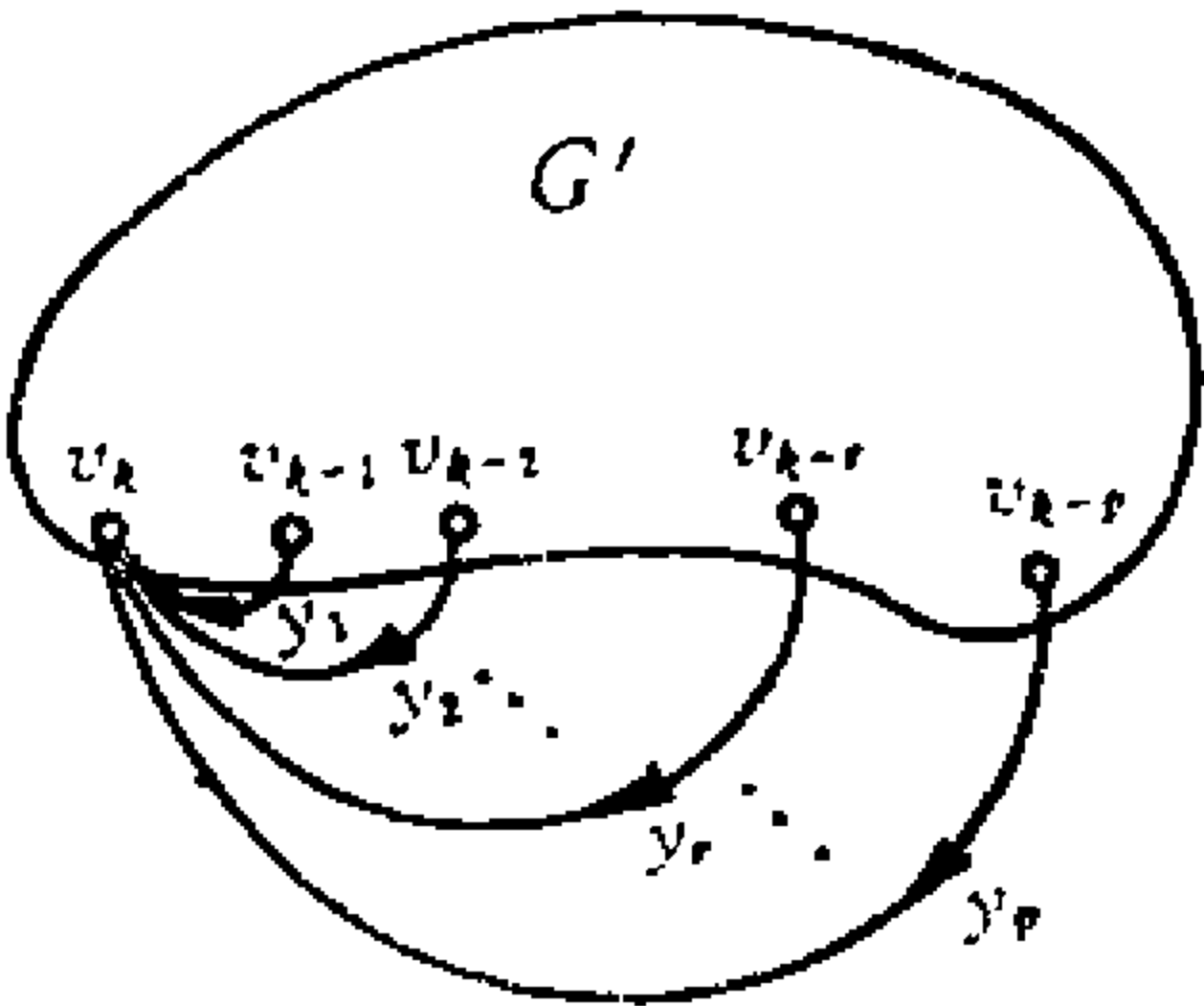


图14-2-8 添加了边 y_1, y_2, \dots, y_p 的图

利用顶点的次序关系, 我们可以得到不含有向回路的SEC图的一个有趣的性质如下.

定理14-2-10 设 G 是一个由 n 个顶点组成的, 从 v_1 到 v_n 的SEC图, 它不含有向回路. 则其中存在 $n-1$ 个把 v_1 和 v_n 分离的线性无关的有向割集.

证明: 设 $v_1 > v_2 > \dots > v_n$ 是由定理14-2-8得到的顶点次序. 则割集 $S_r = \mathcal{E}((v_1 v_2 \dots v_r) \times (v_{r+1} \dots v_n))$ 是一个把 v_1 和 v_n 分离的有向割集, $r = 1, 2, \dots, n-1$. 显然, 这些割集是线性无关的.

(证毕)

例14-2-4 考虑图14-2-9所示的从1到6的SEC图, 顶点的次序是 $1 > 2 > 3 > 4 > 5 > 6$, 五个线性无关的割集是

$$S_1 = \mathcal{E}((1) \times (2, 3, 4, 5, 6)) = (a, b)$$

$$S_2 = \mathcal{E}((1,2) \times (3,4,5,6)) = (a,c,e)$$

$$S_3 = \mathcal{E}((1,2,3) \times (4,5,6)) = (d,e)$$

$$S_4 = \mathcal{E}((1,2,3,4) \times (5,6)) = (d,f,h)$$

$$S_5 = \mathcal{E}((1,2,3,4,5) \times (6)) = (g,h)$$

注意，若含有有向回路时，全体顶点不能按次序排列。如果没有从 v_i 到 v_j 的有向路径，又没有从 v_j 到 v_i 的有向路径，顶点的次序就不是唯一的。例如，图14-2-9中SEC图的另一种顶点次序是 $1 > 2 > 4 > 3 > 5$ 。

运用以下定理，有可能建立顶点次序和1分辨率的关系。

定理14-2-11 设 G 是具有 n 个顶点的从 i 到 j 的SEC图，设 $S_p = \mathcal{E}(\Omega_p \times \bar{\Omega}_p)$ 是把 i 和 j 分离的有向割集， $p = 1, 2, \dots$

$n-1$ 。假定 S_1, S_2, \dots, S_{n-1} 都是线性无关的，则对 G 中的任意一对顶点 v_r 和 v_s ，存在 $S_r (1 \leq r \leq n-1)$ 把 v_r 和 v_s 分离开。

证明： 假定存在一对顶点 v_r 和 v_s ，不会被 S_1, S_2, \dots, S_{n-1} 中的任何一个所分离开，那么 v_r 和 v_s 同在 Ω_p 或 $\bar{\Omega}_p$ 中， $p = 1, 2, \dots, n-1$ 。把 v_r 和 v_s 合并起来，我们得到一个新的有向图 G' 。显然， G' 的 S_1, S_2, \dots, S_{n-1} 与 G 的相同，故 S_1, S_2, \dots, S_{n-1} 是线性无关的。但 G' 由 $n-1$ 个顶点组成，其中不会有超过 $n-2$ 个线性无关的割集。因此 G 中不可能存在这样一对顶点。 (证毕)

有了这些结果，我们又回到1分辨率的问题上来。

定理14-2-12 设 G 是从 i 到 j 的不含有向回路的SEC图。假定顶点的次序是唯一的，则 G 在边集 E 下是1可辨的，当且仅

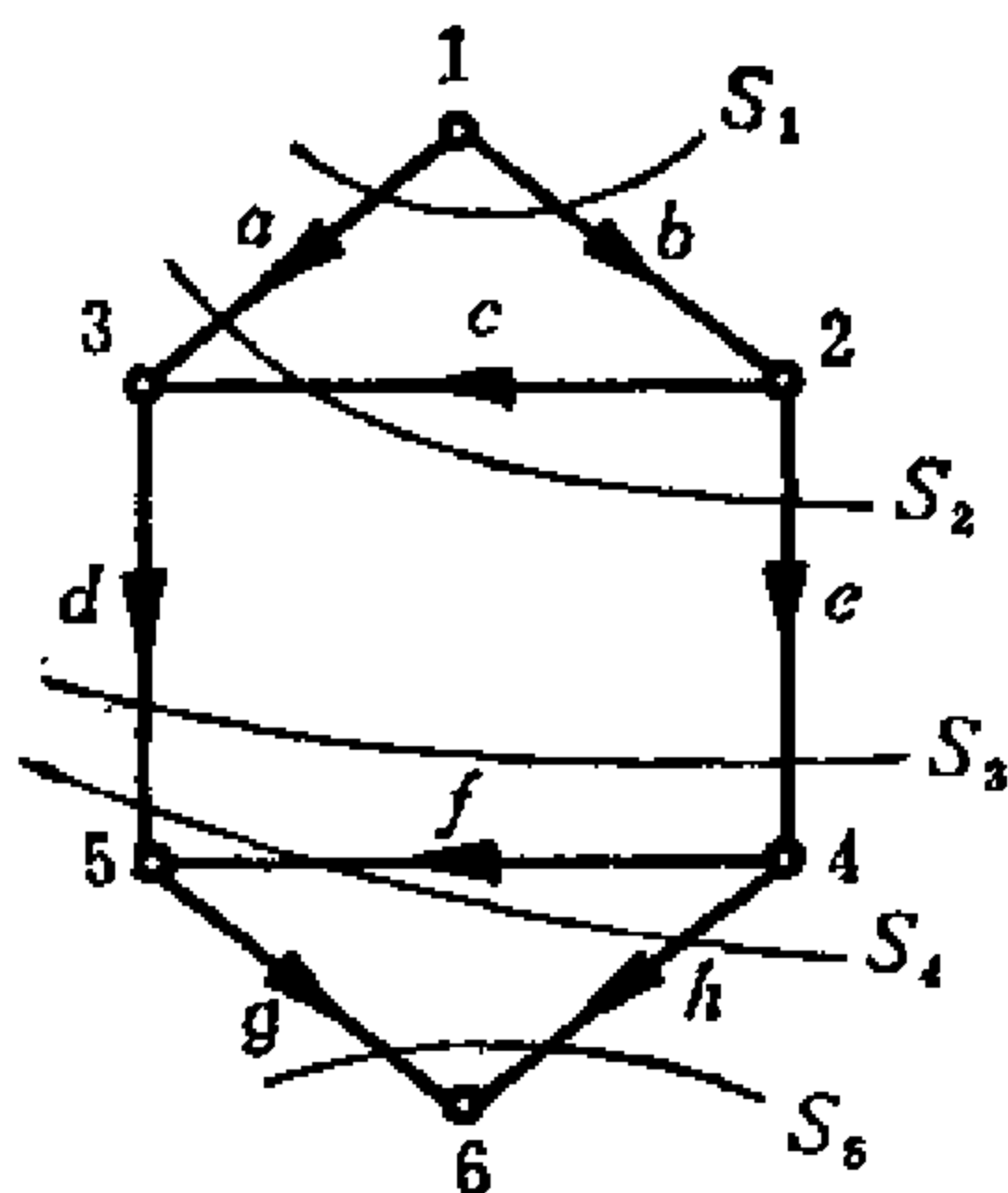


图14-2-9 不含有向回路的SEC图

当 E 中的边覆盖把 i 和 j 分离的所有线性无关的有向割集。

证明： 因为顶点的次序是唯一的，所以把 i 和 j 分离的线性无关的有向割集也是唯一确定的。如果在这些有向割集中有某一个不被 E 中的边覆盖，那么就有一些顶点不会被由 E 中的边所覆盖的那些割集中的任何一个分离开。据定理14-2-7， G 在 E 下不是1可辨的，这与假设矛盾。反过来，充分性也容易用反证法证明。 (证毕)

例14-2-5 考虑图14-2-10所示的从1到6的SEC图。因为这个SEC图顶点的次序是唯一的，故把1到6分离的线性无关的有向割集是 S_1, S_2, S_3, S_4 和 S_5 ，如图所示。根据定理14-2-12，为了使这个SEC图在集合 E 下是1可辨的，我们必须选择 E 的各边，使这些边把所有的有向割集覆盖。例如，集合 E 可以是 (a, d, g) 。

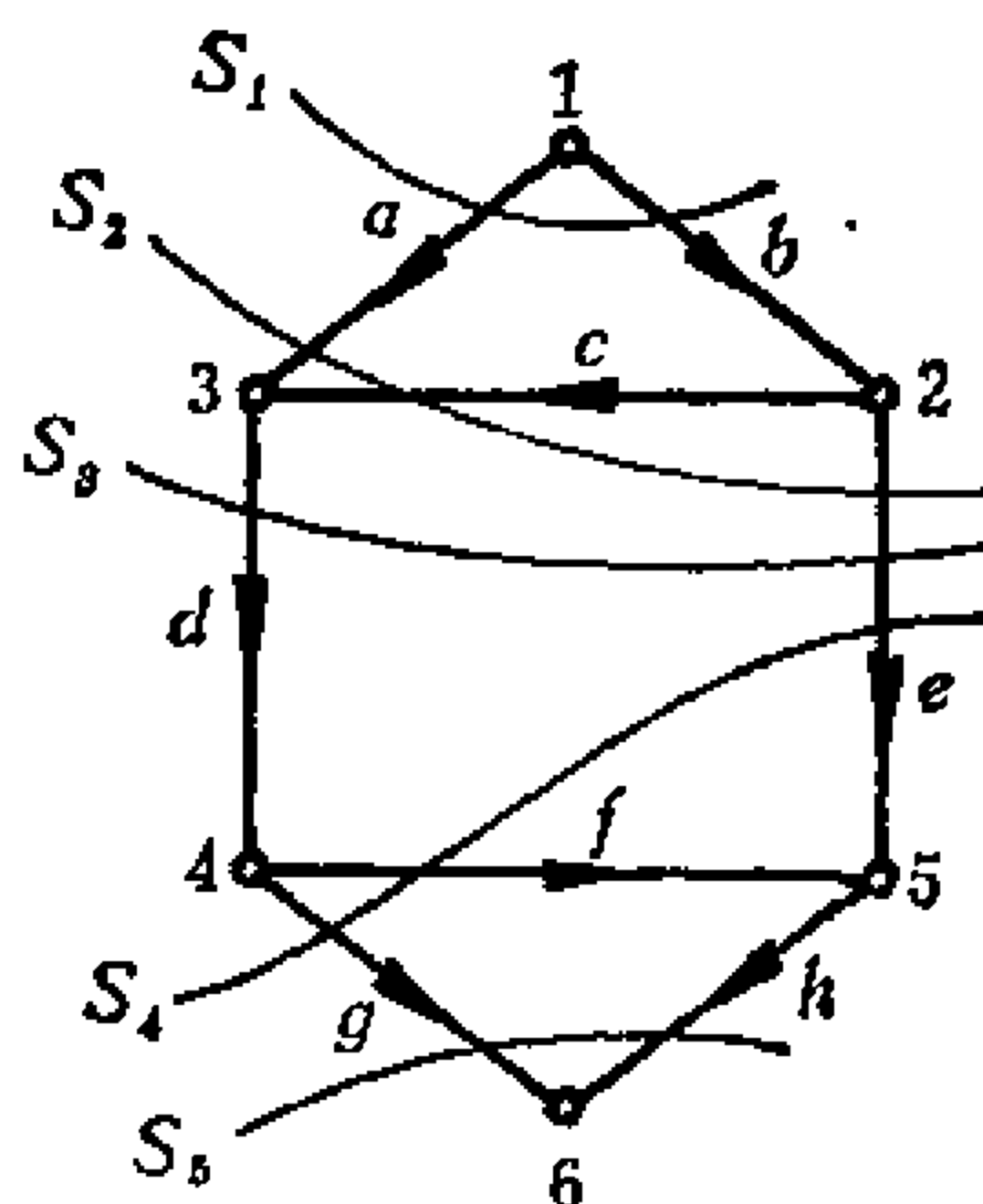


图14-2-10 SEC图

现在，我们已经知道， $n-1$ 个把 i 和 j 分离的线性无关的有向割集对于1分辨率来讲是非常重要的。如果一个从 i 到 j 的SEC图 G 在某些边集 E 下是1可辨的， G 中是否一定有 $n-1$ 个把 i 和 j 分离的线性无关的有向割集呢？答案是肯定的，理由由下面的定理给出。注意，据定理14-2-8，如果 G 没有有向回路， G 中就有 $n-1$ 个把 i 和 j 分离的线性无关的有向割集。

定理14-2-13 在一个从 i 到 j 的SEC图中，一个有向回路的顶点是不可辨的。

证明： 因为一个有向回路中的各边不可能都被包含在一个

有向割集中，所以一个有向回路中的顶点不可能被一个有向割集分离开，因此据定理14-2-7，这个定理是正确的。（证毕）

根据这个定理，如果一个SEC图包含有向回路，那么在集合 E 下就不是1可辨的。因此，我们说一个从 i 到 j 的SEC图是1可辨的，应有 $n-1$ 个把 i 和 j 分离的线性无关的有向割集。

当一个SEC图中顶点的次序是唯一的时，定理14-2-12给出了1分辨率的一个简单的充分必要条件，假如SEC图的顶点次序不是唯一的，那么 $n-1$ 个被集合 E 中的边所覆盖的线性无关有向割集变成了充分条件，但不是必要条件。

定理14-2-14 设 G 是具有 n 个顶点的从 i 到 j 的SEC图，如果把 i 和 j 分离的 $n-1$ 个线性无关的有向割集被集合 E 的边覆盖，则 G 在集合 E 下是1可辨的。

这个定理的证明可直接从定理14-2-11得到。为了说明上述条件不是必要的，我们考虑如图14-2-11所示的从 i 到 j 的SEC图。选择边集合 $E = (a, b, c)$ 。被 E 中的边覆盖的，把 i 和 j 分离的有向割集集体 $\{S\}$ 由 S_1, S_2, S_3 和 S_4 组成。其中

$$\begin{aligned} S_1 &= (1, 2, 3, a) = \mathcal{O}((i, v_1, v_2, v_3) \times (v_4, v_5, v_6, j)) \\ S_2 &= (4, 5, 6, b) = \mathcal{O}((i, v_1, v_4, v_5) \times (v_2, v_3, v_6, j)) \\ S_3 &= (7, 8, 9, c) = \mathcal{O}((i, v_3, v_5, v_6) \times (v_1, v_2, v_4, j)) \\ S_4 &= (a, b, c) = \mathcal{O}((i, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6) \times (j)) \end{aligned}$$

注意， S_1 和 S_4 由边 a 覆盖， S_2 和 S_4 由边 b 覆盖， S_3 和 S_4 由边 c 覆

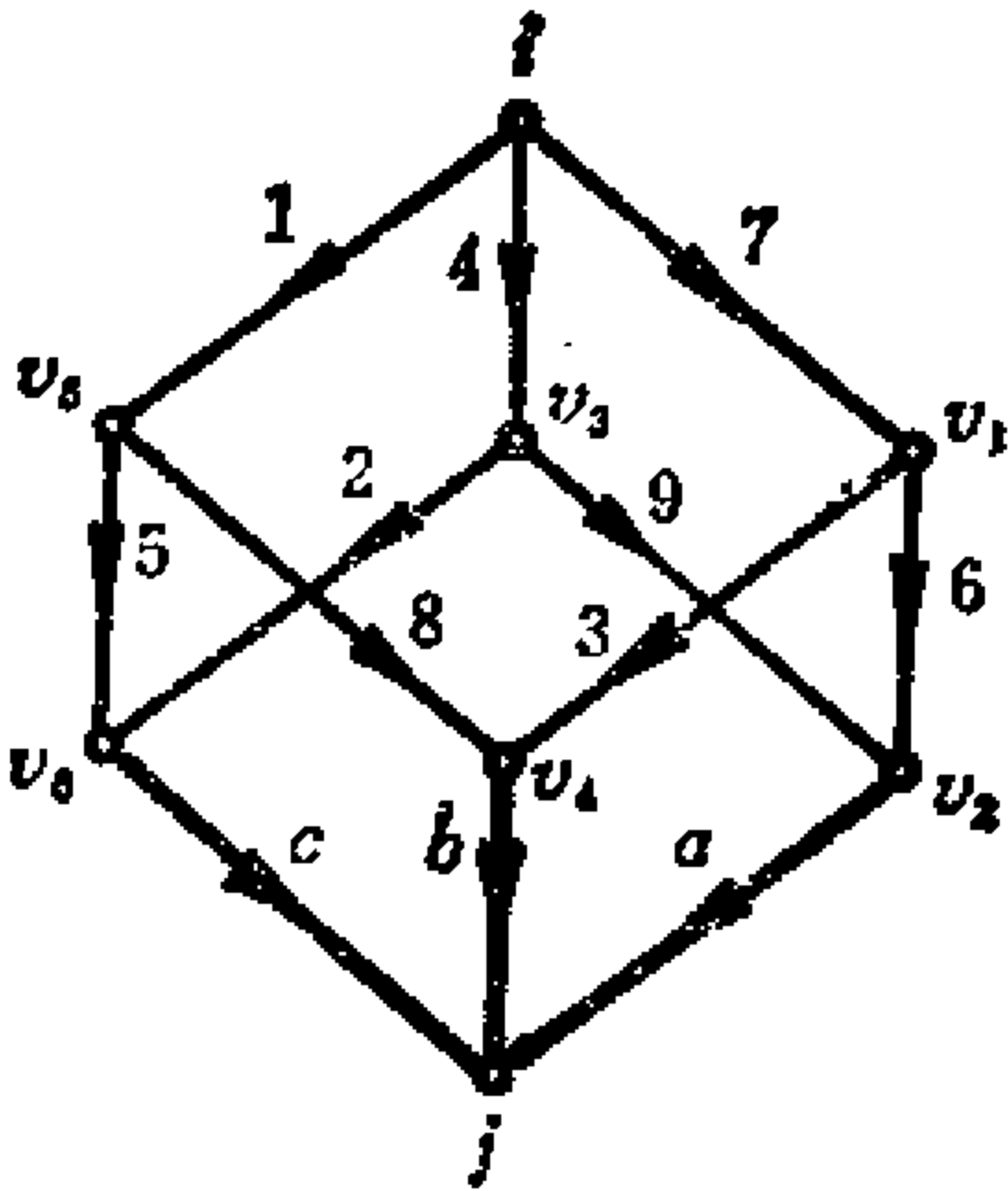


图14-2-11 SEC图G

盖。因为任意两个顶点都会被这四个有向割集的其中之一分离开，故据定理14-2-6，这个SEC图在 E 下是1可辨的。然而，集体 $\{S\}$ 并不包含所有的把 i 和 j 分离的线性无关的有向割集，并且 E 中的边显然不能把所有分离 i 和 j 的线性无关的有向割集覆盖。

当边集合 E 是一个有向割集时，1分辨率的条件变得如以下定理给出的那样，非常简单。

定理14-2-15 设 G 是从 i 到 j 的SEC图。假定边集 E 是 G 中的一个把 i 和 j 分离的有向割集，那么， G 在 E 下是1可辨的，当且仅当 G 中每一条边是在 $\{S\}$ 的一个割集中。这里 $\{S\}$ 是被 E 中的边所覆盖的，把 i 和 j 分离的所有的有向割集的集体。

注意，在上面给出的例子中，集合 E 是一个把 i 和 j 分离的有向割集，并且 G 中的每一条边都在集体 $\{S\}$ 的一个割集中，因此据定理14-2-15，SEC图 G 在 E 下是1可辨的。

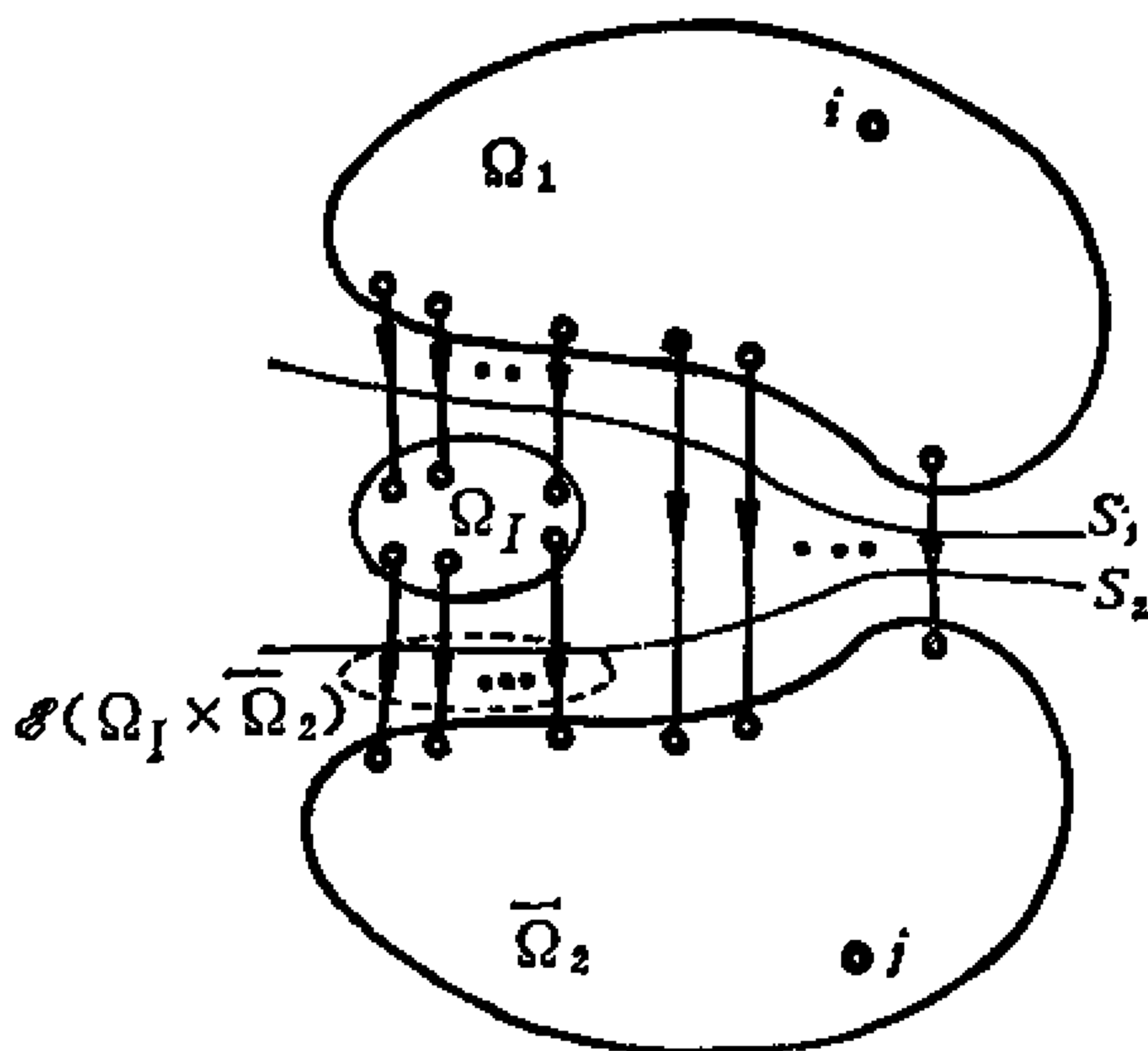
定理14-2-15的证明： 假定 G 在 E 下是1可辨的，则据定理14-2-6，每一条边必定至少在一个割集之中。因此，我们只要证明，当每条边都在 $\{S\}$ 的一个割集之中时， G 在 E 下是1可辨的。

假定 G 在 E 下不是1可辨的，则至少必有包含两个以上顶点的一个集合 Ω_i ，使得 Ω_i 中的顶点不会被 $\{S\}$ 中任何一个割集分离开。另一方面，每一条边至少在 $\{S\}$ 的一个有向割集中，因此，在 Ω_i 的顶点之间没有边相连。为了得到这样的集合 Ω_i ，在 $\{S\}$ 中一定有两个有向割集 $S_1 = \mathcal{S}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_1)$ 和 $S_2 = \mathcal{S}(\Omega_2 \times \bar{\Omega}_2)$ ，使得

$$i \in \Omega_1 \text{ 且 } j \in \bar{\Omega}_1, \quad i \in \Omega_2 \text{ 且 } j \in \bar{\Omega}_2$$

$$\Omega_i = \bar{\Omega}_1 \cap \Omega_2$$

如图14-2-12所示。注意 Ω_1 ， Ω_i 和 $\bar{\Omega}_2$ 都是无重点集合，它们包含了 G 的全部顶点。

图14-2-12 带有 Ω_1 的SEC图

注意到 S_2 中有一条边 e 在 E 中,如果 $\mathcal{E}(\Omega_i \times \bar{\Omega}_2)$ 的任何一边 e' 在 E 之中,那么就存在一个被边 e' 覆盖的有向割集把 Ω_i 分离开.因此在 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_2)$ 中没有属于集合 E 的边.同样,在 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_i)$ 中也没有属于集合 E 的边.但根据假设, E 是一个把 i 和 j 分离开的有向割集.我们知道, S 的边 e 在有向割集 E 中,位于 Ω_1 的一个顶点和 $\bar{\Omega}_2$ 的一个顶点之间.我们还知道, E 不可能分离 Ω_i 中的顶点,并且我们能看出, E 不可能分离 $\bar{\Omega}_2$ 中的任何顶点,也不能分离 Ω_1 中的任何顶点,这是因为 S_1 和 S_2 都是由 E 中的边所覆盖的有向割集.因此, E 不是 S_1 就是 S_2 .这就说明, E 或者包含 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \bar{\Omega}_2)$,或者包含 $\mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_i)$,从而产生矛盾.所以, G 中不存在这样的集合 Ω_i ,这就证明了定理. (证毕)

现在, 我们进一步研究找出故障点所需的实际测量有直接关系的可测量集. 设 $\{\Omega\}$ 是在集合 E 的所有边上指定的测试点所产

生的全部可测量集的集体。我们已经用从 $\{\Omega\}$ 得到的 D 划分中的集合来定义 SEC 图的 1 分辨率。当我们研究 $\{\Omega\}$ 中的可测量集时，我们会看到，在 $\{\Omega\}$ 中有一些真子集体 $\{\Omega'\}$ ，从 $\{\Omega'\}$ 得到的 D 划分和从 $\{\Omega\}$ 得到的 D 划分相同。例如，考虑图 14-2-13 中的 SEC 图 G 。设 $E = (a, b)$ ，则 $\{\Omega\}$ 包括 $\Omega(i \times a^+) = (i)$ ， $\Omega(a^- \times j) = (1, 2, j)$ ， $\Omega(i \times b^+) = (i, 2)$ ， $\Omega(b^- \times j) = (j)$ 以及 $\Omega(a^- \times b^+) = (2)$ 。由上述可测量集得到的 D 划分中的非零集合为

$$\begin{aligned} \Omega(i \times a^+) \cap \overline{\Omega(a^- \times j)} \cap \Omega(i \times b^+) \cap \overline{\Omega(b^- \times j)} \cap \overline{\Omega(a^- \times b^+)} &= (i) \\ \overline{\Omega(i \times a^+)} \cap \Omega(a^- \times j) \cap \Omega(i \times b^+) \cap \overline{\Omega(b^- \times j)} \cap \overline{\Omega(a^- \times b^+)} &= (2) \\ \overline{\Omega(i \times a^+)} \cap \Omega(a^- \times j) \cap \overline{\Omega(i \times b^+)} \cap \Omega(b^- \times j) \cap \overline{\Omega(a^- \times b^+)} &= (j) \\ \overline{\Omega(i \times a^+)} \cap \Omega(a^- \times j) \cap \overline{\Omega(i \times b^+)} \cap \overline{\Omega(b^- \times j)} \cap \overline{\Omega(a^- \times b^+)} &= (1) \end{aligned}$$

只用 $\Omega(i \times a^+)$ ， $\Omega(i \times b^+)$ 和 $\Omega(b^- \times j)$ 也可以得到同样的 D 划分。这就说明，我们只要对相应的 $\Omega(i \times a^+)$ ， $\Omega(i \times b^+)$ 和 $\Omega(b^- \times j)$ 作三次测量，而不须时 $\{\Omega\}$ 中相应的所有非空可测量集作五次测量，就能获得诊断所必需的全部信息。为了研究诊断所必需的测量次数，我们定义 $\{\Omega\}$ 的生成元如下。

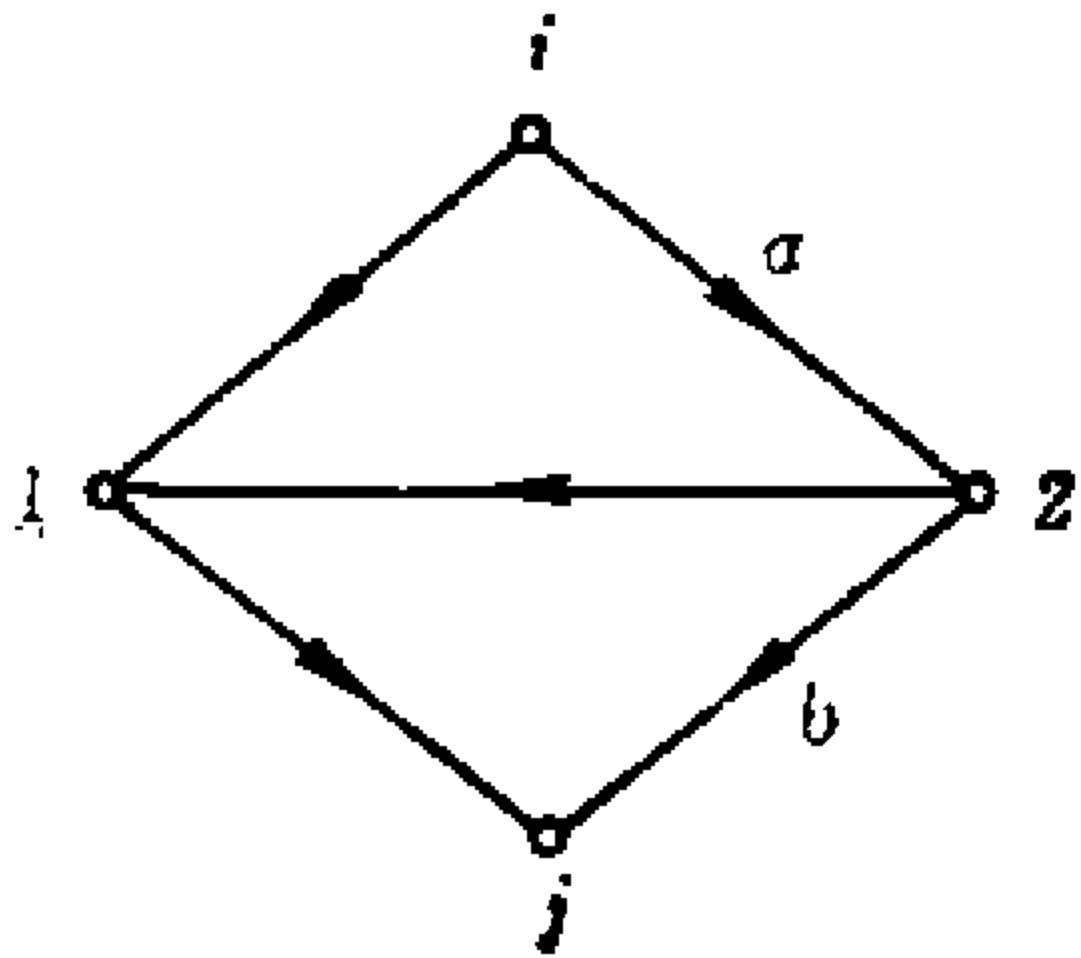


图14-2-13 SEC图G

定义14-2-8 设 $\{\Omega\}$ 是由集合 E 产生的所有可测量集的集体，又设 $\{\Omega'\}$ 是 $\{\Omega\}$ 的一个子集体。如果：(1)从 $\{\Omega\}$ 得到的 D 划分与由 $\{\Omega'\}$ 形成的 D 划分相同；(2)从 $\{\Omega'\}$ 的任何一个真子集体得到的 D 划分都与从 $\{\Omega\}$ 形成的 D 划分不同；则称 $\{\Omega'\}$ 是 $\{\Omega\}$ 的生成元集体。

在上面的例子中，由图14-2-13中的 SEC 图 G 的边集合 $E = (a, b)$ 产生的非零可测量集体 $\{\Omega\}$ 是

$$\{\Omega\} = \{\Omega(i \times a^+), \Omega(a^- \times j), \Omega(i \times b^+), \Omega(b^- \times j), \Omega(a^- \times b^+)\}$$

由 $\{\Omega\}$ 形成的 D 划分是

$$\{D\} = \{(i), (2), (j), (1)\}$$

$\{\Omega\}$ 的一个子集体 $\{\Omega(i \times a^+), \Omega(i \times b^+), \Omega(b^- \times j)\}$ 也给出同样的 D 划分. 但是, $\{\Omega(i \times a^+), \Omega(i \times b^+), \Omega(b^- \times j)\}$ 的任何一个真子集体再不会给出同样的 D 划分. 因此, $\{\Omega(i \times a^+), \Omega(i \times b^+), \Omega(b^- \times j)\}$ 是 $\{\Omega\}$ 的生成元集体.

对于一个给定的 $\{\Omega\}$, 可能会有许多生成元集体. 并且, $\{\Omega\}$ 的每一个生成元集体中的集合数目不一定相同. 因为每一个可测量集对应诊断用的一次测量, 并且 $\{\Omega\}$ 的一个生成元集体给出所需要的一个 D 划分, 而诊断所需的测量次数与 $\{\Omega\}$ 的一个生成元集体中的集合数目相同.

利用生成元的定义, 我们得到一个新定理.

定理14-2-16 对于从 i 到 j 的SEC图的一个集合 $E = (e_1, e_2, \dots, e_k)$, 由可测量集 $\Omega(i \times e_p^+)$ 和 $\Omega(e_p^- \times j)$ 组成的集体包含着 $\{\Omega\}$ 的一个生成元集体, 其中 $p = 1, 2, \dots, k$.

证明: 因为在 $\{\Omega\}$ 中的任何一个可测量集是 $\Omega(i \times e_p^+)$, $\Omega(e_p^- \times j)$ 和 $\Omega(e_p^- \times e_q^+)$ 中的一个, 所以要证明的是, 要得到 $\{\Omega\}$ 的生成元集体, 并不需要集合 $\Omega(e_p^- \times e_q^+)$. 根据可测量集的定义, $\Omega(e_p^- \times e_q^+)$ 是这样一个顶点集合, 它们至少在一个 $M(e_p^- \times e_q^+)$ 类的一个连通有向 M 图中. 另一方面, $\Omega(i \times e_q^+)$ 是由这样的顶点构成的, 这些顶点至少在 $M(i \times e_q^+)$ 的一个连通有向 M 图中. 并且我们知道, 在一个从 i 到 j 的SEC图中, 从 i 到 $v(e_p^-)$ 有一条有向路径. 因此, 对于 $M(e_p^- \times e_q^+)$ 类的连通有向 M 图中的任一顶点 v , 有一个 $M(i \times e_q^+)$ 类的连通有向 M 图包含 v . 所以

$$\Omega(e_p^- \times e_q^+) \subset \Omega(i \times e_q^+) \quad (14-2-4)$$

$$\Omega(e_p^- \times e_q^+) \subset \Omega(e_p^- \times j) \quad (14-2-5)$$

故
$$\Omega(e_p^- \times e_q^+) \subset \Omega(i \times e_q^+) \cap \Omega(e_p^- \times j) \quad (14-2-6)$$

设 v' 是 $\Omega(i \times e_q^+) \cap \Omega(e_p^- \times j)$ 中的一个顶点, 则有一个 $M(e_p^- \times v')$ 类的连通有向 M 图, 还有一个 $M(v' \times e_q^+)$ 类的连通有向 M 图. 这样, 有一个 $M(e_p^- \times e_q^+)$ 类的连通有向 M 图包含 v' . 所以由式14-2-6得

$$\Omega(e_p^- \times e_q^+) = \Omega(i \times e_q^+) \cap \Omega(e_p^- \times j) \quad (14-2-7)$$

因此, 如果一个集体已包含 $\Omega(i \times e_q^+)$ 和 $\Omega(e_p^- \times j)$, 那么就不必在该集体中具备 $\Omega(e_p^- \times e_q^+)$, 以及包含 $\{\Omega\}$ 的生成元的集体. 以此类似, 我们能证明在 $\{\Omega\}$ 的生成元集体中, $\Omega(e_p^- \times e_q^+)$, $\Omega(e_p^- \times e_q^-)$ 和 $\Omega(e_p^+ \times e_q^-)$ 也是不必要的. (证毕)

定理14-2-17 如果集合 E 的一条边 e 覆盖着一个有向割集, 则仅有 $\Omega(i \times e^+)$ 和 $\Omega(e^- \times j)$ 之一, 可以在 $\{\Omega\}$ 的生成元集体之中.

证明: 因为边 e 只覆盖一个有向割集, 所以 $\Omega(i \times e^+) \supset \Omega(e^- \times j)$ 是所有顶点的集合. 因此

$$\Omega(i \times e^+) = \overline{\Omega(e^- \times j)} \quad (14-2-8)$$

此式说明, 构成一个 D 划分只需要这两个可测量集中的一个.

(证毕)

例如, 考虑例14-2-2中图14-2-3所示的SEC图. 如果集合 $E = (b, h)$, 那么边 b 只覆盖一个有向割集 $S = (a, b)$. 可以看出,

$$\Omega(1 \times b^+) = (1), \quad \Omega(b^- \times 6) = (2, 3, 4, 5, 6)$$

这就说明, $\Omega(1 \times b^+) = \overline{\Omega(b^- \times 6)}$. 另一方面, 边 h 覆盖两个有向割集 $S_1(h)$ 和 $S_2(h)$. 与 h 相伴的可测量集是

$$\Omega(1 \times h^+) = (1, 2, 4) \text{ 和 } \Omega(h^- \times 6) = (6)$$

我们可以清楚地看到, $\{\Omega\}$ 的一个生成元集体是

$$\{\Omega(1 \times b^+), \Omega(1 \times h^+), \Omega(h^- \times 6)\}$$

从这个定理, 我们可以得到定理14-2-18.

定理14-2-18 对于集合 $E = (e_1, e_2, \dots, e_k)$, 在 $\{\Omega\}$ 的一个生成元集体中, 集合的数目不超过 $2k$.

14-3 测 试 门

在上节中，我们看到了，当SEC图中有回路时，就不能得到1分辨率。所以，对于这种SEC图，要想得到1分辨率，就不能用测试点的方法，而需要采用一些器件。这种器件就是下面定义的测试门。

定义14-3-1 给边 e 指定测试门，意思是在需要时边 e 可被删去。

例如，如果我们指定一个测试门给图14-3-1中SEC图的边 e ，那么利用测试门可将可测量集 $\Omega(i \times j) = (i, j, 1, 2)$ 变成 $(i, 2, j)$ 。也就是说，我们可以利用测试门把 G 变成图14-3-2所示的图。

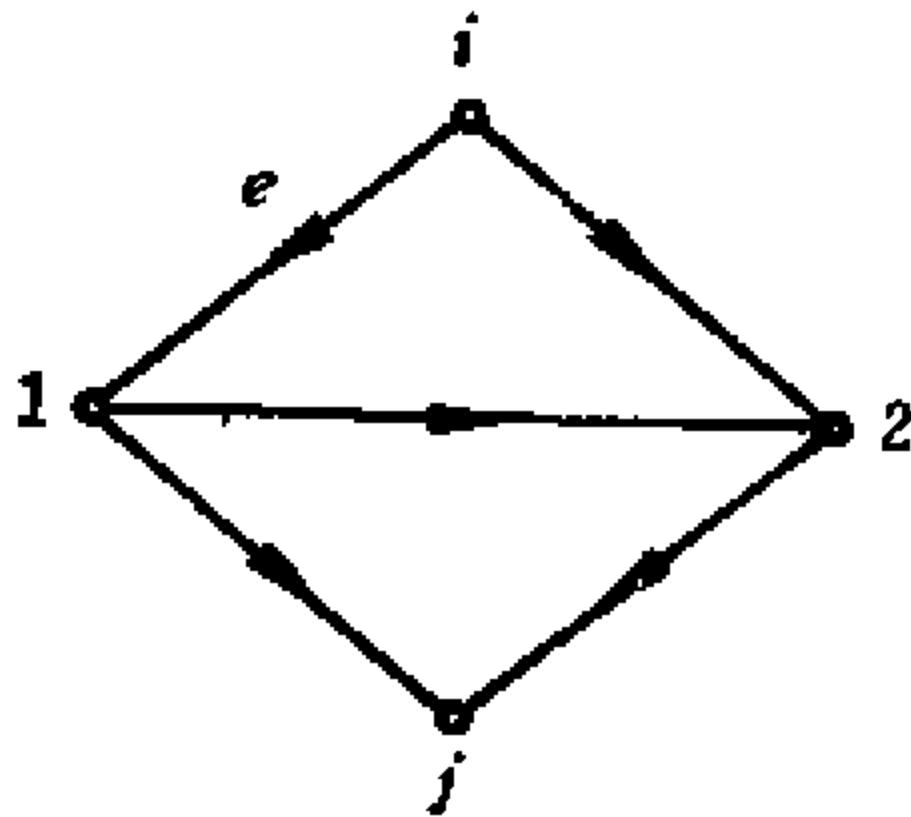


图14-3-1 SEC图 G

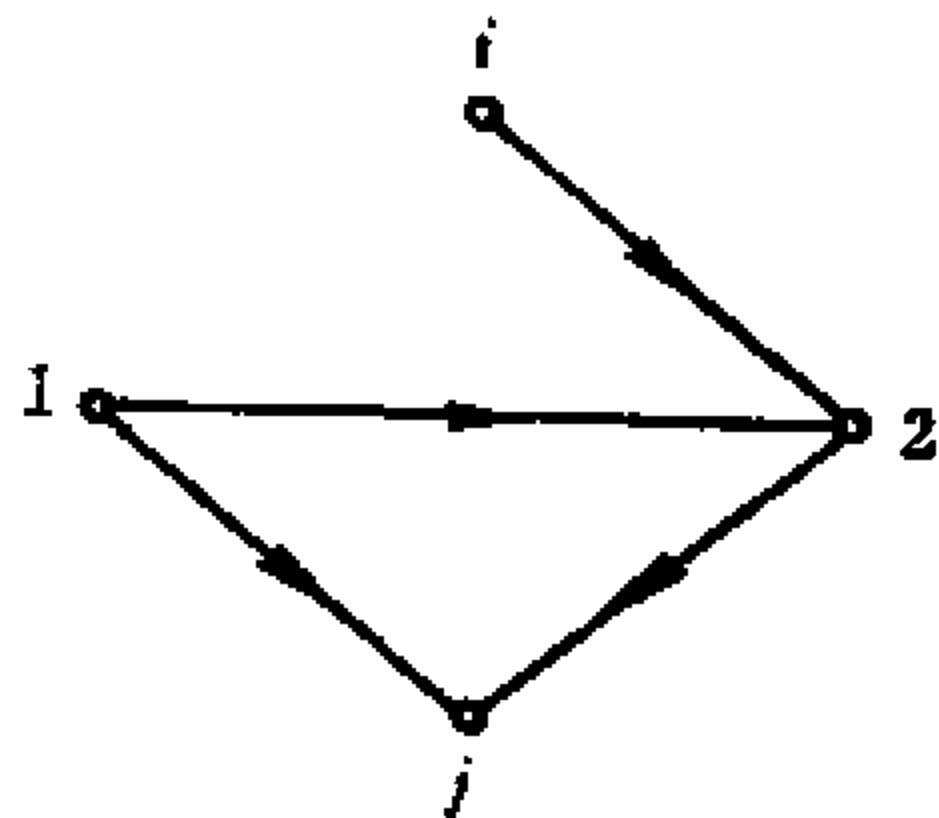


图14-3-2 把测试门指定给边 e 后所得的图

为了说明测试门对可测量集的影响，我们用一个下标 E ，比如说用 $\Omega(i \times j)_E$ 来表示指定给 E 中的边的测试门在起作用。

定义14-3-2 符号 $\Omega(i \times j)_E$ 表示删去集合 E 中所有的边所得到的子图的一个可测量集。

当我们把测试门指定给集合 E 的所有边时，选取测试门正工作的不同边，就产生出几个可测量集。换句话说，我们删去 E 中

某些边，可以得到不同的可测量集。

例14-3-1 考虑图14-3-3所示的 SEC 图。假定 $E = (e_1, e_2, e_3, e_7)$ ，那么我们有以下可测量集：

$$\begin{aligned} \Omega(i \times j)_{e_1 e_2 e_3} &= \Omega(i \times j)_{e_1 e_2} = \Omega(i \times j)_{e_3} = (i, v_2, v_3, j) \\ \Omega(i \times j)_{e_7} &= (i, v_1, v_2, j) \\ \Omega(i \times j)_{e_3 e_7} &= \Omega(i \times j)_{e_1 e_2 e_7} \\ &= \Omega(i \times j)_{e_1 e_2 e_3 e_7} = (i, v_2, j) \end{aligned}$$

为了研究测试门的性质，我们考虑一个只用测试门的 SEC 图。为简便起见，我们采用以下定义。

定义14-3-3 门集合 E 的可测量集是指，在集合 E 中所有的边上都指定测试门所产生的所有可能的可测量集。

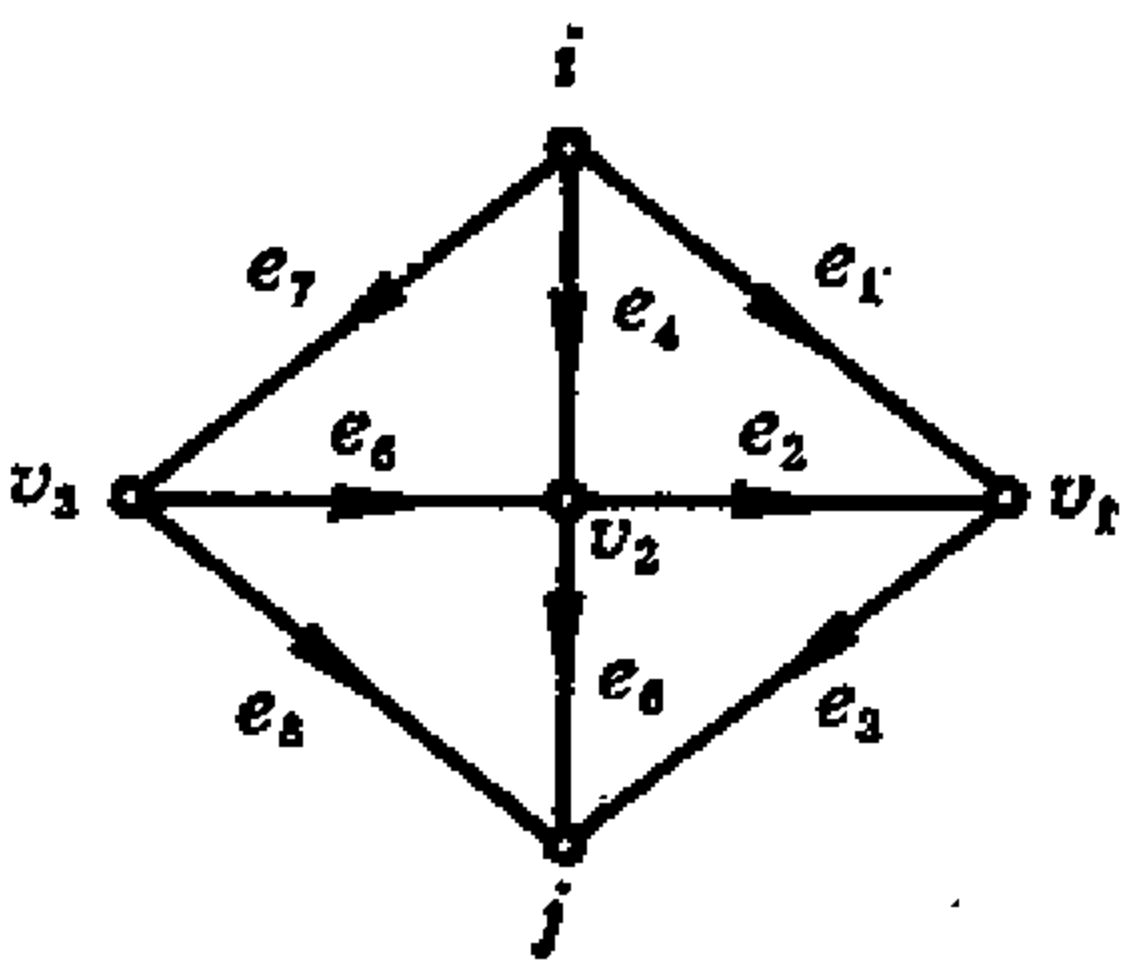


图14-3-3 SEC图G

在例14-3-1中，可测量集 $\Omega(i \times j)_{e_3}$ ， $\Omega(i \times j)_{e_7}$ 和 $\Omega(i \times j)_{e_1 e_2 e_7}$ 就是门集合 (e_1, e_2, e_3, e_7) 的可测量集。

对测试门不起作用的各边，作所有可能的选择，就得到下述定理。

定理14-3-1 门集合 E 的各种不同的可测量集的数目不超过 $2^k - 1$ 个，这里 k 是集合 E 中边的数目。

考虑从 i 到 j 的 SEC 图的可测量集 $\Omega(i \times j)_E$ 。对于 E 的每一个真子集 E' ，假定 $\Omega(i \times j)_E$ 和 $\Omega(i \times j)_{E'}$ 不同，那么我们说， E 是关于 $\Omega(i \times j)_E$ 的最小集合。例如，在例 14-3-1 中，考虑 $E = (e_1, e_2, e_3, e_7)$ ，我们有 $\Omega(i \times j)_E = (i, v_2, j)$ 。可是，由 E 的真子集 $E' = (e_3, e_7)$ ，我们有 $\Omega(i \times j)_{E'}$ 等于 $\Omega(i \times j)_E$ 。因此， E 不是关于 $\Omega(i \times j)_E$ 的最小集合。我们可以看出， E' 是关于 $\Omega(i \times j)_{E'}$ 的最小集合。

在例14-3-1中,

$$\Omega(i \times j)_{e_3, e_7} = \Omega(i \times j)_{e_1, e_2, e_7} = (i, v_2, j)$$

这里, (e_3, e_7) 和 (e_1, e_2, e_7) 都是关于 (i, v_2, j) 的最小集合. 这个例子说明, 关于一个可测量集的最小集合不是唯一的, 然而, 最小集合有一个有趣的性质, 这由以下定理给出.

定理14-3-2 设在从 i 到 j 的SEC图 G 中, E 是关于 $\Omega(i \times j)_E (\neq \phi)$ 的最小集合, 则从 G 中删去 E 的所有边得到的图是连通的.

证明: 设 G' 是从 G 中删去 E 的所有边得到的图. 假定 G' 是分离的, 设 G'_1 和 G'_2 是 G' 的子图, 使得 $\Omega(G'_1) = \Omega(i \times j)_E$, 且 G'_1 和 G'_2 之间不连通. 注意 G 的 $\Omega(i \times j)_E$ 等于 G' 的 $\Omega(i \times j)_E$. 设 v 是 G'_2 的一个顶点. 因为 G 是从 i 到 j 的SEC图, 至少存在一个 $M(i \times j)$ 类的连通有向 M 图, 它包含 G'_2 中顶点 v , 所以这个 M 图中至少有两边 e_1 和 e_2 既不在 G'_1 中, 又不在 G'_2 中. 如图14-3-4所示. 我们容易看出, 把 e_1 添加到 G' 中, 所得图的 $\Omega(i \times j)$ 与 G' 的 $\Omega(i \times j)$

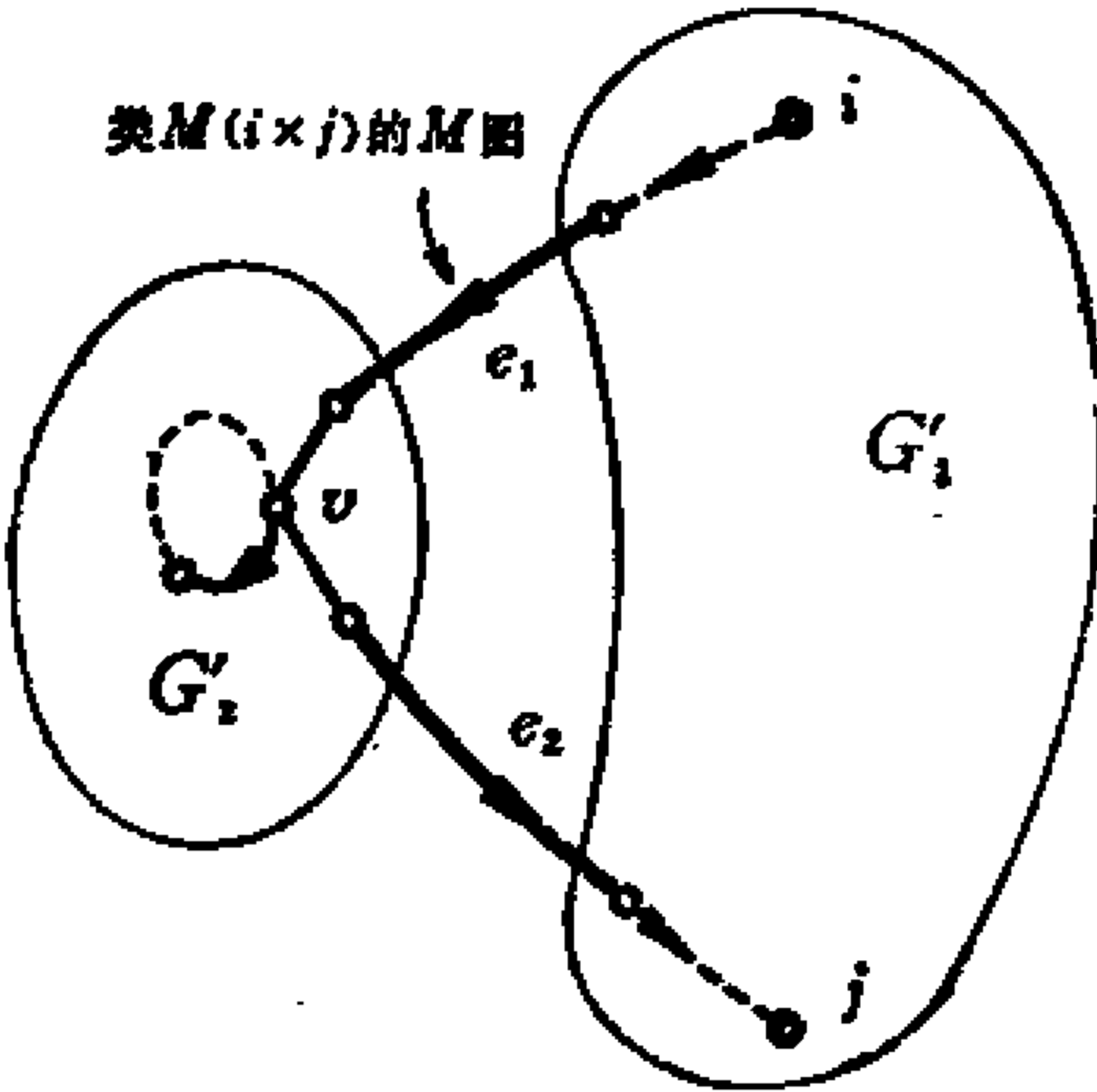


图14-3-4 G'_1, G'_2 和路径 P

相同。这就表明，在 G 中 $\Omega(i \times j)_E = \Omega(i \times j)_{E'}$ ，这里 $E' = E - (e_1)$ 。因此 E 不是关于 $\Omega(i \times j)_E$ 的最小集合。这与假设 E 是关于 $\Omega(i \times j)_E$ 的最小集合相矛盾，于是定理得到证明。（证毕）

在门集合 E 的可测量集的集体中，我们可以象上一节那样得到一个 D 划分。例如，在门集合 $E = (e_1, e_2, e_3, e_7)$ 的可测量集 $\Omega(i \times j)_{e_3}$ ， $\Omega(i \times j)_{e_7}$ 和 $\Omega(i \times j)_{e_3 e_7}$ 的集体中，我们可以得到 D 划分为

$$\begin{aligned}\Omega(i \times j)_{e_3} \cap \Omega(i \times j)_{e_7} \cap \Omega(i \times j)_{e_3 e_7} &= (i, v_2, j) \\ \Omega(i \times j)_{e_3} \cap \Omega(i \times j)_{e_7} \cap \overline{\Omega(i \times j)_{e_3 e_7}} &= \phi \\ \Omega(i \times j)_{e_3} \cap \overline{\Omega(i \times j)_{e_7}} \cap \Omega(i \times j)_{e_3 e_7} &= \phi \\ \Omega(i \times j)_{e_3} \cap \overline{\Omega(i \times j)_{e_7}} \cap \overline{\Omega(i \times j)_{e_3 e_7}} &= (v_3) \\ \overline{\Omega(i \times j)_{e_3}} \cap \Omega(i \times j)_{e_7} \cap \Omega(i \times j)_{e_3 e_7} &= \phi \\ \overline{\Omega(i \times j)_{e_3}} \cap \Omega(i \times j)_{e_7} \cap \overline{\Omega(i \times j)_{e_3 e_7}} &= (v_1) \\ \overline{\Omega(i \times j)_{e_3}} \cap \overline{\Omega(i \times j)_{e_7}} \cap \Omega(i \times j)_{e_3 e_7} &= \phi \\ \overline{\Omega(i \times j)_{e_3}} \cap \overline{\Omega(i \times j)_{e_7}} \cap \overline{\Omega(i \times j)_{e_3 e_7}} &= \phi\end{aligned}$$

注意，这里的可测量集 $\Omega(i \times j)_E$ 具有和上一节相同的性质，也就是说，在指定给 E 中的边的全部测试门起作用的情况下，当我们把一个信号从顶点 i 注入时，在顶点 j 监视到的信号只通过 $\Omega(i \times j)_E$ 中的那些顶点。因此，上一节中关于可测量集的所有性质都可以应用于可测量集 $\Omega(i \times j)_E$ 。例如，在从 i 到 j 的SEC图 G 中，如果存在一对顶点 v_r 和 v_l ，在门集合 E 的所有可测量集集体中，每一个可测量集均包含 v_r 和 v_l 时， G 就不是1可辨的（定理14-2-6）。因为在门集合 E 的可测量集集体中，每一个可测量集 $\Omega(i \times j)_E$ 包含 i 和 j 两个顶点，所以从 i 到 j 的SEC图在任何门集合 E 下不是1可辨的，当然，如果我们忽略掉顶点 i 或者顶点 j ，有些SEC图在某些门集合下也能是1可辨的。为了研究这样的SEC图和门集合，我们需要另一个定义。

定义14-3-4 对于从 i 到 j 的SEC图 G ，如果在不考虑顶点

j 的情况下, G 在集合 E 下是 1 可辨的, 则称 G 在门集合 E 下是 1- (i, j) 可辨的。

例14-3-2 对图 14-3-5 中从 1 到 4 的 SEC 图 G , 取门集合 $E = (b, d)$, E 的可测量集为

$$\Omega(1 \times 4)_b = (1, 2, 4)$$

$$\Omega(1 \times 4)_d = (1, 3, 4)$$

$$\Omega(1 \times 4)_{b,d} = \phi$$

这些可测量集的 D 划分由以下集合组成:

$$\Omega(1 \times 4)_b \cap \Omega(1 \times 4)_d = (1, 4)$$

$$\Omega(1 \times 4)_b \cap \overline{\Omega(1 \times 4)_d} = (2)$$

$$\overline{\Omega(1 \times 4)_b} \cap \Omega(1 \times 4)_d = (3)$$

$$\overline{\Omega(1 \times 4)_b} \cap \overline{\Omega(1 \times 4)_d} = \phi$$

如果我们不考虑顶点 4, 则上述 D 划分中每一个集合最多包含一个顶点。这样, 如果我们忽略顶点 4, G 在 E 下是 1 可辨的。于是, G 在 E 下是 1- $(1, 4)$ 可辨的。

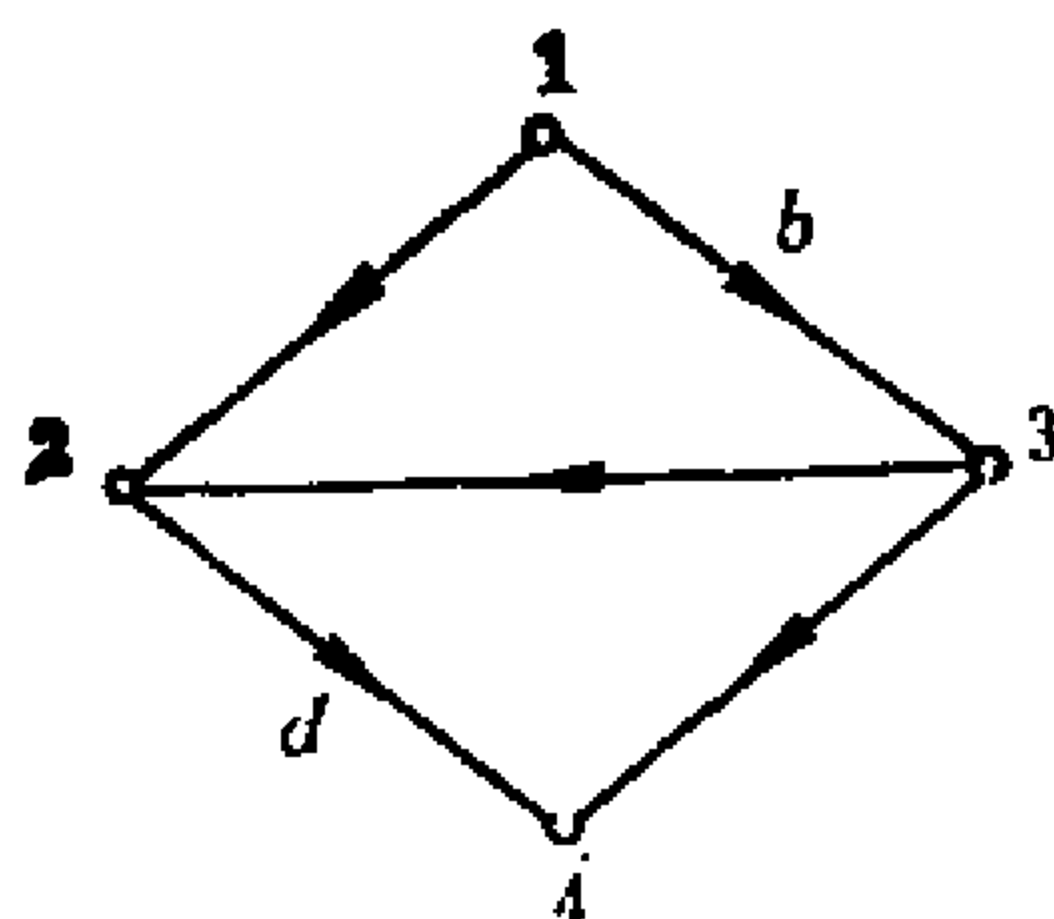


图14-3-5 SEC图G

利用以上定义, 我们可将定理14-2-6修改如下, 使它可以应用于测试门的情况。

定理14-3-3 设 G 是一个从 i 到 j 的 SEC 图, E 是一个边集。又设 $\{\Omega\}$ 是对 E 中所有的边指定的测试门所产生的所有可测量集的集体, 那么, 当且仅当对于 G 中每一对顶点 v_r 和 v_s , 在不考虑顶点 j (即 $v_r \neq j, v_s \neq j$) 的情况下, 存在一个可测量集 $\Omega \in \{\Omega\}$, 使得 Ω 不同时包含二者, 仅包含 v_r 或 v_s 之一时, G 是在 E 下 1- (i, j) 可辨的。

这个定理的证明与定理14-2-6的证明几乎是完全相同的。

在例14-3-2的图14-3-5中, SEC图 G 中由集合 $E = (b, d)$ 所

产生的可测量集集体 $\{\Omega\}$ 为

$$\{\Omega\} = \{\Omega(1 \times 4)_b, \Omega(1 \times 4)_d\} = \{(1, 2, 4), (1, 3, 4)\}$$

所以，对于除顶点 4 外，我们所选择的任何一对顶点，在 $\{\Omega\}$ 中总有一个可测量集，它只包含这一对顶点中的一个。于是据定理 14-3-3， G 是在 (b, d) 下 1- (i, j) 可辨的。

我们还记得，一个把 i 和 j 分离的半割可以用 $\mathcal{S}(\Omega_i \times \bar{\Omega}_j)$ 来表示，其中 $i \in \Omega_i, j \in \bar{\Omega}_j$ 。现在，如果 $\mathcal{S}(\bar{\Omega}_i \times \Omega_j) = \phi$ ，那么半割 $\mathcal{S}(\Omega_i \times \bar{\Omega}_j)$ 就变成了分离 i 和 j 的有向割集。我们从下一个定理中将会看到，这样的半割对于 1- (i, j) 分辨率是很重要的。

定理 14-3-4 设 G 是从 i 到 j 的 SEC 图，在 i 和 j 之间没有边直接相连，如果一个门集合 E 不含分离 i 和 j 的半割作为子集，则 G 在门集合 E 下不是 1- (i, j) 可辨的。

证明：因为 E 不含分离 i 和 j 的半割作为子集，所以存在一条从 i 到 j 的，不包含 E 中的边的有向路径 P 。根据假设， G 中没有直接连接 i 和 j 的边，所以路径 P 一定至少包含 i 和 j 元外的另一顶点 v ，这样， E 的每一个可测量集都包含顶点 v 以及 i 和 j ，由定理 14-2-6，即使不考虑顶点 j ， G 也不是 1 可辨的，故 G 在门集合 E 下不是 1- (i, j) 可辨的。
(证毕)

例 14-3-3 考虑图 14-3-6 中从 i 到 j 的 SEC 图 G ，设门集合 $E = (1, 4, 6)$ 。因为 $(1, 4, 6)$ 不包含分离 i 和 j 的半割，所以据定理 14-3-4， G 在 $(1, 4, 6)$ 下不是 1- (i, j) 可辨的。现在，我们来检验这个结论。

门集合 $(1, 4, 6)$ 的可测量集

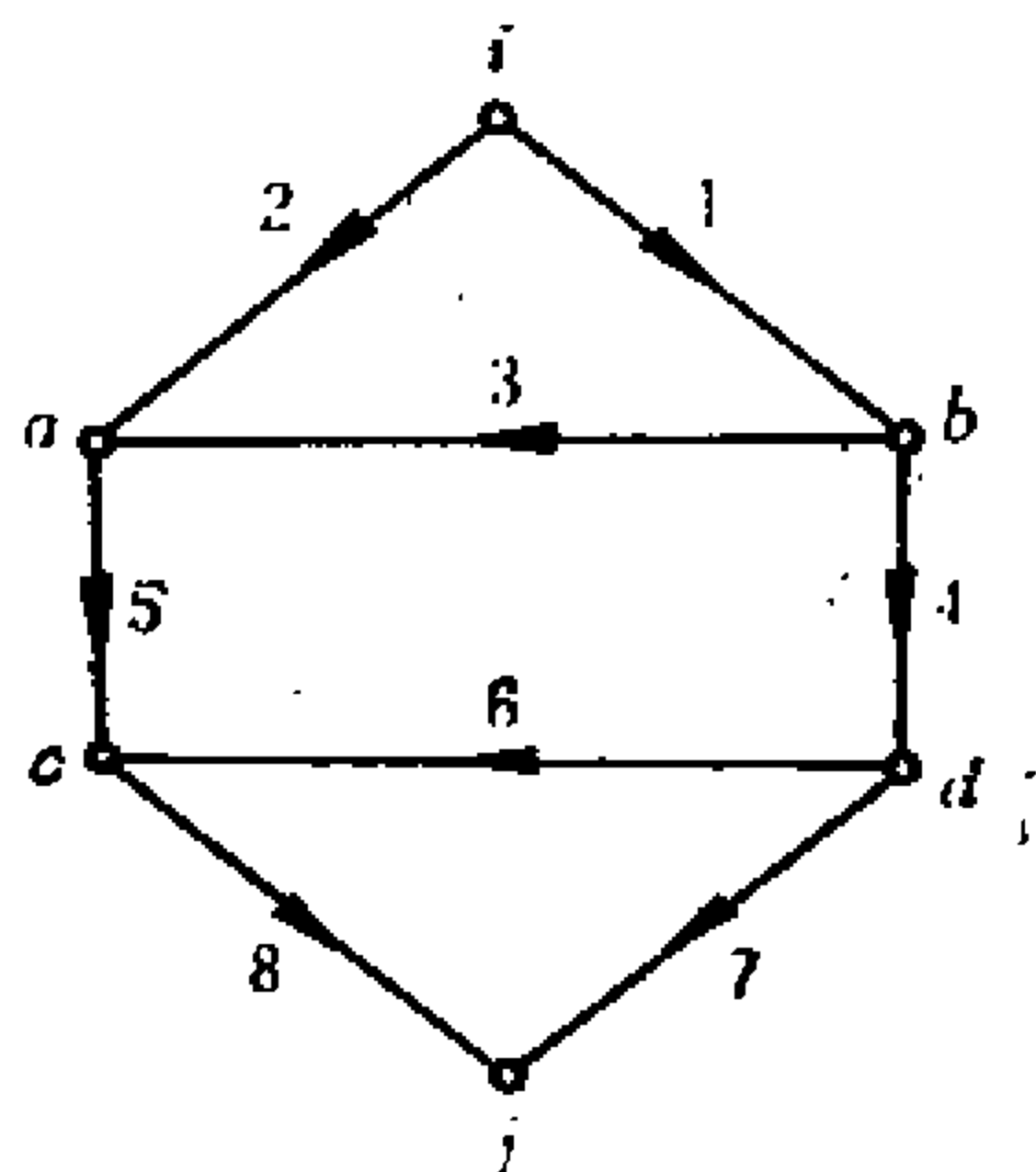


图 14-3-6 SEC 图 G

是

$$\Omega(i \times j)_1 = \Omega(i \times j)_{14} = \Omega(i \times j)_{16} = \Omega(i \times j)_{146} = (i, a, c, j)$$

$$\Omega(i \times j)_8 = (i, a, b, c, d, j)$$

$$\Omega(i \times j)_4 = \Omega(i \times j)_{48} = (i, a, b, c, j)$$

这些可测量集的 D 划分中包含一个集合 D ,

$$D = \Omega(i \times j)_1 \cap \Omega(i \times j)_4 \cap \Omega(i \times j)_8 = (i, a, c, j)$$

因此, G 在门集合 $(1, 4, 6)$ 下不是 $1-(i, j)$ 可辨的。

根据定理14-3-4, 要使一个SEC图在 E 下是 $1-(i, j)$ 可辨的, 集合 E 必须包含一个从 i 到 j 的半割。因此, 为了研究能给出 $1-(i, j)$ 可辨集合的边集合 E , 我们假设 E 本身是一个有向割集 $S = \mathcal{S}(\Omega_i \times \bar{\Omega}_j)$, 其中 $i \in \Omega_i, j \in \bar{\Omega}_j$. 设 $E = (e_1, e_2, \dots, e_k)$, 如果我们从SEC图 G 中删去 E 中除 $e_p (1 \leq p \leq k)$ 外的所有的边, 那么从 i 顶点注入, 在 j 顶点监测到的测试信号一定经过边 e_p . 这就导出了如下定理。

定理14-3-5 设 G 是从 i 到 j 的SEC图. 设 $E = (e_1, e_2, \dots, e_k)$ 是一个有向割集 $\mathcal{S}(\Omega_i \times \bar{\Omega}_j)$, 其中 $i \in \Omega_i, j \in \bar{\Omega}_j$. 则对 $p = 1, 2, \dots, k$,

$$\Omega(i \times j)_{(\bar{e}_p)} = \Omega(i \times e_p) \cup \Omega(e_p \times j) \quad (14-3-1)$$

这里 $(\bar{e}_p) = E - (e_p)$. 设 E_q 是 E 的一个子集, 则

$$\Omega(i \times j)_{\bar{E}_q} = \bigcup_{e_p \in E_q} \Omega(i \times j)_{(\bar{e}_p)} \quad (14-3-2)$$

这里的 $\bar{E}_q = E - E_q$.

证明: 前面说过, $\Omega(i \times e_p)$ 是一个顶点集合, 其中每一个顶点至少是在 $M(i \times e_p)$ 类的一个连通有向 M 图之中; $\Omega(e_p \times j)$ 也是一个顶点集合, 其中每个顶点至少是在 $M(e_p \times j)$ 类的一个连通有向 M 图中 (见14-2节). 由前面的讨论, 定理的第一部分是显然的. 对于定理的第二部分, 我们注意到, 一条从 i 到 j 经过 $\Omega(i \times j)_{\bar{E}_q}$ 中顶点的有向路径必然正好包含 E_q 中的一条边. 因此, 对于某些 $e_p \in E_q$, $\Omega(i \times j)_{\bar{E}_q}$ 中的每一个顶点都在 $\Omega(i \times j)_{(\bar{e}_p)}$

中。很明显， $\Omega(i \times j)_{(\bar{e}_1)}$ 中的每一个顶点一定也在 $\Omega(i \times j)_{\bar{E}}$ 中。

(证毕)

定理14-3-5不仅给出了类 $\Omega(i \times j)_{(\bar{e})}$ 的可测量集与14-2节中的可测量集之间的关系，而且也说明，要求出在一个给定集合 E 下的 D 划分，只要知道 $\Omega(i \times j)_{(\bar{e})}$ 类的可测量集即可。

例14-3-4 考虑如图14-3-7所示的从 i 到 j 的不可分 SEC 图，设 $E = (e_1, e_2, e_3)$ ，我们可以看出，

$$\Omega(i \times e_1^-) = (i, 1)$$

$$\Omega(e_1^- \times j) = (4, j)$$

$$\Omega(i \times e_2^-) = (i, 1, 2, 5)$$

$$\Omega(e_2^- \times j) = (4, 5, 6, j)$$

$$\Omega(i \times e_3^-) = (i, 3)$$

$$\Omega(e_3^- \times j) = (6, j)$$

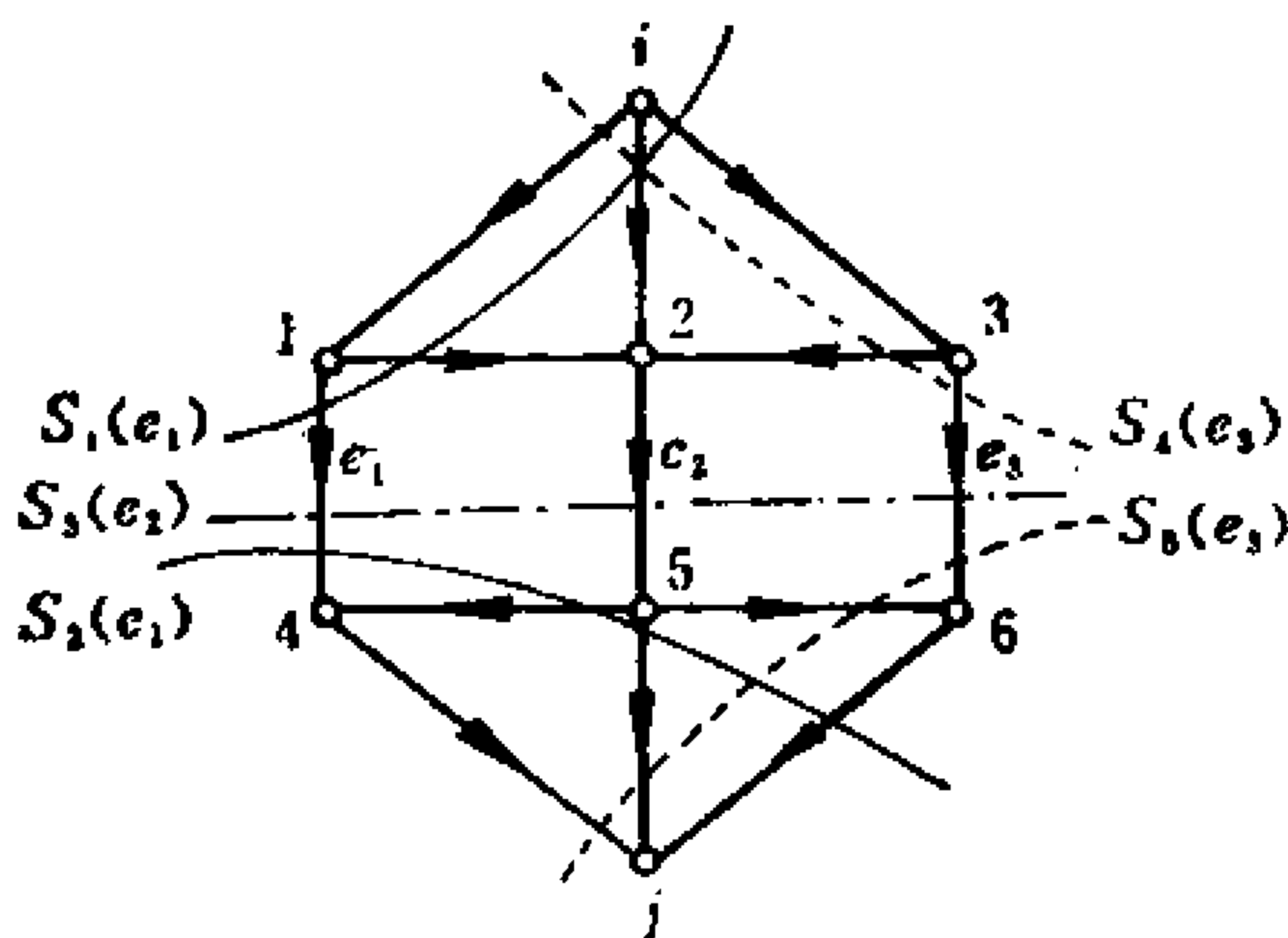


图14-3-7 不可分的SEC图

据定理14-3-5，我们可以得到

$$\begin{aligned} \Omega(i \times j)_{(e_1, e_2)} &= \Omega(i \times j)_{(\bar{e}_1)} = \Omega(i \times e_1^-) \cup \Omega(e_1^- \times j) \\ &= (i, 1, 4, j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega(i \times j)_{(e_1, e_3)} &= \Omega(i \times j)_{(\overline{e_2})} = \Omega(i \times e_2^+) \cup \Omega(e_2^- \times j) \\ &= (i, 1, 2, 3, 4, 5, 6, j)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega(i \times j)_{(e_1, e_2)} &= \Omega(i \times j)_{(\overline{e_3})} = \Omega(i \times e_3^+) \cup \Omega(e_3^- \times j) \\ &= (i, 3, 6, j)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega(i \times j)_{(e_1)} &= \Omega(i \times j)_{(\overline{e_2 e_3})} = \Omega(i \times j)_{(\overline{e_2})} \cup \Omega(i \times j)_{(\overline{e_3})} \\ &= (i, 1, 2, 3, 4, 5, 6, j)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega(i \times j)_{(e_2)} &= \Omega(i \times j)_{(\overline{e_1 e_3})} = \Omega(i \times j)_{(\overline{e_1})} \cup \Omega(i \times j)_{(\overline{e_3})} \\ &= (i, 1, 3, 4, 6, j)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega(i \times j)_{(e_3)} &= \Omega(i \times j)_{(\overline{e_1 e_2})} = \Omega(i \times j)_{(\overline{e_1})} \cup \Omega(i \times j)_{(\overline{e_2})} \\ &= (i, 1, 2, 3, 4, 5, 6, j)\end{aligned}$$

当我们运用测试点时，根据定理 14-2-15 我们得出，如果边集 E 是一个把 i 和 j 分离的有向割集，且 G 中每一条边至少在由 E 所覆盖的 $\{S\}$ 中的一个有向割集内，那么从 i 到 j 的 SEC 图在 E 下是 1 可辨的。当我们指定测试门到 E 中的边上时，情况就不同了。例如，在图 14-3-7 的 SEC 图中，边集 $E = (e_1, e_2, e_3)$ 所覆盖的有向割集集体 $\{S\}$ 由割集 S_1, S_2, S_3, S_4, S_6 构成，如图所示。注意到 E 是一个把 i 和 j 分离的有向割集，容易看出，SEC 图中每一条边在 $\{S\}$ 的一个割集中。另一方面，考虑顶点 1 和 4 的集合 $(1, 4)$ ，我们可以看出，对于 E 的每一个子集 E' ，或 $(1, 4) \subset \Omega(i \times j)_E$ ，或 $(1, 4) \subset \overline{\Omega(i \times j)_{E'}}$ 。因此，由定理 14-3-3， G 在 (e_1, e_2, e_3) 下不是 1- (i, j) 可辨的。这个例子说明，当我们应用测试门时，要使一个 SEC 图是 1- (i, j) 可辨的，仅要求所有的边在 $\{S\}$ 中的条件不是充分的。因此，我们有以下定理。

定理 14-3-6 设 G 是从 i 到 j 的 SEC 图，假定集合 E 是一个有向割集 $\mathcal{E}(\Omega \times \bar{Q})$ ，其中 Ω 仅由顶点 i 组成，或者 \bar{Q} 仅由顶点 j 组成。则 G 是 1- (i, j) 可辨的，当且仅当 G 中每一条边在 $\{S\}$ 的一个有向割集中。其中 $\{S\}$ 是被 E 覆盖的有向割集集体。

证明：据定理 14-3-5，

$$\Omega(i \times j)_{(\bar{e}_p)} = \Omega(i \times e_p^+) \cup \Omega(e_p^- \times j) \quad (14-3-3)$$

其中 $e_p \in E$ 。假定 $\bar{\Omega}$ 仅由顶点 j 组成, 则 $\Omega(e_p^- \times j) = (j)$ 。所以对所有的边 $e_p \in E$, $\Omega(i \times j)_{(\bar{e}_p)} = \Omega(i \times e_p^+) \cup (j)$ 。因此, 如果没有顶点 j , 运用测试门关于 e_p 的可测量集和运用测试点关于 e_p 的可测量集就是相同的。当 Ω 仅由顶点 i 组成时, 我们有 $\Omega(i \times j)_{(\bar{e}_p)} = (i) \cup \Omega(e_p^- \times j)$ 。这说明当我们不考虑顶点 i 时, 运用测试门关于 e_p 的可测量集与运用测试点关于 e_p 的可测量集是相同的。因此, 运用测试点关于一个从 i 到 j 的 SEC 图在 E 下为 1 可辨的充分必要条件, 在这种情况下也能适用。这就证明了定理。

(证毕)

例14-3-5 考虑图14-3-8中的不可分SEC图。由 $E = (e_1, e_2,$

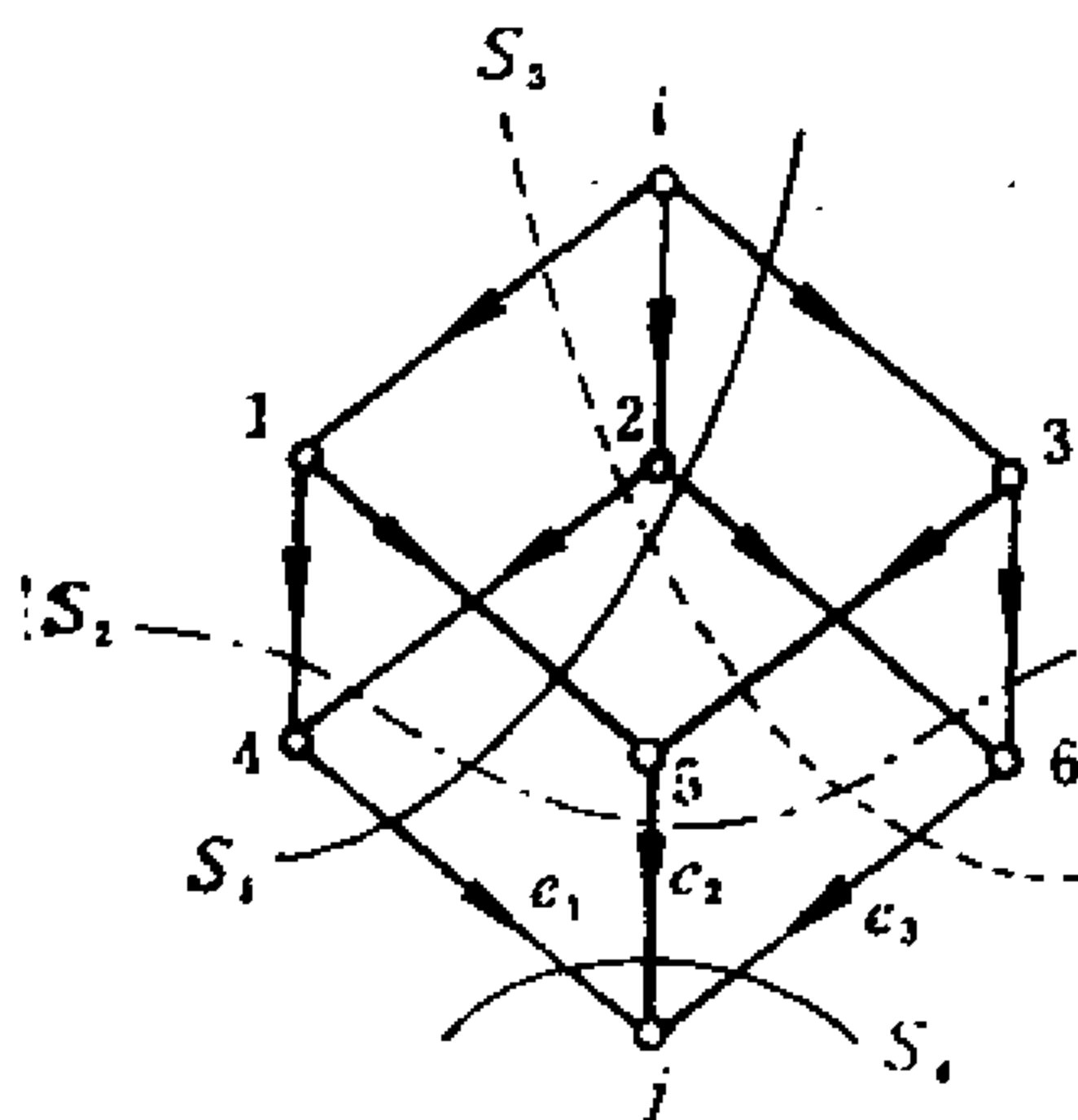


图14-3-8 不可分的SEC图

$e_3)$ 所覆盖的有向割集集体 $\{S\}$ 包括四个割集 S_1, S_2, S_3 和 S_4 , 它们是

$$S_1 = \mathcal{S} \{ (i, 1, 2, 4) \times \overline{(i, 1, 2, 4)} \}$$

$$S_2 = \mathcal{S} \{ (i, 1, 3, 5) \times \overline{(i, 1, 3, 5)} \}$$

$$S_3 = \mathcal{S}((i, 2, 3, 6) \times \overline{(i, 2, 3, 6)})$$

$$S_4 = \mathcal{S}(\overline{(j)} \times (j))$$

如图所示。

因为 G 中每一条边在 $\{S\}$ 的一个割集中，据定理14-3-6， G 在 (e_1, e_2, e_3) 下是 $1-(i, j)$ 可辨的。

定理14-3-7 设 G 是从 i 到 j 的 SEC 图，假定集合 $E = \mathcal{S}(\Omega \times \bar{D})$ 是一个有向割集。如果 G 中每一条边在 $\{S\}$ 的一个割集内，则 G 在 E 下或者是 $1-(i, j)$ 可辨的，或者是 $2-(i, j)$ 可辨的，其中 $\{S\}$ 是被 E 覆盖的有向割集集体。

证明：考虑在 G 中把所有属于 Ω 的顶点合并起来，得到一个 SEC 图 G' 。显然 $\{S\}$ 的一个子集体是 G' 中由 E 覆盖的有向割集集体， G' 的每一条边在这个子集体的一个割集中。因为 $E = \mathcal{S}(\Omega' \times \bar{D}')$ 是 G' 中一个有向割集，这里 $\Omega' = (i)$ ， $\bar{D}' = \bar{D}$ ，据定理14-3-6， G' 在 E 下是 $1-(i, j)$ 可辨的。同样，把 \bar{D} 中所有顶点合并起来，我们得到一个新的 SEC 图 G'' ，它在 E 下是 $1-(i, j)$ 可辨的。因此， Ω 中任意两个顶点不可能在 E 下 D 划分的同一集合中。同样， \bar{D} 的任意两个顶点也不可能在 E 下 D 划分的同一集合中。但是，如果一个顶点来自 Ω ，另一个顶点来自 \bar{D} ，就不能保证这两个顶点能在 E 下 D 划分的不同的集合之中。因此， G 在 E 下或者是 $1-(i, j)$ 可辨的，或者是 $2-(i, j)$ 可辨的。（证毕）

在图14-3-7所示的从 i 到 j 的 SEC 图 G 中，如果 $E = (e_1, e_2, e_3)$ ，那么 $\{S\} = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_6\}$ ，它是一个由 E 覆盖的有向割集集体。显然， G 中每一条边在 $\{S\}$ 的一个割集内。因此，据定理14-3-7， G 在 E 下或者是 $1-(i, j)$ 可辨的，或者是 $2-(i, j)$ 可辨的。注意在 E 下 D 划分的集合是 (i, j) ， $(1, 4)$ ， $(2, 5)$ 和 $(3, 6)$ 。

习 题

1. 求出在下列可测量集下 D 的划分, 这里 $\Omega_1 \cup \bar{\Omega}_1 = (1, 2, 3, 4, 5)$;

$$\Omega_1 = (1, 2, 3, 4) \quad \Omega_2 = (1, 3, 5)$$

$$\Omega_3 = (2, 3, 4) \quad \Omega_4 = (1, 3, 4)$$

2. 在图 P-14-2 所示的从 i 到 j 的 SEC 图中, 找出在集合 $E = (a, b)$ 下所有的可测量集 $\Omega(i \times a^+)$, $\Omega(a^- \times j)$, $\Omega(i \times b^+)$, $\Omega(b^- \times j)$, $\Omega(a^+ \times b^+)$, $\Omega(a^+ \times b^-)$, $\Omega(a^- \times b^+)$, $\Omega(a^- \times b^-)$, $\Omega(b^+ \times a^+)$, $\Omega(b^+ \times a^-)$, $\Omega(b^- \times a^+)$ 及 $\Omega(b^- \times a^-)$.

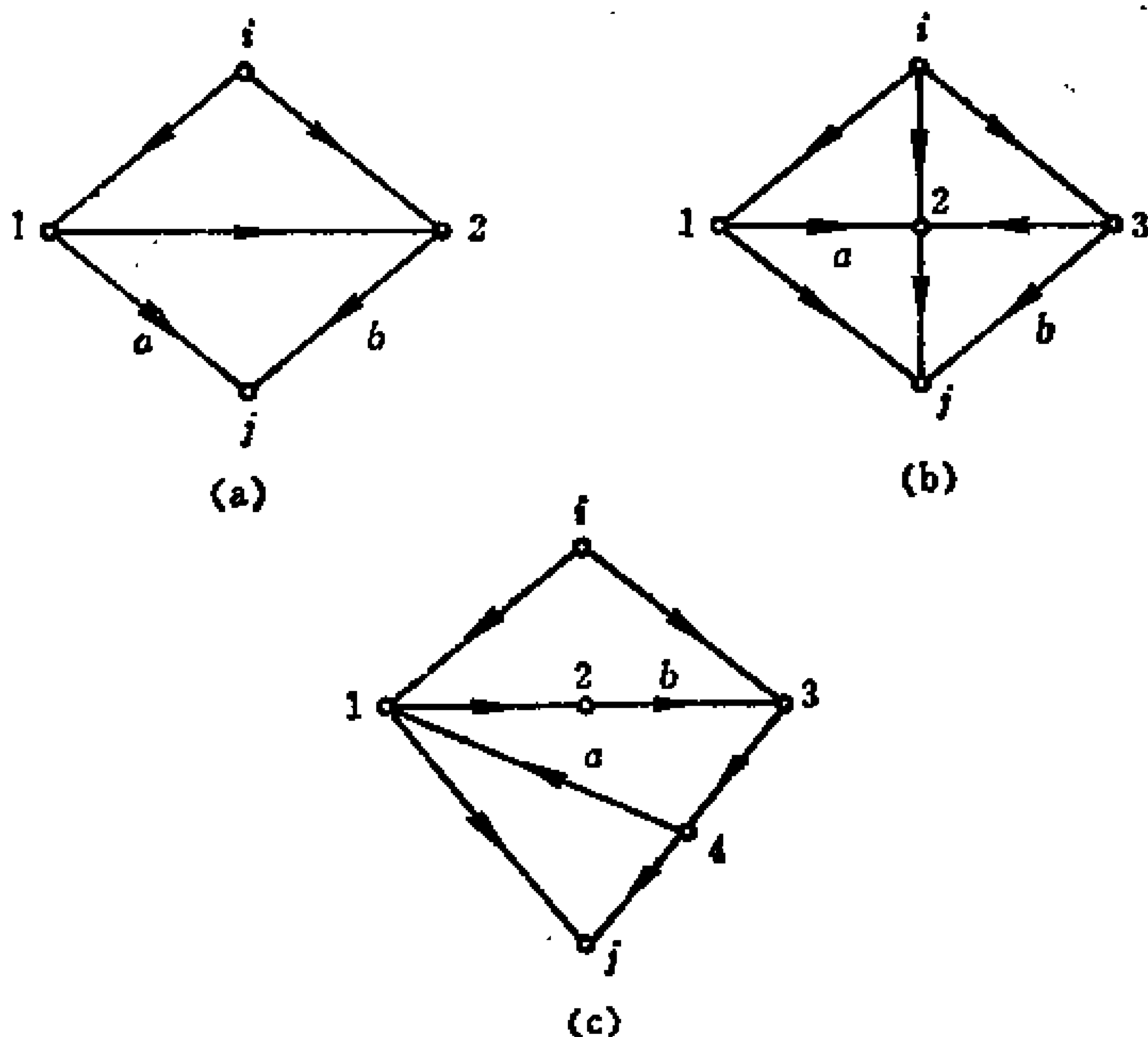


图 P-14-2

3. 习题 2 中从 i 到 j 的各 SEC 图在 $E = (a, b)$ 下是 1 可辨的

吗?

4. 在习题 2 的各 SEC 图中, 找出由 $E = (a, b)$ 所覆盖的所有的有向割集.

5. 在图 P-14-5 所示的从 i 到 j 的 SEC 图中, 找出所有由 $E = (a, b)$ 所覆盖的有向割集. 这个图在 $E = (a, b)$ 下是 1 可辨的吗?

6. 图 P-14-6 所示的从 i 到 j 的 SEC 图在 $E = (a, b, c, d)$ 下是 1 可辨的吗?

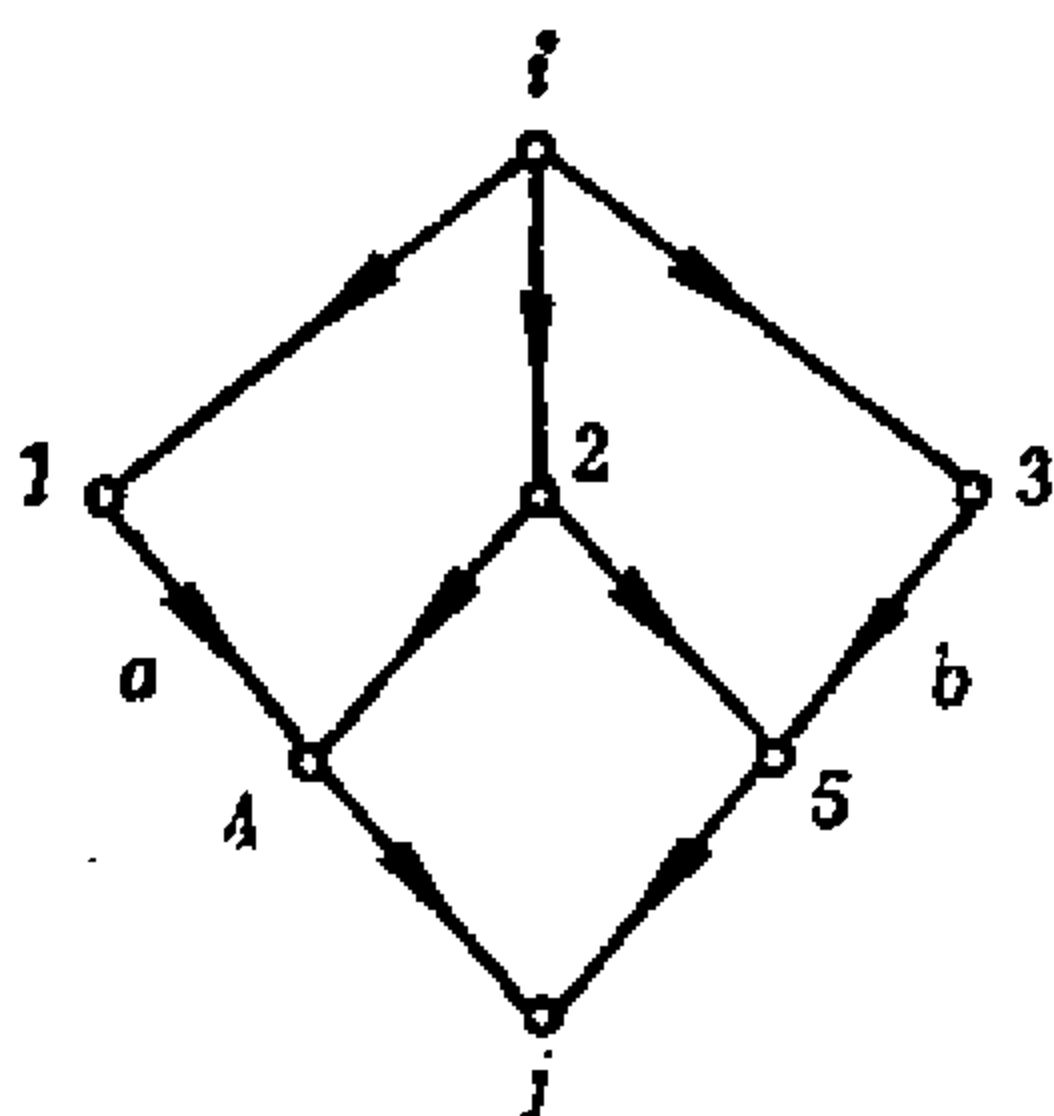


图 P-14-5

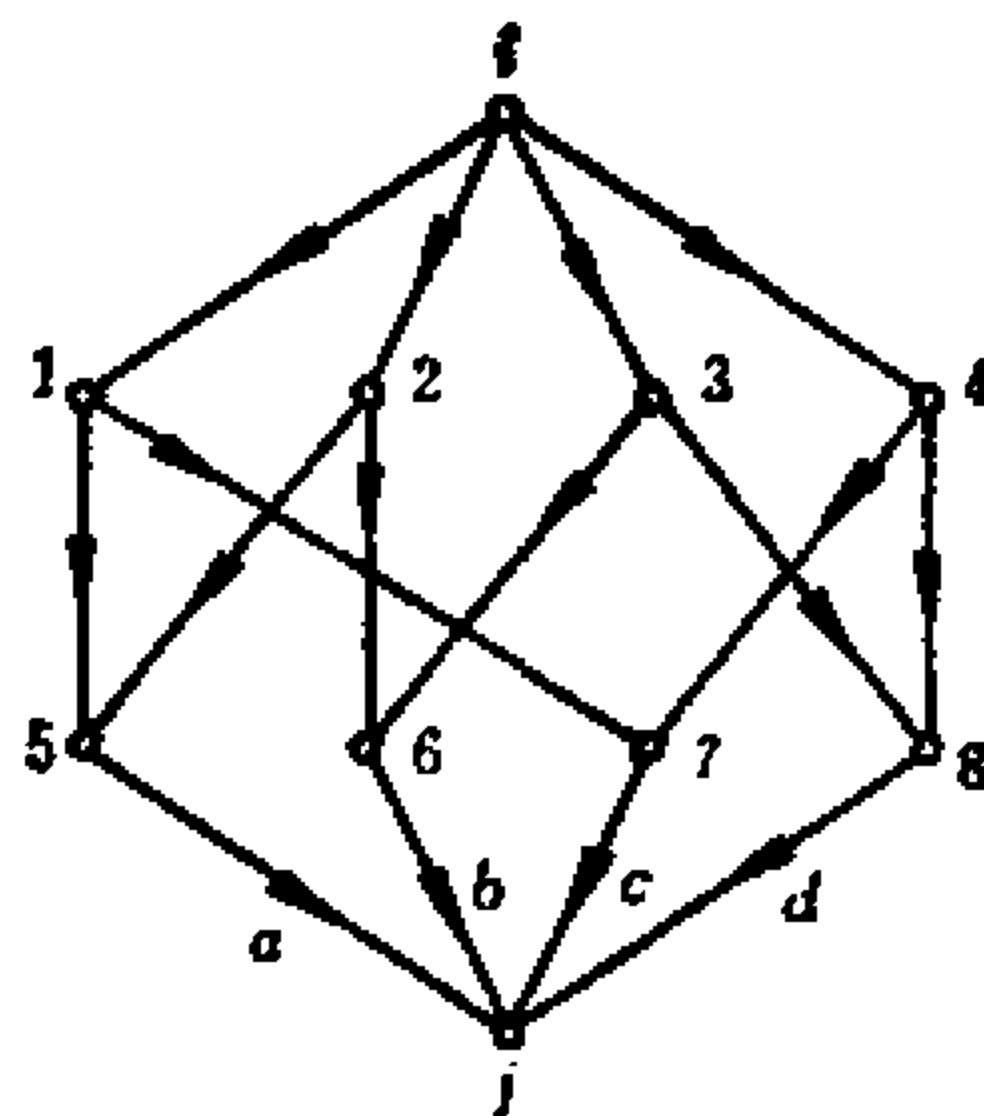


图 P-14-6

7. 在图 P-14-7 所示的从 i 到 j 的 SEC 图中, 求出所有门集合 $E = (a, b, c)$ 下的可测量集.

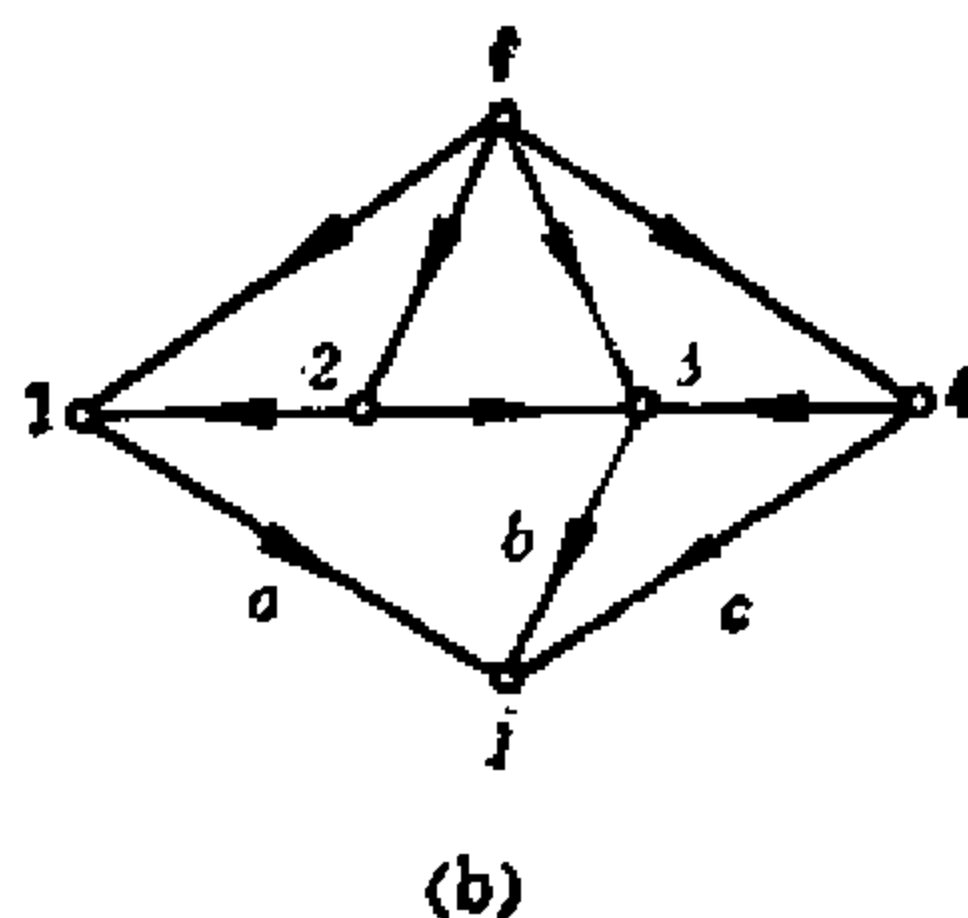
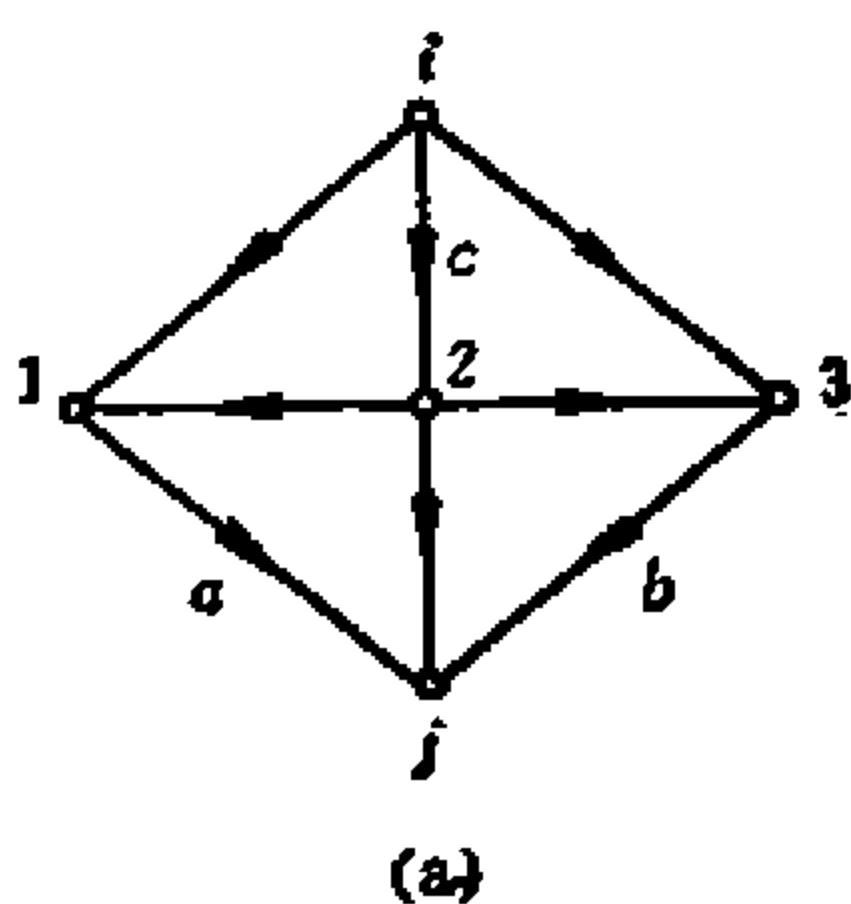


图 P-14-7

8. 习题 7 中的 SEC 图在门集合 $E = (a, b, c)$ 下是 1 可辨的吗?

9. 在图 P-14-6 所示的从 i 到 j 的 SEC 图中, 假定我们将测试点指定给边 a 和 b , 将测试门指定给 c 和 d .

(a) 求出所有的可测量集.

(b) 在上述指定下, 这个 SEC 图是 1 可辨的吗?

主要参考文献*

第一章和第二章

Mayeda, W., "Application of Mathematical Logic to Network Theory," Circuit Theory Group, University of Illinois.

Mayeda, W., "Properties of Classes of Paths," Report No. R-212, C.S.L., University of Illinois, Urbana, May 1964.

第三章和第四章

Mayeda, W., "Necessary and Sufficient Conditions for Realizability of Cut-Set Matrices," *IRE Trans, Circuit Theory*, CT-7, 79-81 (Mar, 1960).

Mayeda, W., "Properties of the Non-Singular Matrices Which Transform Cut Set Matrices into Incidence Matrices," *IRE Trans. Circuit Theory*, CT-10, 128-131 (Mar, 1963).

第五章和第六章

Mayeda, W., "Realizability of Fundamental Cut Set Matrices of Oriented Graphs", *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-10, 133-134 (March 1963).

Mayeda, W., "Pseudo-Cuts and Their Applica-

* 原著有参考文献388条, 这里我们仅选编了同著者有关的34条。——译注

tions," CSL Report R-233, University of Illinois, Urbana, July 1964.

第七章和第八章

Mayeda, W., "Digital Determination of Topological Quantities and Network Functions," ITR, No. 6, EERL, University of Illinois, 1957.

Mayeda, W., "Topological Formulas for Active Networks," ITR No. 8, EERL, University of Illinois, Jan. 1958.

Mayeda, W., "Topological Formulas for Active Networks," *Proc. Nat. Elec. Conf.*, 15, 1-13 (1958).

Mayeda, W., "Application of Linear Graphs to Electrical Networks, Switching Networks and Communication Nets," CSL Report No. R-203, University of Illinois, July 1964.

Mayeda, W., "General Transformation for Network Analysis," Proceedings, First Annual Princeton Conference on Information Science and Systems, Mar. 1967.

Mayeda, W., "Graph Theoretical Analysis Using Network Equivalent Transformation," *Trans. IECEJ Japan*, 50, 115-120 (July 1967).

Mayeda, W., and Seshu, S., "Topological Formulas for Network Functions," Engr. Experimental Station Bulletin No. 446, University of Illinois, Nov. 1957.

Mayeda, W., and Van Valkenburg, M. E., "Network Analysis and Synthesis by Digital Computers,"

IRE Wescon Convention Record, Part.2, 1957, pp. 137-144.

Mayeda, W., and Van Valkenburg, M.E., "Analysis of Non-Reciprocal Networks by Digital Computers," *IRE Wesson Convention Record*, Part 2, 1958, pp. 70-75.

第九章

Mayeda, W., "Reducing Computation Time in the Analysis of Networks by Digital Computer," *IRE Trans. Circuit Theory*, CT-6, 136-137 (Mar. 1959).

Mayeda, W., "Correction to Reducing Computation Time in the Analysis of Networks by Digital Computers," *IRE Trans. Circuit Theory*, CT-6 (Dec. 1959).

Mayeda, W., "Generation of Trees and Complete Trees," CSL R-284, University of Illinois, Apr, 1966.

Mayeda, W., Hakimi, S.L., Chen, W.K., and Deo, N., "Generation of Complete Trees," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-15, 101-105 (June 1968).

Mayeda, W., and Seshu, S., "Generation of Trees Without Duplications," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-12, 181-185 (June 1965).

第十章

Mayeda, W., "Elimination of Subgraphs in a Signal Flow Graph," CSL Report R-339, University of Illinois, Feb. 1967; Proceedings of the Fifth Annual Allerton Conference on Circuit and System Theory, Oct. 1967.

第十一章

Mayeda, W., "Synthesis of Switching Functions by Linear Graph Theory," *IBM J. Res. Develop.*, 4, 320-328 (July 1960).

第十二章和第十三章

Mayeda, W., "Maximum Flow Through a Communication Net," Interim Tech. Report No. 13, Contract DA-11-022-ORD-1983, University of Illinois, Feb. 1959.

Mayeda, W., "Synthesis of a Communication Net," Interim Tech. Report No. 14, Contract DA-11-022-ORD-1983, University of Illinois, Feb. 1959.

Mayeda, W., "Terminal and Branch Capacity Matrices of a Communication Net," *IRE Trans. Circuit Theory*, CT-7, 261-269 (Sept. 1960).

Mayeda, W., "On Oriented Communication Nets," *IRE Trans., Circuit Theory*, CT-9, 261-267 (Sept. 1962).

Mayeda, W., "Application of Linear Graph Theory to Communication Nets," *Progress in Radio Science* 196-63, Vol. VI, Elsevier Publ. Co., New York, 1966, pp. 67-69.

Mayeda, W., "Maximum Flow under Controlled Edge Flows," Proc. IEEE International Conference on Communication, June 1968.

Mayeda, W., "Computerized Data Communication System and Vertex Weighted Linear Graph," *Proceedings of the 3rd International Conference on*

System Science, University of Hawaii, Jan. 1970, pp. 1032-1035.

Mayeda, W., "Flow Reliability of Communication Net," *Proceedings of the Kyoto International Conference on Circuit and System Theory*, Kyoto, Japan, Sept. 1970, pp. 39-40.

Mayeda, W., and Van Valkenburg, M. E., "Properties of Lossy Communication Nets," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-12, 334-338 (Sept. 1965).

Mayeda, W., and Van Valkenburg, M. E., "Set of Cut Sets and Optimum Flow," *Third Colloquium on Microwave Communication*, Budapest, Apr. 1966.

第十四章

Mayeda, W., and Ramamoorthy, C. V., "Distinguishability Criteria in Oriented Graphs and Its Application to Computer Diagnosis. I," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-16, 448-454 (Nov. 1969).

Mayeda, W., and Ramamoorthy, C. V., "Distinguishability Criteria in Oriented Graphs and Its Application to Computer Diagnosis-II," *Proceedings of IEEE International Symposium on Circuit Theory*, Georgia, 1970.

英 中 名 词 索 引

Abelian group	阿贝尔群	定理1-3-5	(22)
Activelike element	似有源元件		(329)
Assigning flow	分配流	定义12-1-3	(470)
Backward property	后向性质	定义9-2-4	(386)
Basic saturated		定义12-1-9	(475)
cut-set	基本饱和割集	定义12-5-2	(502)
~ edge	基本饱和边	定义12-1-8	(475)
~ vertex-cut	基本饱和点割	定义13-1-4	(557)
Binet-Cauchy theorem	比内-柯西定理		(292)
Branch	枝, 支路	定义3-3-6	(115)
~ current	支路电流		(279)
Chord	弦	定义3-3-2	(109)
Circuit	回路	定义1-2-11	(15)
~in oriented graph	有向图中的回路	定义6-1-6	(240)
~matrix	回路矩阵	定义3-3-5	(114)
Class W of cut-sets	割集的 w 类		(496)
Closed directed			
edge train	有向闭边列	定义6-6-2	(269)
~ edge train	闭边列	定义1-2-3	(12)
Complete graph	完全图	定义2-2-3	(67)
Completely specified switching			

function	完全确定开关函数		(451)
Complete tree	完全树	定义8-1-3	(334)
Connected	连通		(10)
~graph	连通图	定义1-2-10	(15)
~oriented graph	连通有向图	定义6-1-2	(235)
Connection matrix	连接矩阵	定义11-1-1	(441)
Corresponding cut-set	对应割集		(482)
~major determinant	对应大于行列式		(295)
~nonoriented graph	对应无向图	定义6-1-1	(235)
~signal flow graph	对应信号流图		(421)
~vertex-cut	对应点割	定义13-1-7	(561)
Cover	覆盖	定义14-2-6	(596)
Current edge	电流边	定义8-1-2	(324)
~graph	电流图	定义8-1-1	(331)
Cut-set	割集	定义2-2-2	(66)
~matrix	割集矩阵	定义3-4-2	(119)
~matrix of oriented graph	有向图的割集矩阵	定义6-4-3	(262)
~separating vertices i and j	分离顶点 i 和 j 的割集	定义5-1-1	(208)
Cutting vertex	切割顶点	定义1-5-1	(33)
Cut vertex	割点	定义1-5-2	(35)
Degree of vertex $d(v)$	顶点的度 $d(v)$	定义1-2-1	(10)
~in edge train	边列中顶点的度	定义1-2-5	(12)
Deleting edges	把边删去		(36)

Deletion of verices	删去顶点	定义13-1-1	(555)
D -partition	D 划分	定义14-1-5	(591)
D -process	D 过程	定义4-3-3	(177)
Directed circuit	有向回路	定义6-6-5	(270)
~cut-set	有向割集	定义6-4-1	(258)
~edge train	有向边列	定义6-6-1	(269)
Closed~	有向闭边列	定义6-6-2	(269)
Open~	有向开边列	定义6-6-2	(269)
~Euler graph	有向欧拉图	定义6-6-4	(270)
~ M graph	有向 M 图	定义6-6-6	(272)
~path	有向路径	定义6-6-7	(272)
~tree	有向树	定义8-7-3	(364)
Distance between trees	两个树间距离	定义6-2-1	(248)
Dual	对偶	定义4-3-2	(175)
Edge	边	定义1-1-1	(6)
Nonoriented~	无向边	定义1-1-2	(6)
Oriented~	有向边	定义1-1-2	(6)
Self-loop~	自环边		(6)
~capacity	边容量		(469)
~disjoint union of circuits	回路的无重边并 (集)	定义1-2-12	(16)
~disjoint union of circuits in oriented graph	有向图中回路的无重边并	定义6-1-7	(241)
~disjoint union of cut-sets	割集的无重边并	定义2-3-1	(76)
~disjoint union of a path and circuits	一条路径与若干回路的无重边并	定义1-4-2	(28)
~circuits flow	边流		(279)

\sim weight	边权		(279)
\sim train	边列	定义1-2-2	(11)
Elementary tree transformation	初等树变换	定义6-2-2	(249)
Empty set ϕ	空集 ϕ		(21)
Endpoints	端点	定义1-1-2	(6)
Entry terminal	入口端		(589)
Entry vertex	入口点	定义14-1-1	(589)
Euler graph	欧拉图	定义1-3-1	(18)
Even sign permutation	偶符号置换	定义8-2-3	(336)
EWC net	EWC网(边权网)		(469)
Exhaustive circuit matrix	穷举回路矩阵	定义3-3-1	(106)
\sim of oriented graph	有向图的穷举回路矩阵	定义6-1-8	(241)
Exhaustive cut-set matrix	穷举割集矩阵	定义3-4-1	(118)
\sim of oriented graph	有向图的穷举割集矩阵	定义6-4-2	(259)
Exhaustive incidence matrix	穷举关联矩阵	定义3-1-1	(92)
\sim of oriented graph	有向图的穷举关联矩阵	定义6-1-3	(236)
Exit terminal	出口端		(589)
Exit vertex	出口点	定义14-1-1	(589)
Fault vertex	故障点	定义14-1-2	(589)
Final vertex	终点		(11)
Flow	流		(470)
Flow graph	流图	定义10-1-1	(409)

Flow reliability	流可靠度		(528)
Forest	林	定义3-2-3	(102)
Forward property	前向性质	定义9-2-4	(386)
Fundamental circuit	基本回路	定义3-3-3	(109)
~in oriented graph	有向图中的基本回路	定义6-1-9	(241)
Fundamental circuit matrix	基本回路矩阵	定义3-3-4	(110)
~of oriented graph	有向图的基本回路矩阵	定义6-1-11	(243)
Fundamental cut-set	基本割集	定义3-4-4	(122)
~in oriented graph	有向图中的基本割集		(262)
Fundamental cut-set matrix	基本割集矩阵	定义3-4-3	(615)
~of oriented graph	有向图的基本割集矩阵	定义6-4-4	(167)
Gate Set	门集合	定义14-3-3	(615)
Homeomorphic	同胚的	定义4-2-3	(167)
H -submatrix	H 子阵	定义3-5-2	(126)
Incidence matrix	关联矩阵	定义3-1-2	(99)
~of oriented graph	有向图的关联矩阵	定义 $\begin{smallmatrix} 6-1-4 \\ 6-1-5 \end{smallmatrix}$	(237)
Incidence set	关联集	定义2-1-1	(63)
Incident	关联		(10)
Incoming degree $d^-(v)$	入度 $d^-(v)$	定义6-6-3	(269)
Incompletely specified switching			

function	不全定开关函数		(459)
Initial vertex	始点		(11)
Inner region	内区域		(166)
Inner terminal	内部端		(592)
Isolated vertex	孤立点	定义1-2-8	(14)
Isomorphic	同构的	定义4-1-1	(157)
Jacobi's relationship	雅可比关系式		(318)
k -distinguishable	k 可辨的	定义14-1-6	(592)
Kirchhoff's law	克希霍夫定律		(279)
Kuratowski's basic nonplanar graphs	库拉托斯基的两个基本非平面图	定理4-2-1	(168)
Linear graph	线图	定义1-1-3	(7)
Oriented~	有向线图		(7)
Nonoriented~	无向线图		(7)
Weighted~	加权线图	定义7-1-1	(279)
~corresponding to edge train	与边列对应的线图	定义1-2-4	(12)
~corresponding to set of edges	与边集对应的线图	定义1-2-9	(14)
Linearly dependent	线性相关	定义2-4-1	(87)
Linearly independent	线性无关	定义2-4-1	(87)
Loop current	回路电流		(283)
Lossy EWC net	损耗EWC网		(521)
Major determinant	主子式	定义3-2-1	(100)
Major submatrix	主子矩阵	定义3-2-1	(100)
Maximal connected subgraph	最大连通子图	定义1-3-3	(23)

Maximal planar graph	最大平面图		(189)
Measurable set	可测量集	定义14-1-3	(589)
Mesh transformation	网孔变换		(282)
M -graph	M 图	定义1-4-1	(27)
Minimum M -submatrix	最小 M 子阵	定义3-5-5	(142)
Minimum nonrealizable matrix	最小不可实现矩阵	定义4-4-2	(192)
Minimum set for $\Omega(i \times i)_E$	关于 $\Omega(i \times j)_E$ 的最小集合		(615)
M -sequence	M 序列	定义9-2-5	(389)
M -submatrix	M 子阵	定义3-5-3	(136)
Node transformation	节点变换		(286)
Nonoriented EWC net	无向EWC网		(469)
Nonoriented graph	无向图		(7)
Nonoriented VWC net	无向VWC网		(554)
Nonplanar graph	非平面图		(168)
Nonseparable	不可分的	定义1-5-3	(35)
Nonsingular major submatrix	非奇异大子矩阵		(100)
Normal form	正规形式	定义4-4-1	(192)
Nullity	零度	定义4-3-1	(174)
Odd sign permutation	奇符号置换	定义8-2-3	(336)
Open edge train	开边列	定义1-2-3	(12)

Opening edge	断开边		(37)
1-distinguishable	1 可辨的	定义14-1-6	(592)
1-distinguishable under E	E 下 1 可辨的	定义14-2-8	(599)
1-(ij)distinguish- able	1-(i, j)可辨的	定义14-3-4	(617)
Oriented graph	有向图	定义1-1-3	(7)
Separable~	可分有向图		(236)
Separated~	分离有向图		(236)
Outer region	外区域		(166)
Outgoing degree $d^+(v)$	出度 $d^+(v)$	定义6-6-7	(269)
Passivelike element	似无源元件		(297)
Path	路径	定义1-2-6	(12)
Path product	路径积		(47)
Planar	平面的	定义4-2-1	(164)
Principal partition	主分块	定义12-2-2	(481)
Principal tree	主树		(337)
Principal vertex	主点	定义8-2-1	(334)
Proper subgraph	真子图	定义1-2-7	(14)
P -set cycle	P -集圈	定义10-1-4	(411)
Pseudocut	伪割	定义5-2-1	(219)
Pseudocut in $(U)_{U_1}$	$\{U\}_{U_1}$ 中的伪割	定义5-2-3	(219)
Pseudo EWC net	伪EWC网	定义12-5-4	(513)
Pseudo index	伪指标		(514)
Rank of linear graph	线图的秩	定义2-2-1	(65)
Rank of matrix	矩阵的秩		(95)
Reference vertex	参考点	定义3-1-3	(99)

Region	区域		(166)
Resultant main submatrices	结果主子阵	定义12-2-2	(481)
Ring product	环积	定义1-6-2	(41)
Saturated cut-set	饱和割集	定义12-1-7	(474)
Saturated edge	饱和边	定义12-1-6	(474)
Saturated vertex	饱和顶点	定义13-1-3	(556)
Saturated vertex-cut	饱和点割	定义13-1-3	(556)
SC network	SC网络(单触点网络)	定义11-3-1	(451)
SEC graph	SEC图(单输入单输出的连通图)	定义14-2-4	(594)
SEC graph from i to j	从 i 到 j 的SEC图	定义14-2-5	(594)
Self-loop	自环		(6)
Semicut	半割	定义12-5-1	(501)
Separable	可分的	定义1-5-2	(35)
Separated graph	分离图	定义1-2-10	(15)
Series	串联	定义4-2-2	(167)
Series edges	串联边	定义4-2-2	(167)
Set of chords	弦集	定义3-3-2	(109)
Set of fundamental circuits	基本回路集合	定义3-3-3	(109)
Set of fundamental cut-sets	基本割集集合	定义3-4-4	(122)
Set of minimum M submatrices	最小 M 子阵集	定义3-5-5	(142)
Shifting algorithm	移量算法		(512)
Shoring edge	短路边		(37)
Sign permutation	符号置换	定义8-2-2	(336)

Signal flow graph	信号流图	定义10-2-1	(415)
Singular matrix	奇异矩阵		(101)
Sink	汇点		(417)
Sink terminal capacity	汇端限容量	定义12-6-1	(524)
Source	源点		(417)
Source terminal capacity	源端限容量	定义12-6-1	(524)
SP-network	SP网络 (单-对网络)	定义11-5-1	(463)
S-submatrix	S子阵	定义12-5-3	(506)
Subgraph	子图	定义1-2-7	(14)
Subset	子集	定义1-6-1	(40)
Proper subset	真子集	定义2-2-2	(66)
Sylvester's Law of Nullity	西勒维斯特零度定理	定理3-3-4	(113)
τ -graph	τ 图	定义1-7-1	(49)
Terminal capacity	端限容量	定义12-1-5	(474)
Terminal capacity matrix	端限容量矩阵	定义12-2-1	(481)
Terminal vertices of M graph	M 图的端点	定义1-4-1	(27)
Test gate	测试门	定义14-3-1	(614)
Test point	测试点	定义14-2-1	(593)
Threshold level	阈级	定义12-7-1	(529)
Tree	树	定义3-2-2	(100)
Tree admittance product	树枝导纳乘积	定义7-4-1	(297)
Tutte's realizability condition	托特的可实现性条件	定理4-4-7	(205)
2-isomorphic	2-同构	定义4-1-2	(157)

2-isomorphic operation of type 1	第一型2-同构运算	定义4-4-4	(197)
2-isomorphic operation of type 2	第二型2-同构运算	定义4-4-4	(197)
2-tree	2-树	定义7-5-2	(305)
2-tree admittance product	2-树树枝导纳乘积		(309)
Unistor	单向导纳	定义8-7-1	(357)
Unit cost	单位价值		(489)
Value of cut-set	割集的值	定义12-1-10	(479)
Value of set	集合的值	定义13-1-6	(560)
Vertex	顶点	定义1-1-1	(6)
Vertex-cut.	点割	定义13-1-2	(556)
Vertex disjoint union of directed circuits	顶点不相接有向回路	定义10-1-3	(411)
Vertex semicut	点半割	定义13-3-1	(572)
Voltage edge	电压边	定义8-1-1	(324)
Voltage graph	电压图	定义8-1-2	(331)
VWC net	VWC网 (点权网)		(553)
Weighted linear graph	加权线图	定义7-1-1	(279)
Whitney's duality	惠特尼对偶性	定理4-3-10	(186)
W process	w 过程	定义6-6-9	(276)

符 号 索 引

$\{E\}$	定义1-3-2	(21)
$\{E, M_{ij}\}$	定理1-4-5	(31)
$\{M_{ij}\}$	定义1-4-3	(31)
$\{P_{ij}\}$	定义1-4-3	(31)
$\{P_{[e]}\}$	定义1-6-3	(45)
$\{S\}$	定理2-3-3	(84)
$\{S^0\}$	定义5-2-2	(219)
$\{S(i, j)\}$		(216)
$\{S^0(i, j)\}$		(216)
$\{S, Y_v\}$		(230)
$\{U\}_{v_1}$	定义5-2-3	(219)
$[\{U\}, \{S^0\}]$		(227)
$\{Y_v\}$	定义5-2-5	(229)
$\{\tau(i_1, i_2, \dots, i_n)\}$	定理1-7-4	(52)
$[\{\tau\}, \{C\}]$		(60)
$\{\Omega\}$	定义14-2-8	(611)
A	定义3-1-2	(99)
A_e	定义3-1-1	(92)
A_{-p}		(303)
A^+	定义8-7-2	(362)
B	定义3-3-5	(114)
B_e	定义3-3-1	(106)

B_i	定义3-3-4	(110)
$C(\bar{P}_i)$		(425)
$d(v)$	定义1-2-1	(10)
$d^+(v)$	定义6-6-3	(269)
$d^-(v)$	定义6-6-3	(269)
$D_j(\bar{K})$		(421)
$D_q(K)$		(421)
$D_j(0)$		(423)
$D_j(-1)$		(423)
$F(e_{p_1}e_{p_2}\cdots e_{p_k})$		(462)
$G(p=j)$		(304)
$G_p(\overline{\Omega(P_i)}\bar{K})$	定义10-2-3	(424)
$G(\overline{\Omega(P_i)})$		(425)
$G_R(\overline{u_1u_2\cdots u_v})$	定义10-3-1	(428)
$G_R(\bar{u}_q:q=1,2,\cdots,v)$	定义10-3-1	(428)
$H_{(i)}$	定义3-5-2	(126)
$M(j_1j_2\cdots j_k)$		(141)
$M(i\times j)$	定义6-6-6	(272)
$M(a^\pm\times b^\pm)$	定义14-2-3	(494)
n_c		(10)
n_v	定义2-2-1	(65)
Q	定义3-4-2	(119)
Q_s	定义3-4-1	(118)
Q_i	定义3-4-3	(122)
$R(t_{ij})$		(529)
$R(\psi_{ij})$		(531)
$R\left(\frac{\overline{t_1t_2\cdots t_v}}{u_1u_2\cdots u_v}\right)$	定义10-3-1	(428)

$R\left(\begin{smallmatrix} \bar{i}_q \\ \bar{w}_q \end{smallmatrix} : q = 1, 2, \dots, v\right)$	定义10-3-1	(428)
$S(v)$	定义2-1-1	(63)
S_{c_i}		(124)
$S_o(t_i)$		(382)
$S(i_1 j)$	定义5-1-2	(209)
	定义5-1-3	(216)
$S(i j_1)$	定义5-1-2	(209)
	定义5-1-3	(216)
$t^{\#}$		(395)
$t_{2p,1}$		(304)
$t_{2a_1 a_2 \dots a_p b_1 b_2 \dots b_q}$	定义7-5-2	(305)
$t_{2(z_p u_j)}$	定义7-6-1	(319)
$\overline{t_{n_1 n_2 \dots n_k}}$	定义8-8-2	(370)
$f_{n_0 n_1} \overline{[n_2 \dots n_k]}$	定义8-8-1	(368)
t_{ij}	定义12-1-5	(474)
$t_{ij}(\bar{z})$		(529)
\bar{t}_{ij}	定义12-6-1	(524)
\underline{t}_{ij}	定义12-6-1	(524)
$t_{ij} \overline{(e_{p_1} e_{p_2} \dots e_{p_k})}$	定义12-7-1	(529)
$T_{2a_1 a_2 \dots a_p b_1 b_2 \dots b_q}$	定义7-5-3	(305)
T^o	定义9-2-1	(384)
$T^{c_1 c_2}$	定义9-2-2	(385)
$T^{c_1 c_2 \dots c_k}$	定义9-2-3	(386)
$T \overline{(e_{p_1} e_{p_2} \dots e_{p_k})}$	定义12-7-1	(529)
$U_{i, k, j}$	定义7-6-2	(320)
ΣU	定义7-6-3	(321)

$U_{(i_1 a_1 j_1 k)}$		(355)
V	定义7-5-4	(309)
	定义8-4-1	(346)
$V_{\overline{a_1 a_2 \dots a_k}}$	定义8-8-2	(370)
$V[S]$	定义12-1-10	(479)
$V[W_i]$	定义13-1-6	(560)
$v(e^+)$	定义14-2-2	(493)
$v(e^-)$	定义14-2-2	(493)
$W_{a_1 a_2 \dots a_r, b_1 b_2 \dots b_s}$	定义7-5-4	(310)
$W_{(j)k, (i)0}$	定义8-4-2	(347)
$W_{a_0 a_1 \overline{a_2 \dots a_k}}$	定义8-8-1	(370)
σ_k		(334)
Δ'		(297)
Δ'_{p_i}		(302)
$\mathcal{O}(\Omega_p \times \Omega_q)$	定义2-2-4	(68)
Ω_c		(67)
Ω_1		(68)
\overline{D}_1		(68)
$\Omega(G)$	定理13-4-1	(576)
$\Omega(S)$	定理13-4-2	(578)
$\Omega^+(g)$	定义13-4-3	(581)
$\Omega(i \times j)$	定义14-1-3	(489)
$\Omega(a^\pm \times j)$	定义14-2-3	(494)
$\Omega(i \times a^\pm)$	定义14-2-3	(494)
$\Omega(a^\pm \times b^\pm)$	定义14-2-3	(494)
$\Omega(i \times j)_K$	定义14-3-2	(614)
ψ_{ij}	定义12-1-2	(470)

ρ	定义1-3-3	(23)
$\tau(i_1, i_2, \dots, i_m)$		(50)
\in	属于...或在...中	(6)
\cup	并	(6)
\cap	交	(17)
$-$	差	(17)
\oplus	环和	(17)
\subset	$A \subset B$: A 中每一个元素都在 B 中	(42)
$\not\subset$	$A \not\subset B$: A 中不是每一个元素 都在 B 中	(40)
\equiv	$A \equiv B$: $A \subset B$ 且 $B \subset A$	(222)
\otimes	定义1-6-2	(41)
\odot	定义9-3-1	(395)

设计编辑 唐世明
封面设计 曹加新
技术设计 黄 涌

ISBN 7-309-03111-1
定价 1.50元